Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2013/2014
Complementi di Matematica
Primo appello – 18 Giugno 2014.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Esercizio 0. Per ciascuno dei seguenti quesiti, il candidato è tenuto esclusivamente a barrare le risposte esatte, senza indicare alcuna motivazione. Ogni risposta esatta dà un punteggio positivo, ogni risposta errata un punteggio negativo, le risposte non date valgono 0.

(1) Determinare l'insieme D di definizione della funzione di due variabili reali:

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{xy}$$

Risposte: (I) $\{-2 \le x < 2,\ xy \ge 0\}$, (II) $\{(x,y) : -1 \le x \le 1,\ x > 0,\ y \ge 0\}$,

(III) $\{(x,y) : 0 \le x \le \pi,\ xy \ge 0\}$,

(IV) $\{(x,y) : -2 \le x \le 2, x \ge 0, y \ge 0\} \cup \{(x,y) : -2 \le x \le 2, x \le 0, y \le 0\}$

Soluzione: (IV)

(2) Calcolare l'integrale $\mathbf{I} = \iint_T x dx dy$ dove T è il triangolo di vertici $(0,0), (1,1), (0,1)$.

Risposte: (I) $\frac{1}{6}$, (II) $-\frac{2}{3}$, (III) 0, (IV) $0,5$

Soluzione: (I)
$T = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\}$ e quindi

$$\mathbf{I} = \int_0^1 x dx \int_x^1 dy = \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{6}$$

(3) *(6 cfu)* Determinare un'equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ contenente la retta di equazioni parametriche $x = t,\ y = t - 2,\ z = -3t$ e parallelo alla retta passante per i punti $(2,0,1)$ e $(1,0,2)$.

Risposte: (I) $2x - y - z + 3 = 0$, (II) $x + y + z = 0$,

(III) $x - 2y + z + 4 = 0$, (IV) nessuno dei precedenti.

Soluzione: (IV).

Esercizio 1. Studiare massimi e minimi della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x$ e determinare un'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1, 0)$.

Soluzione: $f_x = 2x + y + 1$, $f_y = 2y + x$. Si annullano in $P = (-2/3, 1/3)$. La matrice hessiana è $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. P è un minimo relativo.

Piano tangente: $3x + y - z - 1 = 0$.

Esercizio 2. Si consideri la curva parametrizzata $\gamma(t) = (1 - \cos(t), \sin(t), t)$. Dopo aver verificato che γ è regolare in tutto $\mathbb{R}$ se ne determini la riparametrizzazione con ascissa curvilinea con origine 0 e se ne calcoli la curvatura in funzione del parametro.

Soluzione: $\gamma'(t) = (\sin(t), \cos(t), 1)$, $v(t) = \sqrt{2}$. Ascissa curvilinea $s(t) = \sqrt{2}\int_0^t d\tau = \sqrt{2}\ t$. Quindi $t(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}$ e $\gamma(s) = (1 - \cos(s/\sqrt{2}), \sin(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2})$. Pertanto:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T} = &\quad \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin(s/\sqrt{2}), \cos(s/\sqrt{2}), 1) \\
\mathbf{T}' = &\quad \tfrac{1}{2}(\cos(s/\sqrt{2}), -\sin(s/\sqrt{2}), 0) \\
\kappa(s) = &\quad ||\mathbf{T}'|| = \tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Esercizio 3. *(6 cfu)* Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:

$$q(X, Y, Z) = -X^2 - 2Y^2 + 2YZ - 2Z^2$$

a) classificare q e determinarne la segnatura. b) trovare una base ortonormale rispetto alla quale q sia diagonalizzata. c) calcolarne l'espressione in tale base. d) Determinare una base di Sylvester e la forma canonica di Sylvester.

Soluzione: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $P_A(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda + 3)$.
Definita negativa, segnatura $(0, 3)$.

Base diagonalizzante: $\{(1, 0, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\}$. Forma diagonalizzata: $-T_1^2 - T_2^2 - 3T_3^2$. Forma canonica di Sylvester: $-T_1^2 - T_2^2 - T_3^2$.

Esercizio 4. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale: $ty' + 2y = e^{t^2}$ negli intervalli in cui esiste. Determinare la soluzione del problema di Cauchy corrispondente alla condizione iniziale $y(-1) = 0$ e l'intervallo di esistenza.

Soluzione: Soluzione generale: $y(t) = \frac{C}{t^2} + \frac{e^{t^2}}{2t^2}$ definita in $t \neq 0$. Soluzione di Cauchy: $y(t) = \frac{-e}{2t^2} + \frac{e^{t^2}}{2t^2}$, in $(-\infty, 0)$.