Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2013/2014
Complementi di Matematica - canale A–K
Appello del 26 febbraio 2015.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Prova sostenuta (barrare): 6 cfu ☐ 3 cfu ☐

Esercizio 0. Per ciascuno dei seguenti quesiti, il candidato è tenuto esclusivamente a indicare la risposta esatta, senza riportare i calcoli eseguiti.

(i) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_R \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

dove R è la regione del piano delimitata dalle curve $x^2+y^2=4, \quad x^2+y^2=9$ (*Suggerimento:* utilizzare coordinate polari).

Soluzione: 2π.

(ii) (6 cfu) Date le rette di $\mathbb{R}^3$

$$r : x = 5, \quad y = z$$

ed

$$s : x = z, \quad y = -z + 1$$

determinare un'equazione cartesiana del piano α contenente r e parallelo ad s.

Soluzione: direzione di s è $\langle(1, -1, 1)\rangle$.
Fascio di piani per r: $x - 5 + h(y - z) = 0$. La condizione $al + bm + cn = 0$ dà $1 - 2h = 0$. Pertanto il piano α ha equazione $2x + y - z - 10 = 0$.

(iii) (6 cfu) Risolvere la seguente equazione vettoriale:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{x} - \mathbf{c} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

dove

$$\mathbf{a} = (1, 2, -1),\ \mathbf{b} = (0, 1, 3),\ \mathbf{c} = (2, 2, 2),\ \mathbf{v} = (-1, 2, -1),\ \mathbf{w} = (-1, -2, -3)$$

e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ è un vettore incognito.

Soluzione: $\mathbf{x} = (7, 2, -3)$.

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x$$

Determinarne l'insieme di definizione e i punti critici e classificarli. Determinare inoltre l'equazione del piano tangente in $(1,0)$.

Soluzione: Derivate parziali:

$$f_x = 2x + y + 1, \quad f_y = 2y + x$$

$P = (-2/3, 1/3)$ è l'unico punto critico. La matrice hessiana è $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Quindi P è un punto di minimo relativo.

$f(1,0) = 2$. Il piano tangente è

$$z = 2 + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)y$$

cioè $3x + y - z - 1 = 0$.

Esercizio 2. (6 cfu) Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:

$$q(x, y, z) = 4xy + 3y^2 + z^2$$

Determinarne la forma canonica di Sylvester e classificarla. Determinare inoltre una base ortonormale che diagonalizza q e la forma diagonale di q in tale base.

Soluzione: La matrice di q è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I suoi autovalori sono $1, -1, 4$. Quindi q è non degenere e indefinita. Forma canonica di Sylvester: $x^2 + y^2 - z^2$.

Base ortonormale diagonalizzante: $\{(0, 0, 1), (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0), (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 0)\}$.

Forma diagonale:

$$q(u, v, w) = u^2 + 4v^2 - w^2$$

Esercizio 3. Si consideri la curva differenziabile

$$\gamma(t) = (1 - \cos(t), \sin(t), t)$$

definita per $t \in \mathbb{R}$. Dopo aver verificato che è una curva regolare, se ne calcoli la velocità in ogni punto. Nel punto $\gamma(0)$ si calcolino l'apparato di Frenet della curva, la sua curvatura e la sua torsione.

Soluzione: $\gamma'(t) = (\sin(t), \cos(t), 1)$, $\quad \gamma''(t) = (\cos(t), -\sin(t), 0)$, $\quad v(t) = \sqrt{2}$.

$$\gamma' \wedge \gamma'' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sin(t) & \cos(t) & 1 \\ \cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} = (\sin(t), \cos(t), -1)$$

$T(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$, $\quad N(0) = (1, 0, 0)$, $\quad B(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$, $\quad \kappa(0) = 1/2$, $\quad \tau(0) = 1/2$.

Esercizio 4. Determinare la soluzione generale della seguente equazione differenziale e il suo insieme di definizione:

$$y' + y\cot(t) = \cos^2(t)$$

Soluzione: Soluzione dell'equazione omogenea associata:

$$y = \frac{C}{\sin t}, \quad C \in \mathbb{R},\ t \neq k\pi$$

Soluzione generale:

$$y = \frac{C}{\sin t} - \frac{1}{3}\frac{\cos^3(t)}{\sin(t)}, \quad C \in \mathbb{R},\ t \neq k\pi$$