Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 12 (30 Febbraio 2008)
Esercizi di preparazione al secondo esonero

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) Per determinare la formula del cambiamento di coordinate affini, notiamo che se P è un punto che ha coordinate (x, y) nel sistema di riferimento standard e (x', y') nel nuovo sistema di riferimento, allora $\overrightarrow{OP} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$ e $\overrightarrow{O'P} = x' \cdot f_1 + y' \cdot f_2$; inoltre, essendo valida l'uguaglianza vettoriale $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$, saranno uguali anche le coordinate dei vettori espressi rispetto alla base $f = \{f_1, f_2\}$, ovvero $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + M_{f,e}(\mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dove $(c_1, c_2)^t$ sono le coordinate del vettore $\overrightarrow{O'O} = -\overrightarrow{OO'}$ rispetto alla base f; queste ultime sono a loro volta uguali a $M_{f,e}(\mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} -x_{O'} \\ -y_{O'} \end{pmatrix}$, dove $(x_{O'}, y_{O'})$ sono le coordinate del vettore OO' rispetto alla base canonica, ma essendo O l'origine, queste corrisponderanno proprio alle coordinate del punto O'. Riassumendo, abbiamo $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{f,e}(\mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + M_{f,e}(\mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} -x_{O'} \\ -y_{O'} \end{pmatrix}$, cioè in questo caso $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi sviluppando i calcoli abbiamo $\begin{cases} x' = -\frac{x}{5} + \frac{2}{5}y + 1 \\ y' = \frac{2}{5}x + \frac{y}{5} - 2 \end{cases}$.

   (b) Ragionando come sopra, troviamo che $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{cases} x' = 5x - 3y - 7 \\ y' = -3x + 2y + 4 \end{cases}$.

   (c) $\begin{cases} x' = \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}y + \frac{z}{9} - \frac{1}{9} \\ y' = \frac{x}{9}x - \frac{y}{3} + \frac{5}{9}z + \frac{4}{9} \\ z' = \frac{x}{3} - \frac{z}{3} - \frac{2}{3} \end{cases}$.

   (d) $\begin{cases} x' = x + z - 2 \\ y' = x - 1 \\ z' = 2x - y + z - 4 \end{cases}$.

2. (a) Per trovare il nucleo di F, imponiamo $F(x, y, z) = (0, 0, 0)$, ovvero $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, quindi $\ker(F) = (t, s, -s-t) = \langle(1, 0, -1), (0, 1, -1)\rangle$; per determinare l'immagine, innanzi tutto sappiamo dal teorema

rango più nullità che deve avere dimensione 1, quindi per determinarne un generatore è sufficiente trovare l'immagine di un vettore che non appartenga al nucleo, ad esempio $(1,0,0)$: si ha che $Im(F) = \langle F(1,0,0)\rangle = \langle(1,1,1)\rangle$. Per trovare autovalori e autovettori calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica $M_e(F)$, e si ha $-\lambda^3+3\lambda^2$, quindi gli autovalori sono 0 e 3; l'autospazio relativo a 0 coincide col nucleo di F e quindi ha dimensione 2 ed è generato da $(1,0,-1)$ e $(0,1,-1)$, mentre l'autospazio relativo a 3 è generato da $(1,1,1)$; essendo la somma delle dimensioni degli autospazi pari alla dimensione di $\mathbb{R}^3$, abbiamo che F è diagonalizzabile.

(b) Procedendo come sopra, troviamo che $\ker(F) = \{0\}$, quindi deve essere $Im(F) = \mathbb{R}^3$. Il polinomio caratteristico di F è $(\lambda-1)^2(2-\lambda)$, quindi gli autovalori sono 1 e 2: l'autospazio relativo a 2 è $\langle(5,-3,-1)\rangle$, mentre quello relativo a 0 ha come generatore $(1,0,0)$; abbiamo dunque trovato che la molteplicità algebrica dell'autovalore 0 è strettamente maggiore di quella geometrica, quindi concludiamo che F non è diagonalizzabile.

(c) $\ker(F) = \langle(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\rangle$, $Im(F) = \langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle$. Il polinomo caratteristico è $(\lambda^4-4\lambda^3+4\lambda^2) = \lambda^2(\lambda-2)^2$, quindi gli autovalori sono 0 e 2: l'autospazio relativo a 0 coincide col nucleo ed è quindi $\langle(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\rangle$, mentre quello relativo a 2 ha come generatori $(1,0,0,1)$ e $(0,1,1,0)$; entrambi gli autospazi hanno dimensione 2, quindi F è diagonalizzabile.

3. Per trovare gli autovalori di A calcoliamo innanzi tutto il suo polinomio caratteristico: $P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3-3\lambda^2+4 = (1-\lambda)(\lambda+2)^2$; gli autovalori sono quindi 1 e -2, con molteplicità algebrica rispettivamente 1 e 2; calcoliamone i rispettivi autospazi: V_1 : $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \langle(1,1,1)\rangle$, V_{-2} : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow V_{-2} = \langle(1,0,-1),(0,1,-1)\rangle$. Abbiamo quindi che per entrambi gli autovalori le molteplicità algebrica e geometrica coincidono (per $\lambda = 1$ si sapeva già, visto che la molteplicità algebrica era 1) e quindi A è diagonalizzabile. Per trovare una matrice M tale che $M^{-1}\cdot A\cdot M$ è diagonale, conviene considerare l'applicazione lineare F definita da A rispetto alla base canonica, ovvero $A = M_e(F)$; inoltre, essendo $b = \{(1,1,1),(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ una base di autovalori per A, e quindi per F, avremo che $M_b(F)$ è diagonale, ma essendo $M_b(F) = M_{b,e}(\mathbb{I})\cdot M_e(F)\cdot M_{e,b}(\mathbb{I}) = (M_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1}\cdot A\cdot M_{e,b}(\mathbb{I})$, possiamo scegliere $M = M_{e,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$P_B(\lambda) = -\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-4 = (\lambda+1)(-\lambda^2+3\lambda-4)$, quindi B ha l'unico

autovalore reale -1, con molteplicità algebrica 1, quindi l'unico autospazio di B avrà necessariamente dimensione 1 e dunque la matrice non può essere diagonalizzabile. $V_{-1} = \langle(0,1,0)\rangle$.
$P_C(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda = \lambda(\lambda-2)(\lambda+2)^2$, quindi gli autovalori di C sono 0 e ± 2. Gli autospazi di C sono $V_0 = \langle(0,0,1,-1)\rangle$, $V_2 = \langle(1,1,0,0)\rangle$, $V_{-2} = \langle(0,0,1,1)\rangle$; la somma delle dimensioni degli autospazi è minore dell'ordine della matrice e quindi C non è diagonalizzabile.
$P_D(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda-2)^2$, quindi D ha come autovalori 0 e 2, e i rispettivi autospazi sono $\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle$ e $\langle(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\rangle$; la matrice è pertanto diagonalizzabile e una matrice M avente quella proprietà è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Per trovare gli autovalori di A calcoliamo innanzi tutto il suo polinomio caratteristico: $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (1-\lambda)(\lambda+2)^2$; gli autovalori sono quindi 1 e -2, con molteplicità algebrica rispettivamente 1 e 2; calcoliamone i rispettivi autospazi: V_1 : $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \langle(1,1,1)\rangle$, V_{-2} : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow V_{-2} = \langle(1,0,-1),(0,1,-1)\rangle$. Abbiamo quindi che per entrambi gli autovalori le molteplicità algebrica e geometrica coincidono (per $\lambda = 1$ si sapeva già, visto che la molteplicità algebrica era 1) e quindi A è diagonalizzabile. Per trovare una matrice M tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M$ è diagonale, conviene considerare l'applicazione lineare F definita da A rispetto alla base canonica, ovvero $A = M_e(F)$; inoltre, essendo $b = \{(1,1,1),(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ una base di autovalori per A, e quindi per F, avremo che $M_b(F)$ è diagonale, ma essendo $M_b(F) = M_{b,e}(\mathbb{I}) \cdot M_e(F) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I}) = (M_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot A \cdot M_{e,b}(\mathbb{I})$, possiamo scegliere $M = M_{e,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
$P_B(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 4 = (\lambda+1)(-\lambda^2 + 3\lambda - 4)$, quindi B ha l'unico autovalore reale -1, con molteplicità algebrica 1, quindi l'unico autospazio di B avrà necessariamente dimensione 1 e dunque la matrice non può essere diagonalizzabile. $V_{-1} = \langle(0,1,0)\rangle$.
$P_C(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda = \lambda(\lambda-2)(\lambda+2)^2$, quindi gli autovalori di C sono 0 e ± 2. Gli autospazi di C sono $V_0 = \langle(0,0,1,-1)\rangle$, $V_2 = \langle(1,1,0,0)\rangle$, $V_{-2} = \langle(0,0,1,1)\rangle$; la somma delle dimensioni degli autospazi è minore dell'ordine della matrice e quindi C non è diagonalizzabile.
$P_D(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda-2)^2$, quindi D ha come autovalori 0 e 2, e i rispettivi autospazi sono $\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle$ e $\langle(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\rangle$; la matrice è pertanto diagonalizzabile e una matrice M avente quella pro-

prietà è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} k+1-\lambda & -k & -1 \\ k & 1-k-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda - 1)^2$: per discutere la diagonalizzabilità è quindi sufficiente discutere la dimensione dell'autospazio relativo a 1: questa sarà pari a 2 se e solo se la matrice $A - 1 \cdot \mathbb{I}_3$ ha rango 1, quindi A sarà diagonalizzabile solo in questo caso. Si ha che $A - \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} k & -k & -1 \\ k & -k & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: questa matrice ha rango 1 se e solo se $k = 0$, infatti se $k = 0$ le prime due righe sono nulle, altrimenti il minore 2×2 formato dalle ultime due righe e dalle ultime due colonne è non nullo. Si ha quindi che A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow k = 0$.
$P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -k & 1 & k-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 - k\lambda^3 - \lambda^2 + k\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - k)$, quindi se $0 \neq k \neq \pm 1$ ci sono quattro autovalori distinti e quindi la matrice è diagonalizzabile. Consideriamo ora il caso $k = 0$: per vedere se è diagonalizzabile o meno, basterà trovare la dimensione dell'autospazio relativo a 0: si ha che $B - 0 \cdot \mathbb{I}_4 = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, che ha chiaramente rango 3 (il minore formato dalla prime tre righe e ultime tre colonne è diverso da zero); quindi l'autospazio associato a 0 ha dimensione 1 e quindi B non è diagonalizzabile. Se $k = 1$, analogamente studieremo la dimensione dell'autospazio relativo a 1: in questo caso si ha $B - 1 \cdot \mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 3, quindi anche in questo caso B non è diagonalizzabile. Se infine $k = -1$, come sopra troviamo che $B + \mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha anch'essa rango 3, quindi neppure in questo caso la matrice è diagonalizzabile. Riassumendo, abbiamo che B è diagonalizzabile $\Leftrightarrow k \notin \{-1, 0, 1\}$.

6. Cominciamo con l'osservare che ad una retta $r : (a_{11} + ia_{21})x + (a_{12} + ia_{22})y + (c_1 + ic_2) = 0$ a coefficienti complessi sono associate due rette a coefficienti reali $r_1 : a_{11}x + a_{12}y + c_1 = 0$ ed $r_2 : a_{21}x + a_{22}y + c_2 = 0$. Inoltre per vedere se la retta r ha punti reali basterà semplicemente vedere se il sistema $r_1 \cap r_2$ è compatibile o meno; nel caso in cui lo sia se il sistema ammette un'unica soluzione (il rango della matrice $A := (a_{ij})_{i,j=1,2}$ è massimo) allora r avrà un unico punto reale mentre se il sistema ammette

∞^1 soluzioni vuol dire che la retta r è in realtà una retta reale (tutti i suoi punti sono reali).

(a) il sistema associato alla retta r è dato da $\begin{cases} 2x + 2y + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ che ammette un'unia soluzione data da $(0, -frac12)$; il sistema ssociato alla retta s è $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$ che ammette un'unia soluzione data da $(-1, 1)$. La retta che congiunge i due punti è data da $\frac{3}{2}x - y - \frac{1}{2} = 0$.

(b) il sistema associato alla retta r è dato da $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$, il sistema risulta quindi essere incompatibile, in altre parole la retta non ha punti reali ma solo complessi; il sistema associato alla retta s è dato da $\begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ 3x + y + 1 = 0 \end{cases}$ che ovviamente ammette ∞^1 soluzioni, quindi la retta s è in reltà una retta reale.

(c) il sistema associato alla retta r è dato da $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ -x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$ che ammette un'unia soluzione data da $(1, 1)$; il sistema associato alla retta s è dato da $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ che ammette un'unia soluzione data da $(-\frac{2}{3}, frac43)$; La retta che congiunge i due punti è data da $\frac{3}{2}\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}y - 2 = 0$.

7. (a) Affinché le due rette siano complanari, è necessario e sufficiente che il determinante della matrice orlata sia nullo, ovvero $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 3h + 3$, quindi le rette sono complanari $\Leftrightarrow h = -1$; notiamo poi che la matrice dei coefficienti ha rango 3 (ad esempio, il minore formato dalle prime tre righe e dalle prime tre colonne ha determinante non nullo), quindi le rette sono incidenti; per trovare il punto di intersezione è sufficiente risolvere il sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ y - z = 0 \\ z = 1 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ e si ottiene il punto $(2, 1, 1)$. Per determinare un piano comune ad entrambe, imponiamo che esso appartenga sia al fascio passante per r che a quello per s, ovvero che per certi α, β, γ, δ si abbia $\alpha(x+y-3)+\beta(y-z) = \gamma(z-1)+\delta(x-2z)$: uguagliando i coefficienti delle tre incognite e dei termini noti otteniamo che $\alpha = \delta$,$\beta = -\delta$ e $\gamma = 3\delta$, quindi fissando $\delta = 1$ otteniamo il piano $x + z - 3$.

(b) Ragionando come sopra, otteniamo che il determinante della matrice 4×4 è $-3h + 6$, quindi le rette sono complanari per $h = 2$. Notiamo che per questo valore la matrice dei coefficienti ha rango due, visto che la terza riga è la differenza delle prime due mentre la quarta è la loro somma, quindi le rette sono parallele; per determinarne il piano che le contiene, procediamo come nel punto precedente, ovvero troviamo gli α, β, γ, δ per cui $\alpha(x+y)+\beta(x-z-3) = \gamma(y+z)+\delta(2x+y-z)$

e troviamo $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 1$, quindi il piano che contiene entrambe le rette è $2x + 2y = 0$, cioè $x + y = 0$.

(c) Procedendo come nei due casi precedenti, troviamo che le due rette sono complanari $\Leftrightarrow h = 0$ e per questo valore le rette sono incidenti in quanto la matrice dei coefficienti ha rango 3 (ad esempio, il minore formato dalle prime tre righe e dalle prime tre colonne è diverso da zero). Il piano che contiene le due rette e il loro punto di intersezione si trovano analogamente a sopra, e si trova rispettivamente $y = 0$ e $(1, 0, -\frac{1}{2})$.

8. Mostriamo innanzitutto che gli autospazi sono in somma diretta (fatto vero anche per applicazioni non diagonalizzabili): infatti, se $v \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$, allora $F(v) = \lambda_1 \cdot v = \lambda_2 \cdot v \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot v = 0_V$, ma essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, deve essere $v = 0_V$, quindi $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0_V\}$. A questo punto è sufficiente dimostrare che $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_n} = V$: sicuramente si avrà che $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_n} \subseteq V$, perché tutti gli autospazi sono sottospazi di V e quindi lo sarà anche la loro somma; inoltre, per la formula di Grassmann abbiamo che $\dim(V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2}) = \dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_2}) - \dim(V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}) = \dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_2})$ e quindi, iterando il procedimento per tutti gli autospazi, avremo che $\dim(V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_n}) = \dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_2}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_n})$. Se adesso supponiamo che F sia diagonalizzabile, abbiamo che $\dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_2}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_n}) = \dim(V)$, quindi abbiamo che $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_n}$ è un sottospazio di V avente la stessa dimensione di V, ma allora deve essere necessariamente $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_n} = V$, e quindi si ha l'asserto.

9. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ una matrice di ordine n unitriangolare superiore. Il suo polinomo caratteristico è $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^n$. La matrice ha quindi 1 come unico autovalore, quindi è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ l'autospazio relativo a 1 ha dimensione n. Ciò equivale a dire che $r(A - \mathbb{I}_n) = 0$, ovvero $A - \mathbb{I}_n = 0_n$, cioè $A = \mathbb{I}_n$, quindi A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow A = \mathbb{I}_n$.
Nel caso di matrici strettamente triangolari inferiori la dimostrazione è analoga: basta considerare ${}^tA$ al posto di A e ripetere lo stesso identico ragionamento.

10. Notiamo innanzitutto che F è iniettiva $\Leftrightarrow \ker(F) = \{0\}$ e G è suriettiva $\Leftrightarrow Im(G) = W$. Allora, applicando il teorema rango più nullità prima a G e poi a F, si ha che $\dim V = \dim(\ker(G)) + \dim(Im(G)) = \dim(Im(F)) + \dim W = \dim U - \dim(\ker(F)) + \dim W = \dim U + \dim W$.