Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2015/2016
Complementi di Matematica (A-K)
Secondo Appello – 5 Luglio 2016.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Specificare quale esame si deve sostenere: **Geometria** ☐ **Calcolo II** ☐

Se si è esonerati barrare la casella: ☐

Chi ha sostenuto e superato la prova di esonero e non ha sostenuto il primo appello deve solo risolvere gli esercizi dal 5 all'8.

Esercizio 1. Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

definisce un prodotto scalare $\times$ in $\mathbb{R}^3$. Applicando alla base canonica il procedimento di Gram-Schmidt determinare una base ortogonale rispetto a $\times$.

Soluzione: I minori principali sono positivi quindi A è definita positiva. La base cercata si ottiene a partire dalla base $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ alla quale va applicato il procedimento di GS rispetto al prodotto scalare $\times$. Quindi $b_1 = e_1 = (1,0,0)$. Poi si ha:

$$b_2 = e_2 - \frac{e_2 \times b_1}{b_1 \times b_1} b_1$$

Ma:

$$e_2 \times b_1 = (0,1,0)A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad b_1 \times b_1 = (1,0,0)A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

e quindi

$$b_2 = e_2 - \frac{1}{2} b_1 = (-1/2, 1, 0)$$

Infine:

$$b_3 = e_3 - \frac{e_3 \times b_1}{b_1 \times b_1} b_1 - \frac{e_3 \times b_2}{b_2 \times b_2} b_2$$

Nello stesso modo si calcola che

$$e_3 \times b_1 = (0,0,1)A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad e_3 \times b_2 = (0,0,1)A \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/2$$

$$b_2 \times b_2 = (-1/2, 1, 0)A \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2$$

e quindi

$$b_3 = (0,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,0) - \frac{1}{3}(-1/2, 1, 0) = (-1/3, -1/3, 1)$$

Esercizio 2. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:

$$q(X,Y,Z) = 2X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 2XY + 2XZ + 2YZ$$

a) classificare q e determinarne la segnatura. b) trovare una base ortonormale rispetto alla quale q sia diagonalizzata. c) calcolarne l'espressione in tale base. d) Determinare una base di Sylvester e la forma canonica di Sylvester.

Soluzione: Matrice della forma bilineare simmetrica associata:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Autovalori: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 4$.

Autospazi: $V_1 = \langle(-1,0,1),(1,-2,1)\rangle,\ V_4 = \langle(1,1,1)\rangle$,

Base ortonormale diagonalizzante: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$

Espressione di q in tale base: $q(X_1,X_2,X_3) = X_1^2 + X_2^2 + 4X_3^2$.

Forma canonica di Sylvester: $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$.
Base di Sylvester: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1), \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$

q è non degenere, definita positiva. Segnatura $(3,0)$.

Esercizio 3. Determinare un'equazione cartesiana del piano Π contenente la retta

$$r: \quad 3X - 2Y + Z - 1 = X - 2Y + 3Z + 1 = 0$$

e parallelo alla retta $s : X = 1 + t,\ Y = 2 + 2t,\ Z = 3 + 3t$.

Soluzione: $2X - Y - 1 = 0$

Esercizio 4. Si consideri la conica euclidea C_a di equazione:

$$X^2 + Y^2 + XY + aX + aY + 1 = 0$$

dove a è un parametro reale. Determinare i valori di a per cui **i)** la conica è degenere, **ii)** la conica è a centro, **iii)** il centro della conica è l'origine.

Soluzione: La matrice della conica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a/2 & a/2 \\ a/2 & 1 & 1/2 \\ a/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\det(A) = (3 - a^2)/4$ si annulla per $a = \pm\sqrt{3}$ e questi sono i valori che rendono C degenere. La matrice $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ è indipendente da a e ha determinante > 0 quindi C_a è un'ellisse per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Le coordinate del centro di C_a sono: $(-a/3, -a/3)$ e quindi per $a = 0$ il centro è l'origine.

Esercizio 5. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$(1 + t^2)y' + 2ty = \frac{1}{t}$$

e risolverne il problema di Cauchy $y(1) = 0$.

Soluzione: $y(t) = \frac{C+\log|t|}{1+t^2}$. Cauchy: $\frac{\log|t|}{1+t^2}$ in $(0, +\infty)$.

Esercizio 6. Sia $R > 0$ e si consideri la curva differenziabile:

$$\alpha(t) = (R\cos^2 t, R\sin t\cos t, Rt), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Nel punto $\alpha(\pi/4)$ se ne determini triedro di Frenet ed equazione della retta tangente.

Soluzione

(i) $\alpha'(t) = (-2R\cos t\sin t, R(\cos^2 t - \sin^2 t), R)$, $|\alpha'(t)| = \sqrt{2}R$.
La curva è regolare perché $\alpha(t) \in C^1([0, \frac{\pi}{2}])$ e $|\alpha'(t)| \neq 0, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
La lunghezza della curva è uguale a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\alpha'(t)|dt = \frac{\sqrt{2}}{2}R\pi$.

(ii) $\alpha''(t) = (2R(\sin^2 t - \cos^2 t), -4R\cos t\sin t, 0)$.
$\alpha(\pi/4) = (R/2, R/2, R\pi/4)$, $\alpha'(\pi/4) = (-R, 0, R)$, $\alpha''(\pi/4) = (0, -2R, 0)$.
Retta tg: $Y = R/2$, $X + Z - R/2 - R\pi/2 = 0$.
$\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2) = (2R^2, 0, 2R^2)$.
$T(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$, $B(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $N(\pi/4) = (0, -1, 0)$.

Esercizio 7. Calcolare l'integrale $\iint_D e^{\frac{y}{x}} dx\, dy$ dove D è la regione del semipiano $x \geq \frac{1}{2}$ compresa tra la parabola $y = 2x^2$ e la retta $y = 2x$.

Soluzione

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{2x^2}^{2x} e^{\frac{y}{x}} dy = \frac{e^2}{8}$$

Esercizio 8. Calcolare la circuitazione in senso antiorario lungo la circonferenza Γ di centro l'origine e raggio $a > 0$ del campo vettoriale definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$V(x,y) = \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}, \frac{y-x}{x^2+y^2} \right)$$

E' possibile dedurre dal risultato che V è conservativo? Motivare la risposta.

Soluzione

Parametrizzando Γ come $(a\cos\theta, a\sin\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ si calcola:

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma V &= \oint_\Gamma \left[\frac{x+y}{x^2+y^2} dx + \frac{y-x}{x^2+y^2} dy \right] \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{a\cos\theta + a\sin\theta}{a^2} a\sin\theta + \frac{a\cos\theta - a\sin\theta}{a^2} a\cos\theta \right] d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi
\end{aligned}$$

Pertanto il campo non è conservativo perché se lo fosse ogni circuitazione sarebbe nulla.