Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2015/2016
Complementi di Matematica (L-Z)
Terzo Appello – 9 Settembre 2016.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Specificare quale esame si deve sostenere: **Geometria** □ **Calcolo II** □

Esercizio 1. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:

$$q(X,Y,Z) = 2X^2 + 2Y^2 + Z^2 + 2XY$$

a) classificare q e determinarne la segnatura. b) trovare una base ortonormale rispetto alla quale q sia diagonalizzata. c) calcolarne l'espressione in tale base. d) Determinare una base di Sylvester e la forma canonica di Sylvester.

Risposta:
Soluzione: Matrice della forma bilineare simmetrica associata:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalori: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3$.

Autospazi: $V_1 = \langle (1,-1,0), (0,0,1) \rangle,\ V_3 = \langle (1,1,0) \rangle$,

Base ortonormale diagonalizzante: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), (0,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \right\}$

Espressione di q in tale base: $q(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + X_2^2 + 3X_3^2$.

Forma canonica di Sylvester: $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$.
Base di Sylvester: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), (0,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,0) \right\}$

q è non degenere, definita positiva. Segnatura $(3,0)$.

Esercizio 2. Determinare un'equazione cartesiana del piano Π contenente la retta

$$r: \quad X = 1+t, \; Y = 2+2t, \; Z = 3+3t, \; t \in \mathbb{R}$$

e parallelo alla retta $m : X - Y + 2Z + 1 = 0 = X - 2Y + Z + 2$.

Risposta:
Soluzione: La retta r è parallela al vettore $v_r = (1,2,3)$ mentre m è parallela al vettore $v_m = (3,1,-1)$, che è ottenuto considerando i minori della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Il piano cercato ha coefficienti delle incognite che sono coordinate di un vettore ortogonale alle due rette e passa per un punto di r, ad esempio $(1,2,3)$. Quindi Π ha equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y-2 & Z-3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = X - 2Y + Z = 0$$

Esercizio 3. Si consideri la conica C_a di equazione

$$(1-a)X^2 + Y^2 - 2(1-a)X + 2aY + 1 - a = 0.$$

Determinare i valori del parametro a per cui C_a è: (i) una conica degenere; (ii) una conica a centro, e determinare le coordinate del centro.

Risposta:
Soluzione:
La matrice della conica è

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & a-1 & a \\ a-1 & 1-a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\det(A) = a^2(1-a)$ si annulla per $a = 0$ e $a = 1$ e questi sono i valori che rendono C degenere. La matrice $A_0 = \begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante $1-a$ quindi C_a è una conica a centro sempre che $a \neq 1$. Le coordinate del centro di C_a sono: $(1, -a)$.

Esercizio 4. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$y' = y^{\frac{2}{3}}$$

e determinarne la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 0$.

Risposta:
Soluzione: Separando le variabili si ottiene:

$$y^{-\frac{2}{3}} dy = dx$$

e quindi integrando ambi i membri:

$$3y^{\frac{1}{3}} = x + c \quad \text{ossia:} \quad y = \left(\frac{x+c}{3}\right)^3$$

La soluzione particolare si ottiene ponendo $c = -1$, cioè

$$y = \left(\frac{x-1}{3}\right)^3$$

Esercizio 5. Si consideri la curva differenziabile in $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha(t) = \left(t, -t, \frac{t^2}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Dopo aver verificato che α è regolare:

i) si determini l'insieme S costituito dai valori di t tali che α abbia velocità uguale a 1 in t.

ii) Nel punto $\alpha(2)$ si determini il triedro di Frenet e un'equazione del piano osculatore.

Risposta:

Soluzione: i) $\alpha'(t) = \sqrt{2+t^2}$ che è > 1 per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi $S = \emptyset$.

ii) $\alpha'(2) = (1, -1, 2), \quad \alpha''(2) = (0, 0, 1), \quad \alpha'(2) \wedge \alpha''(2) = (-1, -1, 0)$.

Quindi:

$$T(2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2), \quad B(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0), \quad N(2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$$

Il piano osculatore passa per $\alpha(2) = (2, -2, 2)$ ed è perpendicolare a $B(2)$. Quindi ha equazione: $X + Y = 0$.

Esercizio 6. Utilizzando integrali doppi, calcolare il volume del solido compreso tra il semi-cono di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e il piano $z = 2$.

Risposta:

Soluzione

$$V = \iint_D (2 - \sqrt{x^2+y^2}) dx\, dy$$

dove D è il cerchio definito dalla disequazione $x^2 + y^2 \leq 4$. In coordinate polari abbiamo

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2-\rho)\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{8\pi}{3}.$$

Esercizio 7. Si consideri il campo vettoriale definito in $\mathbb{R}^3$:

$$V(x, y, z) = (y, z\cos yz + x, y\cos yz).$$

(1) Mostrare che V è conservativo e calcolarne un potenziale.

(2) Calcolare $\int_{\gamma_1} V.ds$ e $\int_{\gamma_2} V.ds$ dove γ_1 è la circonferenza del piano $z = 0$ di raggio 1 con centro nell'origine percorsa in senso anti-orario e $\gamma_2 \subseteq \gamma_1$ è la semicirconferenza data dai punti $(x, y, 0)$ tali che $y \geq 0$.

Risposta:

Soluzione

Il campo è conservativo perché il dominio è semplicemente connesso ed è identicamente nullo il suo rotore:

$$(\partial V_z/\partial y - \partial V_y/\partial z, \partial V_x/\partial z - \partial V_z/\partial x, \partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y)$$

Un potenziale di V è $f(x, y, z) = xy + \sin yz$.

Siccome γ_1 è una curva chiusa e V è conservativo, $\int_{\gamma_1} V.ds = 0$, mentre $\int_{\gamma_2} V.ds = f(-1, 0, 0) - f(1, 0, 0) = 0$.