Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2015/2016
Complementi di Matematica
Primo Appello – 13 Giugno 2016.

Cognome e nome ____________________ **Matricola**________

Specificare quale esame si deve sostenere: **Geometria** □ **Calcolo II** □

Se si è esonerati barrare la casella: □
Chi ha sostenuto e superato la prova di esonero deve solo risolvere gli esercizi dal 5 all'8.

Esercizio 1. Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base

$$\mathbf{b} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^3$ determinare una base ortogonale $\mathbf{v}$ rispetto al prodotto scalare standard. Successivamente se ne calcoli la corrispondente base ortonormale $\mathbf{w}$.

Soluzione: La base $\mathbf{v}$ cercata è: $v_1 = b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$v_2 = b_2 - \frac{b_2 \bullet v_1}{v_1 \bullet v_1} v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = b_3 - \frac{b_3 \bullet v_1}{v_1 \bullet v_1} v_1 - \frac{b_3 \bullet v_2}{v_2 \bullet v_2} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La base $\mathbf{w}$ è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{v}_1, \frac{1}{\sqrt{14}} \mathbf{v}_2, \frac{1}{\sqrt{21}} \mathbf{v}_3 \right\}$$

Esercizio 2. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:
$$q(X,Y,Z) = X^2 + Y^2 + 2XZ + 2YZ$$
a) classificare q e determinarne la segnatura. b) trovare una base ortonormale rispetto alla quale q sia diagonalizzata. c) calcolarne l'espressione in tale base. d) Determinare una base di Sylvester e la forma canonica di Sylvester.

Soluzione: Matrice della forma bilineare simmetrica associata:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Autovalori: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1.$

Autospazi: $V_1 = \langle(-1,1,0)\rangle,\ V_2 = \langle(1,1,1)\rangle,\ V_{-1} = \langle(-1,-1,2)\rangle$

Base ortonormale diagonalizzante: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)\right\}$

Espressione di q in tale base: $q(X_1,X_2,X_3) = X_1^2 + 2X_2^2 - X_3^2.$

Forma canonica di Sylvester: $X_1^2 + X_2^2 - X_3^2.$

q è indefinita, non degenere, con segnatura $(2,1)$.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ si considerino le rette:

$$r : X + 2Y - Z = X + Y - 3Z = 0, \quad s : \frac{X-2}{5} = \frac{Y}{-2} = Z + 1$$

Dopo aver verificato che sono parallele si determini un'equazione del piano che le contiene.

Soluzione Vettore di direzione di r è $(-5, 2, -1)$. Piano: $2X + 7Y + 4Z = 0$.

Esercizio 4. Si consideri la conica di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{C} : (X - Y)(X + Y - 2) - 3 = 0$$

Dopo averla classificata la si metta in forma canonica.

Soluzione: $\mathcal{C}$ è un'iperbole non degenere. Il suo centro è $C = (1, 1)$. La forma quadratica è già in forma diagonale quindi è solo necessaria la traslazione

$$T(X, Y) = (X + 1, Y + 1)$$

per portare $\mathcal{C}$ nella forma canonica $X^2 - Y^2 - 3 = 0$.

Esercizio 5. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$y + y' = \sin(t)$$

Soluzione: Soluz. equazione omogenea: $y = Ce^{-t}$.
$B(t) = \int e^t \sin(t) dt = e^t \frac{\sin(t)-\cos(t)}{2}$.
Soluzione generale: $y(t) = \frac{\sin(t)-\cos(t)}{2} + Ce^{-t}$

Esercizio 6. Si consideri la curva differenziabile:

$$\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}), \quad t \in \mathbb{R}$$

Dopo aver verificato che è regolare, se ne determinino nel punto $\alpha(0)$: triedro di Frenet, curvatura, torsione e piano osculatore.

Soluzione $\alpha' = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$, $\alpha'' = (e^t, e^{-t}, 0)$, $\alpha''' = (e^t, -e^{-t}, 0)$.

$v(0) = 2$, $\alpha'(0) \wedge \alpha''(0) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$, $\kappa(0) = \frac{1}{\sqrt{8}}$, $\tau(0) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$T(0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $N(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $B(0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Piano osculatore in $\alpha(0)$: $X - Y - Z\sqrt{2} = 0$.

Esercizio 7. Calcolare il volume del solido compreso tra il paraboloide di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$ e il piano $z = 0$.

Soluzione

$$V = \iint_C 1 - x^2 - y^2 dx\, dy$$

dove D è il cerchio di equazione $x^2 + y^2 \leq 1$. In coordinate polari abbiamo

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \rho^2)\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 8. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione su $\mathbb{R}^2$:

$$f(X, Y) = X^3 + 3XY^2 - 15X - 12Y$$

Nell'eventuale punto di minimo relativo calcolare il piano tangente al grafico.

Soluzione: $\nabla f = (3X^2 + 3Y^2 - 15, 6XY - 12)$. I punti stazionari sono soluzioni del sistema:

$$X^2 + Y^2 - 5 = 0 = 6XY - 12$$

e quindi sono i quattro punti: $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 1)$, $P_3 = (-1, -2)$, $P_4 = (-2, -1)$.

La matrice hessiana è $H = \begin{pmatrix} 6X & 6Y \\ 6Y & 6X \end{pmatrix}$ e si trova:

P_1 e P_3 sono punti di sella, P_2 è un minimo relativo e P_4 è un massimo relativo.
Piano tangente in $(2, 1, f(2, 1)) = (2, 1, -28)$ è $Z + 28 = 0$.