Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2015/2016
Complementi di Matematica - canale A-K
Prima prova di valutazione in itinere – 30 Aprile 2016.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Specificare quale esame si deve sostenere: **Geometria** □ **Calcolo II** □

Esercizio 0. Per ciascuno dei seguenti quesiti, il candidato è tenuto esclusivamente a indicare le risposte esatte, senza dare alcuna motivazione. Ogni risposta esatta dà un punteggio positivo, ogni risposta errata un punteggio negativo, le risposte non date valgono 0.

(i) Si consideri la conica C di $\mathbb{R}^2$ equazione $3X^2 + 3Y^2 + 2XY + 6X + 2Y = 0$. Dare le risposte esatte:
a) C è un'ellisse degenere SI NO
b) C è una parabola non degenere SI NO
c) C possiede punti reali SI NO
d) C possiede centro di simmetria NO SI e il suo centro ha coordinate ....
Soluzione: a) NO, b) NO, c) SI, d) SI $(-1, 0)$

(ii) Determinare i versori di $\mathbb{R}^2$ (con prodotto scalare standard) che formano un angolo convesso uguale a $\frac{\pi}{2}$ con il vettore $(3, 4)$.

Risposta:
Soluzione: $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ e $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

(iii) Sia $P = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$ e sia $Q = \sigma_C(P)$ dove $C = (2, -1/2)$. Calcolare la matrice del prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\{\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP}\}$.

Risposta:
Soluzione:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(iv) Determinare il valore del parametro m tale che il prodotto vettoriale $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ m \\ 2 \end{pmatrix}$ sia perpendicolare alla retta di equazioni $X - Y - 12 = X - Z + 21 = 0$.

Risposta:
Soluzione: $m = 2$

Esercizio 1. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:

$$q(X,Y,Z) = 2XY + 2XZ + 2YZ$$

a) classificare q e determinarne la segnatura. b) trovare una base ortonormale rispetto alla quale q sia diagonalizzata. c) calcolarne l'espressione in tale base. d) Determinare una base di Sylvester e la forma canonica di Sylvester.

Risposta:

Soluzione: La matrice della forma bilineare è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed il suo polinomio caratteristico è $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$, e quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Pertanto q è non degenere, indefinita con segnatura $(1,2)$.

L'autospazio V_2 è generato dal vettore $v_1 = (1,1,1)$, che normalizzato diventa $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

L'autospazio V_{-1} ha equazione $X + Y + Z = 0$. Una sua base è ad esempio data da $\{v_2 = (1,-1,0),\ v_3 = (0,1,-1)\}$. Applicando Gram-Schmidt si ottiene la coppia di vettori ortogonali tra loro:

$$w_2 = v_2,\ w_3 = (1/2, 1/2, -1)$$

i quali, normalizzati, danno la base ortonormale

$$\left\{u_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), u_3 = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -\sqrt{2/3})\right\}$$

di V_1.

Quindi una base ortonormale che diagonalizza q è $\{u_1, u_2, u_3\}$ e in tale base l'espressione di q è:

$$q(X_1, X_2, X_3) = 2X_1^2 - X_2^2 - X_3^2$$

La corrispondente base di Sylvester è

$$\left\{\frac{u_1}{\sqrt{2}}, u_2, u_3\right\}$$

e la forma canonica di Sylvester è $X_1^2 - X_2^2 - X_3^2$.

Esercizio 2. Dopo aver determinato il valore del parametro h per cui le rette

$$2X - hY - 4 - h = Y + Z - 2 = 0, \quad 2X - 2Y + Z + 5 = 2X - 4Y - Z + 3 = 0$$

sono parallele, determinare un'equazione del piano che le contiene.

Risposta:

Soluzione: $h = 3$, piano: $6X - 20Y - 11Z + 1 = 0$. Il piano si può ottenere considerando il fascio di piani per la prima retta:

$$\lambda(2X - 3Y - 7) + \mu(Y + Z - 2) = 0$$

e imponendo il passaggio per un punto qualsiasi della seconda retta, ad esempio per $(4, 4, -5)$. Si ottiengono i valori $(\lambda, \mu) = (3, -11)$ che sostituiti danno l'equazione del piano cercato.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Mostrare che A definisce un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(2) Trovare una base $\mathbf{b}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a $\langle\ ,\ \rangle$ relativamente alla base $\mathbf{b}$ sia diagonale.

Risposta:
Soluzione: (1) I minori principali sono positivi.
(2) Applicando GS alla base canonica si ottiene la base ortogonale $\mathbf{b}$:

$$(1, 0, 0),\ (2, 1, 0),\ (-1, -1/2, 1)$$