Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2013/2014
Complementi di Matematica
Secondo appello – 14 Luglio 2014.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Esercizio 0. Per ciascuno dei seguenti quesiti, il candidato è tenuto esclusivamente a barrare le risposte esatte, senza indicare alcuna motivazione. Ogni risposta esatta dà un punteggio positivo, ogni risposta errata un punteggio negativo, le risposte non date valgono 0.

(i) Determinare l'insieme A di definizione della funzione di due variabili reali:

$$f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$$

Risposte: (I) $A = \{(x,y) : x^2+y^2 > 0\}$, (II) $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \geq 0\}$, (III) $A = \{(x,y) : x^2+y^2 < 0\}$, (IV) $A = \{(x,y) : 2k\pi \leq x^2+y^2 \leq (2k+1)\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Soluzione: (IV)

(ii) Calcolare l'integrale doppio $\iint_T \frac{x^2}{x^2+y^2} dxdy$ dove T è il triangolo che ha per lati le rette $y = x$, $y = -x$, $x = 1$. (Suggerimento: passare a coordinate polari).

Risposte: (I) 0, (II) $\frac{\pi}{2}$, (III) $\frac{\pi}{4}$.
Soluzione: (III)

(iii) *(6 cfu)* In $\mathbb{R}^3$ determinare il piano passante per la retta

$$r : \ 3x - 2y + z - 1 = x - 2y + 3z + 1 = 0$$

e parallelo alla retta

$$s : \ x = 1 + t,\ y = 2 + 2t,\ z = 3 + 3t$$

.

Risposte: (I) $x + z = 1$, (II) $2x - 2y = 3z$, (III) $1 - x = y$, (IV) $2x - y - 1 = 0$.

Soluzione: (IV)

(iv) *(6 cfu)* Classificare le coniche: $a)\ x^2 + xy + y^2 - 5x = 0$, $\quad b)\ x^2 + 4xy + y^2 - 2y = 0$.

Risposte: (I) entrambe ellissi non degeneri a punti reali, (II) a) ellisse non degeneri a punti reali e b) parabola non degenere, (III) a) iperbole non degenere e b) iperbole degenere, (IV) sono due coniche a centro.

Soluzione: (II)

Esercizio 1. Investigare la continuità della funzione: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ in $(0,0)$. Verificare se f è derivabile e/o differenziabile in $(0,0)$ motivando la risposta.

Soluzione: E' discontinua e derivabile, quindi non è differenziabile.

Esercizio 2. *(6 cfu)* Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:

$$q(X, Y, Z) = -X^2 - Y^2 + 2XY - Z^2$$

a) classificare q e determinarne la segnatura. b) trovare una base ortonormale rispetto alla quale q sia diagonalizzata. c) calcolarne l'espressione in tale base. d) Determinare una base di Sylvester e la forma canonica di Sylvester.

Soluzione: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$. Semidefinita negativa, segnatura $(0, 2)$. Base diagonalizzante: $\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)\}$. Forma diagonalizzata: $-T_2^2 - 2T_3^2$. Forma canonica di Sylvester: $-T_2^2 - T_3^2$.

Esercizio 3. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale: $y' = xy^2$ e determinarne la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = -1$ e l'intervallo di esistenza. Motivare l'unicità di tale soluzione.

Soluzione: Soluzione generale: $y(x) = -\frac{2}{x^2+c}$. Soluzione particolare: $y(x) = -\frac{2}{x^2+1}$. E' definita in tutto $\mathbb{R}$. E' unica perché la funzione y^2 è di classe $C^1(\mathbb{R})$ (teorema 1.1 p. 6).