Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2013/2014
Complementi di Matematica
Seconda prova di valutazione in itinere – 14 Giugno 2014.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Esercizio 0. Per ciascuno dei seguenti quesiti, il candidato è tenuto esclusivamente a barrare le risposte esatte, senza indicare alcuna motivazione. Ogni risposta esatta dà un punteggio positivo, ogni risposta errata un punteggio negativo, le risposte non date valgono 0.

(i) *(riservato agli studenti che hanno sostenuto il primo esonero)* Si consideri la conica $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ di equazione $3X^2 + 2XY + 3Y^2 + 2\sqrt{2}\ X - 2\sqrt{2}\ Y = 0$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

Risposte: (A) $\mathcal{C}$ è un'iperbole degenere. (B) $\mathcal{C}$ è un'ellisse non degenere a punti immaginari. (C) $\mathcal{C}$ è un'ellisse non degenere a punti reali. (D) nessuna delle precedenti.
Soluzione: C

(ii) Sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$, e sia $P \in A$. Si considerino le seguenti condizioni:
I) F ha un punto di massimo o minimo relativo, II) il piano tangente al grafico di F è parallelo al piano XY, III) esiste una direzione v in cui la derivata direzionale $D_vF(P)$ è nulla.
Quale delle seguenti affermazioni è vera?
(A) III) $\Longrightarrow$ II), (B) II) $\Longrightarrow$ I), (C) I) $\Longrightarrow$ II) (D) III) $\Longrightarrow$ I).

Risposte: A B C D
Soluzione: C

(iii) Calcolare l'integrale doppio: $\int\int_D \sin(x-y)dxdy$ dove

$$D = \left\{(x,y) : -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, -x \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

Risposte: (A) $\frac{\pi}{2}$, (B) 0, (C) $-\pi$, (D) 2π
Soluzione: B

Esercizio 1. Si consideri la curva parametrizzata $\gamma(t) = (e^t\cos(t), e^t\sin(t), e^t)$. Dopo aver verificato che γ è regolare in tutto $\mathbb{R}$ se ne calcolino velocità, curvatura e triedro di Frenet. Nel punto $\gamma(0)$ si determini un'equazione cartesiana del piano osculatore.

Soluzione: $\gamma'(t) = e^t(\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), 1)$,
$\gamma''(t) = e^t(-2\sin(t), 2\cos(t), 1)$.

$$\gamma'(t)\wedge\gamma''(t) = e^{2t}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos(t)-\sin(t) & \sin(t)+\cos(t) & 1 \\ -2\sin(t) & 2\cos(t) & 1 \end{vmatrix} = e^{2t}(\sin(t)-\cos(t), -(\cos(t)+\sin(t)), 2)$$

Quindi: $v(t) = ||\gamma'(t)|| = e^t\sqrt{3}$,
$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), 1)$;

$$\mathbf{B} = \frac{\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)}{||\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)||} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sin(t) - \cos(t), -(\cos(t) + \sin(t)), 2)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}\wedge\mathbf{T} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sin(t)-\cos(t) & -(\cos(t)+\sin(t)) & 2 \\ \cos(t)-\sin(t) & \sin(t)+\cos(t) & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-(\sin(t)+\cos(t)), \cos(t)-\sin(t), 0)$$

$\kappa(t) = \frac{||\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)||}{v(t)^3} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}$.
Piano osculatore in $\gamma(0) = (1, 0, 1)$: $-X - Y + 2Z - 1 = 0$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$.

a) Determinare il più grande aperto A in cui è definita.

b) Verificare la classe di differenziabilità di f in A e dire se f è derivabile e/o differenziabile in A motivando la risposta.

c) Determinare i punti critici di f e classificarli.

d) Nel punto $(1,1,f(1,1))$ determinare un'equazione del piano tangente e le direzioni in cui la derivata direzionale è massima e minima, e calcolarla, motivando la risposta.

Soluzione: a) $A = \{(x,y) : xy \neq 0\}$.

b) $\nabla f = \left(-\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} + 1\right)$ è di classe $C^\infty(A)$ e quindi f è differenziabile in tutto A.

c) Punto critico $P = (4,2)$.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16x^{-3} & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{pmatrix}$$

$$H_f(4,2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

P è un minimo relativo.

d) Piano tangente: $z + 7x = 17$. Derivata direzionale $D_v f = 7$ massima in corrispondenza di $v = (-1,0)$ e $D_v f = -7$ minima in corrispondenza di $v = (1,0)$.

Esercizio 3. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$\tan(t)y' + y = \cos(t)\sin(t)$$

negli intervalli in cui esiste. Determinare la soluzione del problema di Cauchy corrispondente alla condizione iniziale $y(\pi/2) = 0$ e l'intervallo di esistenza.

Soluzione: Soluzione generale: $y(t) = \frac{C}{\sin(t)} - \frac{1}{3}\frac{\cos^3(t)}{\sin(t)}$ in $t \neq k\pi$. Soluzione di Cauchy: $y(t) = -\frac{1}{3}\frac{\cos^3(t)}{\sin(t)}$ in $(0, \pi)$.