Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2010/2011
GE110 – Geometria 1, Algebra Lineare
Appello B – 14 Luglio 2011

Esercizio 1. (13 Pt.) Nello spazio affine $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ siano (x, y, z) le coordinate del generico punto rispetto al riferimento affine standard. Per ogni $h \in \mathbf{R}$, si considerino i piani $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}$ di equazioni cartesiane $hx+(h+1)y+(h+2)z = 1$, $hx+(h-1)y+(h-2)z = 1$, $x+y+z = h$, rispettivamente.

(i) Si determinino i valori di h per cui $\mathcal{R} := \mathcal{K} \cap \mathcal{L} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$ e, per ciascuno di tali valori, si calcoli $\dim(\mathcal{R})$.

Da adesso in avanti, sia $h = 1$.

(ii) Dopo aver verificato che $\mathcal{R}$ è la retta per $(1, 0, 0)$ e $(2, -2, 1)$, si trovi il più piccolo sottospazio affine di $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ contenente $\mathcal{R}$ e la retta $\mathcal{S}$ di equazioni cartesiane $y = z = 0$.

(iii) Si determini il più piccolo sottospazio affine di $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ contenente $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ e la retta $\mathcal{T}$ di equazioni cartesiane $x = z = 0$.

Esercizio 2. (12 Pt.) Si consideri la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e sia $\varphi : M_2(\mathbf{R}) \longrightarrow M_2(\mathbf{R})$ l'applicazione definita ponendo $\varphi(X) := AX$, per ogni $X \in M_2(\mathbf{R})$.

(i) Si verifichi che φ è un'applicazione lineare, e si determini $M_{\mathcal{F}\mathcal{F}}(\varphi)$, dove

$$\mathcal{F} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(ii) Si dica se φ è un automorfismo e, in tale caso, si trovi $M_{\mathcal{F}\mathcal{F}}(\varphi^{-1})$.

(iii) Si determini una base per ciascun autospazio di φ e, dopo aver stabilito se φ è diagonalizzabile, si esibisca, se esiste, una matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbf{R})$ tale che $P^{-1} M_{\mathcal{F}\mathcal{F}}(\varphi) P$ è diagonale.

Esercizio 3. Si risolvano le seguenti questioni, con un argomento chiaro e conciso.

(i) (3 Pt.) Sia $A \in M_3(\mathbf{R})$ e B la matrice ottenuta da A scambiando la prima e la terza colonna. Si esibisca, se esiste, una matrice $U \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ tale che $AU = B$.

(ii) (3 Pt.) Sia X un $\mathbf{R}-$spazio vettoriale e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$. E' vero che

$$< \mathbf{x} + 2\mathbf{y}, \mathbf{x} + 3\mathbf{y} >=< \mathbf{x}, \mathbf{y} > ?$$

(iii) (3 Pt.) Sia $\varphi : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ un endomorfismo. Sapendo che il polinomio caratteristico di φ è $p(T) := -(T-1)^3$ e che $\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, si stabilisca se φ è diagonalizzabile.