Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

Soluzioni del tutorato numero 3 (12 Marzo 2008)
Sottospazi vettoriali, generatori, dipendenza lineare, basi

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck
http://www.mat.uniroma3.it

1. (a) $\exists!$ soluzione: $(-2,1,1)$.
   (b) $\exists\ \infty^1$ soluzioni del tipo $(t+1, -\frac{(t-1)}{3}, t)$.
   (c) il sistema è incompatibile.
   (d) $\exists\ \infty^2$ soluzioni del tipo $(s, -\frac{(2s+t-1)}{3}, -s-2t, t)$

2. Mostriamo innanzi tutto che $K[X]$ è uno spazio vettoriale su K: è un sottoinsieme di $A := \{f : K \to K\}$ che, come abbiamo visto nel primo tutorato, è uno spazio vettoriale; inoltre, moltiplicando un polinomio per uno scalare o sommando due polinomi si ottiene sempre un polinomio, quindi $K[X]$ è un sottospazio di A, cioè è a sua volta uno spazio vettoriale.
   Per mostrare che $K[X]$ non ha dimensione finita, notiamo innanzitutto che se una esistesse una base finita di dimensione n, qualsiasi insieme di n vettori indipendenti genererebbe lo spazio. Consideriamo quindi l'insieme $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\} \in K[X]$; si tratta di vettori linearmente indipendenti: infatti, per il principio di identità dei polinomi, $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i$ e quindi, se $K[X]$ avesse una base finita, esisterebbe un n tale che quell'insieme è una base. Tuttavia, per ogni n si ha che X^{n+1} non è combinazione lineare di quei vettori; infatti, se così non fosse, per opportuni a_i si avrebbe che $X^{n+1} = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 = 0$, che contraddice il suddetto principio d'identità dei polinomi. Quindi $K[X]$ non ha dimensione finita.
   Mostriamo che Π_n è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare: $(a_0 + a_1X + \ldots a_nX^n) + (b_0 + b_1X + \ldots b_nX^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \ldots (a_n + b_n)X^n$, $k \cdot (a_0 + a_1X + \ldots a_nX^n) = (k \cdot a_0) + (k \cdot a_1)X + \ldots (k \cdot a_n)X^n$.
   Si ha poi che l'insieme $\{1, X, X^2, \ldots X^n\}$ è una base di Π_n: infatti, ogni polinomio del tipo $a_0+a_1X+\ldots a_nX^n$ ha coordinate $(a_0, a_1, \ldots a_n)$ rispetto a questi vettori (la loro indipendenza è stata vista in precedenza). Poiché questa base ha $n+1$ elementi, $\dim \Pi_n = n+1$.

3. Innanzi tutto, notiamo che $\mathbb{Q}(i)$ e $\mathbb{R}$ sono due campi contenenti $\mathbb{Q}$ e quindi, per quanto visto al primo tutorato, sono entrambi dei $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali. Cerchiamo ora la loro dimensione:

   (a) L'insieme $\{1, i\}$ è una base di $\mathbb{Q}(i)$ (si verifica immediatamente sia che generano lo spazio sia che sono indipendenti). Quindi, $\mathbb{Q}(i)$ ha dimensione 2.

(b) Consideriamo l'insieme $\{1, \pi, \pi^2, \ldots, \pi^n\}$: si tratta di vettori linearmente indipendenti, in quanto $a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \cdots + a_n\pi^n = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i$, in quanto π è trascendente; quindi, per quanto osservato nel primo esercizio, se $\mathbb{R}$ avesse dimensione finita, esisterebbe un n per cui quell'insieme è un sistema di generatori. Tuttavia, notiamo che π^{n+1} non appartiene al sottospazio generato da quei vettori: infatti, se vi appartenesse, per opportuni a_i si avrebbe che $\pi^{n+1} = a_n\pi^n + \cdots + a_1\pi + a_0 \Leftrightarrow$, che contraddice la suddetta trascendenza di π. Quindi $\mathbb{R}$ non ha dimensione finita su $\mathbb{Q}$.

4. (a) È un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

   (b) NON è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché, ad esempio, contiene $(1, 0, 0)$ ma non $(2, 0, 0)$.

   (c) Notiamo che se $a, b \in \mathbb{R}$ si ha che $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 = b$, quindi il sottoinsieme si può riscrivere come $\{(x, y, z) : x = 0, y = 0\}$ e quindi, essendo l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, è un sottospazio vettoriale.

   (d) NON è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ perché, ad esempio, contiene $(1, 0, 0)$ ma non $(2, 0, 0)$.

   (e) È un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

   (f) NON è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ perché, ad esempio, contiene $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ ma non $(1, 0, 1)$.

5. (a) Verifichiamo l'indipendenza lineare dei vettori: cerchiamo una combinazione lineare del tipo $a(2, -1, 1) + b(2, -2, 1) + c(3, 0, 1) = 0$, ovvero $\begin{cases} 2a + 2b + 3c = 0 \\ -a - 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$; poiché l'unica soluzione di questo sistema è $(0, 0, 0)$, si ha che l'unica combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 che da il vettore nullo ha tutti i coefficienti nulli, quindi i vettori sono linearmente indipendenti. Essendo 3 vettori indipendenti, costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Per trovare una combinazione lineare che che dia come risultato $a(2, -1, 1) + b(2, -2, 1) + c(3, 0, 1) = (1, 1, 1)$, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2a + 2b + 3c = 1 \\ -a - 2b = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

. L'unica soluzione è $(5, -3, -1)$, quindi $(1, 1, 1) = 5v_1 - 3v_2 - v_3$.

   (b) Sono linearmente dipendenti e quindi, essendo 3, non generano $\mathbb{R}^3$. Si ha $v_2 = 5v_1 - 2v_3$, ovviamente $(1, 1, 1) \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

   (c) Sono più di 3 vettori, quindi sono linearmente dipendenti; per verificare se generano $\mathbb{R}^3$, proviamo a scrivere un generico vettore $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ come combinazione lineare dei vettori $(x, y, z) = a(1, 1, 0) + b(0, 2, 1) +$

$c(3,0,2)+d(1,4,2)$, ovvero $\begin{cases} a+3c+d=x \\ a+2b+4d=y \\ b+2c+2d=z \end{cases}$; poiché questo sistema ha soluzioni per qualsiasi valore di (x,y,z) (che considereremo parametri nella risoluzione del sistema), abbiamo che ogni vettore può essere scritto come combinazione lineare dei nostri 4 vettori di partenza, che quindi sono un sistema generatori. Si ha inoltre che $v_3 = -4v_1 - 12v_2 + 7v_4$, inoltre $(1,1,1) = -v_1 - 3v_2 + 2v_4$.

(d) Sono meno di 3 vettori, quindi non possono generare $\mathbb{R}^3$, ma sono linearmente indipendenti. Inoltre, si ha $(1,1,1) = \frac{2}{3}v_1 - 1v_2$