Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria Civile – a.a. 2015/2016

PROGRAMMA DEL CORSO
Complementi di Matematica (titolare prof. Edoardo Sernesi)

Prodotti scalari e forme bilineari simmetriche. Il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$. La matrice di una forma bilineare simmetrica rispetto ad una base.

Esempi di matrici della stessa forma bilineare rispetto a basi diverse. Matrici simmetriche definite positive. Criterio dei minori principali affinché una matrice simmetrica sia definita positiva.

Spazi vettoriali euclidei. Perpendicolarità fra vettori. Sistemi ortogonali di vettori e loro indipendenza lineare.

Coefficiente di Fourier. Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Formula di passaggio da una base ad un'altra per la matrice di un prodotto scalare.

Lunghezza di un vettore. Versori. Basi ortonormali. Matrice del prodotto scalare rispetto ad una base ortonormale.

Matrici ortogonali. Matrici congruenti. La disuguaglianza di Schwartz. Angolo convesso tra due vettori. La nozione di forma quadratica. La forma bilineare simmetrica polare di una forma quadratica.

Spazio ortogonale a un vettore o a un sottospazio. Proiezione di un vettore nella direzione di un vettore non nullo. Operatori ortogonali e matrici ortogonali.

Operatori autoaggiunti e matrici simmetriche. Autovalori delle matrici simmetriche.

Autovettori di un operatore autoaggiunto relativi ad autovalori distinti sono perpendicolari. Il teorema spettrale.

Conseguenze del teorema spettrale: diagonalizzabilità di una forma bilineare simmetrica e di una forma quadratica mediante trasformazioni ortogonali.

Esercizi sulle forme quadratiche. Basi e forme canoniche di Sylvester. Indice di positività, di negatività, rango, segnatura. Classificazione delle forme quadratiche.

Sistemi di coordinate nel piano e nello spazio. Equazioni parametriche e cartesiane delle rette nel piano.

Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità. Angolo convesso tra due rette orientate. Problemi vari di geometria piana.

Fasci propri e fasci impropri di rette. Il piano proiettivo. Il prodotto vettoriale di due vettori di $\mathbb{R}^3$ e sue proprietà.

Significato del modulo del prodotto vettoriale. Rette e piani di $\mathbb{R}^3$.

Passaggio da equazioni parametriche a cartesiane di rette e di piani. Possibilità per la posizione reciproca retta piano e relative condizioni sulle equazioni.

Espressione dell'equazione di un piano sotto forma di determinante. Equazioni cartesiane di una retta come minori di una matrice. Principio dei minori orlati.

Posizioni reciproche retta-retta. Condizioni di complanarità di due rette. Fasci di piani propri e impropri.

Affinità. Isometrie. Traslazioni. Simmetrie rispetto a un punto. Nel piano: rotazioni dirette e inverse, simmetrie rispetto a una retta.

Coniche. Matrice di una conica. Coniche semplicemente e doppiamente degeneri. Coniche a centro. Ellissi, iperboli e parabole.

Il teorema di classificazione delle coniche euclidee.

Piano proiettivo e coordinate omogenee. Punti impropri. Intersezione di rette nel piano proiettivo. Coniche nel piano proiettivo. Intersezione con la retta impropria e classificazione.

Polarità. Teorema di reciprocità. Retta tangente in un punto. Centro di una conica e polarità. Proprietà dei punti di intersezione di una conica conuna sua polare.

Calcolo degli asintoti di una iperbole utilizzando coordinate omogenee e polarità. Generalità sulle equazioni differenziali. Soluzione generale. Problema di Cauchy. Equazioni differenziali del primo ordine.

Equazioni differenziali a variabili separabili. Soluzione generale e problema di Cauchy.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Equazione omogenea associata. Struttura dell'insieme delle soluzioni.

Esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy.

Esempi di equazioni differenziali lineari del primo ordine. Equazioni differenziali lineari di ordine n. Esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy.

Operatori lineari e soluzioni di equazioni differenziali lineari. Dimensione dello spazio delle soluzioni di un'equazione omogenea. Equazioni del secondo ordine. Wronskiano e indipendenza di soluzioni.

Discussione del problema di Cauchy. Dimostrazione del teorema sulla dimensione dello spazio delle soluzioni di un'equazione del secondo ordine omogenea.

Equazioni omogenee lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Calcolo della soluzione generale.

Curve parametrizzate. Limiti, continuità, derivabilità. Vettore velocità e velocità scalare. Curve regolari.

Integrazione. Curve rettificabili, lunghezza. Riparametrizzazioni. Indipendenza della lunghezza dalla riparametrizzazione. Ascissa curvilinea. Curvatura e versore normale principale di curve a velocità unitaria. Le formule di Frenet nel piano. Centro di curvatura, cerchio osculatore, piano osculatore.

L'apparato di Frenet. Formule di Frenet nello spazio. Formule per il calcolo per curve a velocità arbitraria.

Ancora esempi su curve parametrizzate e sulle formule di Frenet.

Insiemi aperti e insiemi chiusi nello spazio euclideo. Loro pincipali proprietà. Esempi.

Interno, esterno, frontiera, derivato di un insieme. Limiti. Continuità. Teorema di permanenza del segno. Esempi di funzioni che non possiedono limite.

Insiemi connessi per archi. Insiemi compatti. Teorema degli zeri. Teorema di Weierstrass.

Derivate parziali. Gradiente. Funzioni derivabili. Esempi di funzioni derivabili o non derivabili. Grafico di una funzione. Piano tangente.

Punti critici. Massimi e minimi relativi, punti di sella. Esempi. Derivate parziali successive. Teorema di Schwarz.

Proprietà del gradiente. Matrice hessiana. Criterio locale per distinguere i punti critici mediante l'hessiana.

Integrale doppio di una funzione definita su un rettangolo. Calcolo pratico dell'integrale doppio. Insiemi x-semplici, y-semplici, regolari.

Formula per il cambiamento di variabili negli integrali doppi.

Calcolo del volume della sfera. Esempi di integrali doppi.

Campi vettoriali. Potenziale e campi conservativi. Lavoro di un campo lungo una curva. Circuitazioni. Caratterizzazione dei campi conservativi attraverso il lavoro lungo curve differenziabili.

Rotore. Campi irrotazionali. Esempi di campi irrotazionali non conservativi. Insiemi stellati. I campi irrotazionali su insiemi stellati sono conservativi.