Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2013/2014
Complementi di Matematica
Terzo appello – 30 Settembre 2014.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Esercizio 0. Per ciascuno dei seguenti quesiti, il candidato è tenuto esclusivamente a dare le risposte. Non è richiesto di indicare il procedimento seguito.

(i) Determinare l'insieme A di definizione della funzione di due variabili reali: $f(x, y) = \log[(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)]$

Risposta:
Soluzione: $4 < x^2 + y^2 < 16$

(ii) Calcolare l'integrale doppio $\iint_R (x^2 + y^2) dxdy$ dove R è la regione del piano delimitata dalle curve $y = x^2$, $x = 2$, $y = 1$.

Risposta:
Soluzione: $\frac{1006}{105}$

(iii) *(6 cfu)* Determinare un'equazione cartesiana del piano π di $\mathbb{R}^3$ contenente la retta r di equazioni $\frac{X-1}{2} = \frac{Y-2}{3} = \frac{Z}{4}$ e perpendicolare al piano α di equazione $2X + 2Y + Z = 0$.

Risposta:
Soluzione: $5X - 6Y + 2Z + 7 = 0$

Esercizio 1. Si consideri la funzione $z = f(x, y) = (x + y^2)e^x$. Determinarne i punti critici e classificarli. Stabilire se esiste un punto di minimo assoluto o un punto di massimo assoluto della funzione, motivando la risposta.

Risposta:

Soluzione: $f_x = e^x(1+x+y^2)$, $f_y = 2ye^x$. Punto critico $P = (-1, 0)$. La matrice hessiana in P è $H = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$. $(-1, 0)$ è un minimo assoluto.

Esercizio 2. *(6 cfu)* Si consideri la forma quadratica: $q(x, y, z) = -x^2 + 2xy - y^2 - z^2$. Classificare q, e determinare la matrice ortogonale che la porta in forma canonica in modo che i termini diagonali abbiano coefficienti in ordine non decrescente. Determinare inoltre la forma canonica di Sylvester di q.

Risposta:

Soluzione: Matrice di q è $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Autovalori $-2, -1, 0$. Base ortonormale di autovettori:

$$\left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0, 0, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\}$$

La forma è semidefinita negativa. Segnatura: $(0, 2)$.

Esercizio 3. Si calcoli l'apparato di Frenet della curva $\gamma(t) = (2t, -t^2, t^3)$ nel punto $\gamma(0)$. Si determini inoltre un'equazione cartesiana del piano osculatore e le coordinate del centro di curvatura relativi al punto $\gamma(0)$.

Risposta:

Soluzione: $\gamma'(t) = (2, -2t, 3t^2)$, $\gamma''(t) = (0, -2, 6t)$, $\gamma'''(t) = (0, 0, 6)$, $v(t) = (4 + 4t^2 + 9t^4)^{1/2}$. Quindi:

$\gamma(0) = (0, 0, 0)$, $v(0) = 2$, $T(0) = (1, 0, 0)$, $\gamma'(0) \wedge \gamma''(0) = (0, 0, -4)$, $k(0) = \frac{||\gamma'(0) \wedge \gamma''(0)||}{v(0)^3} = 1/2$. $B(0) = (0, 0, -1)$, $N(0) = B(0) \wedge T(0) = (0, -1, 0)$. Infine $\tau(0) = -3/2$. Il piano osculatore è $Z = 0$, il centro di curvatura è $C(0) = (0, -2, 0)$.

Esercizio 4. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale: $y' + \frac{3y}{t} = 6t^2$. Determinare inoltre la soluzione del problema di Cauchy che corrispondente alla condizione iniziale $y(1) = 2$ e l'intervallo di esistenza. Enunciare il teorema che garantisce l'unicità di tale soluzione.

Risposta:

Soluzione: Soluzione generale: $y = \frac{C_0}{t^3} + t^3$. Soluzione del problema di Cauchy: $y = \frac{1}{t^3} + t^3$.