Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2013/2014
Complementi di Matematica
Prima prova di valutazione in itinere – 16 Aprile 2014.

Cognome e nome ______________________ **Identificativo**_________

Esercizio 0. Per ciascuno dei seguenti quesiti, il candidato è tenuto esclusivamente a barrare le risposte esatte, senza indicare alcuna motivazione. Ogni risposta esatta dà un punteggio positivo, ogni risposta errata un punteggio negativo, le risposte non date valgono 0.

(i) In $\mathbb{R}^3$ calcolare il prodotto vettoriale $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Risposte: (A) $\begin{pmatrix} 5/2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -5/2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 5/2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Soluzione: (D)

(ii) Calcolare la matrice del prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Risposte: $(A) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $(B) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $(C) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
Soluzione: (C)

(iii) Calcolare l'area del triangolo in $\mathbb{R}^2$ di vertici $P(0,0)$, $Q(1,3)$, $R(-1,-1)$.

Risposte: (A) 0, (B) 2, (C) 3/2, (D) 1.
Soluzione: (D)

(iv) Sia $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita: $F\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = 2x_1y_1 - x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$.
Quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(A) F è un prodotto scalare. (B) F è una forma bilineare simmetrica indefinita.
(C) La forma quadratica associata ad F ha segnatura $(1,-1)$.
Soluzione: (B)

Esercizio 1. Determinare la posizione reciproca delle seguenti rette di $\mathbb{R}^3$ in funzione del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$r : X - 1 = Y - 1 = 1 - Z, \quad s : Y + Z - 2 = 0 = Z + k$$

Motivare la risposta spiegando tutti i passaggi.

Soluzione: La retta r ha vettore di direzione $v_r = (1, 1, -1)$ e la retta s ha vettore di direzione $v_s = (1, 0, 0)$. Quindi le due rette non sono parallele per alcun valore di k. Dopo aver ricavato equazioni cartesiane di $r :\ X - Y = 0 = X + Z - 2$ si vede che la matrice dei coefficienti delle incognite delle equazioni delle due rette è:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed ha evidentemente rango 3 (come deve essere perché r ed s non sono parallele). Ora si considera la matrice completa, che include i termini costanti:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

e si calcola $\det(N) = 0$. Pertanto le due rette sono incidenti per ogni valore di k. Il loro punto in comune è $(k + 2, k + 2, -k)$, come si verifica subito. Si poteva anche osservare direttamente, senza utilizzare la matrice N, che il primo dei due piani che definiscono s appartiene al fascio di asse r in quanto

$$Y + Z - 2 = X + Z - 2 - (X - Y)$$

e quindi $r \cap s$ è l'intersezione di r con il piano $Z + k = 0$.

Esercizio 2. Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base

$$\mathbf{b} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^3$ determinare una base ortogonale rispetto al prodotto scalare standard.

Soluzione: La base $\mathbf{v}$ cercata è: $v_1 = b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$v_2 = b_2 - \frac{b_2 \bullet v_1}{v_1 \bullet v_1} v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = b_3 - \frac{b_3 \bullet v_1}{v_1 \bullet v_1} v_1 - \frac{b_3 \bullet v_2}{v_2 \bullet v_2} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:

$$q(X,Y,Z) = 2X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 - 2XY - 2XZ - 2YZ$$

a) classificare q e determinarne la segnatura. b) trovare una base ortonormale rispetto alla quale q sia diagonalizzata. c) calcolarne l'espressione in tale base. d) Determinare una base di Sylvester e la forma canonica di Sylvester.

Soluzione: La matrice della forma bilineare è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ed il suo polinomio caratteristico è $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = -\lambda(\lambda-3)^2$, e quindi gli autovalori sono $\lambda = 0, 3$ con molteplicità rispettivamente 1 e 2. Pertanto q è semidefinita positiva con segnatura $(2, 0)$.

L'autospazio V_3 ha equazione $X + Y + Z = 0$. Una sua base è evidentemente data da $\{v_1 = (1, -1, 0),\ v_2 = (0, 1, -1)\}$. Applicando Gram-Schmidt si ottiene la coppia di vettori ortogonali tra loro:

$$w_1 = v_1,\ w_2 = (1/2, 1/2, -1)$$

i quali, normalizzati, danno la base ortonormale

$$u_1 = \left\{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), u_2 = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -\sqrt{2/3})\right\}$$

di V_3.

L'autospazio V_0 ha equazioni $-X + 2Y - Z = 0 = -X - Y + 2Z$ e quindi è generato dal versore $u_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Quindi una base ortonormale che diagonalizza q è $\{u_1, u_2, u_3\}$ e in tale base l'espressione di q è:

$$q(X_1u_1 + X_2u_2 + X_3u_3) = 3X_1^2 + 3X_2^2$$

La corrispondente base di Sylvester è

$$\left\{\frac{u_1}{\sqrt{3}}, \frac{u_2}{\sqrt{3}}, u_3\right\}$$

e la forma canonica di Sylvester è $X_1^2 + X_2^2$.