Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Filippo Maria Bonci, Annamaria Iezzi e Maria Chiara Timpone

TUTORATO 8 (19 MAGGIO 2011)
OMOTOPIA ED APPLICAZIONI CONTINUE

1. Dimostrare che se $Y \subset \mathbb{R}^n$ è convesso allora, per ogni spazio X, tutte le applicazioni continue $f : X \to Y$ sono tra loro omotope.
   Sotto le stesse ipotesi dimostrare, inoltre, che se $A \subset X$ e $f, g : X \to Y$ sono tali che $f(a) = g(a)$, $\forall\, a \in A$, allora $f \simeq_{relA} g$.

2. (a) Considerare il luogo $X \subset \mathbb{R}^2$ definito in coordinate polari da:
   $$X = \{(\rho, \vartheta) : 1 \le \rho \le 2\}$$
   Dimostrare che è compatto e connesso per archi. Considerare gli archi $a, b : I \to X$ (in coordinate ordinarie):
   $$a(s) = (cos2\pi s, sin2\pi s), \quad b(s) = (2cos2\pi s, 2sin2\pi s)$$
   Dopo aver osservato che sono cappi definire una omotopia tra a e b in X. E' possibile definire un'equivalenza tra a e b?
   Ripetere l'esercizio considerando gli archi $c(s) = (1 + s, 0)$, $d(s) = (0, 1 + s)$.
   (b) Considerare lo spazio quoziente $Y := X/\sim$, dove $\sim$ è la relazione che identifica $a(I)$ a un punto. Dimostrare che il cappio $b' : I \to Y$, immagine in Y del cappio b, è equivalente al cappio costante.
   (c) Considerare lo spazio quoziente $Z := X/@$ dove @ è la relazione di equivalenza che identifica $a(I)$ a un punto e $b(I)$ a un punto. Dimostrare che le immagini degli archi c e d in Z sono equivalenti.
   (d) Dimostrare che Z è una superficie e classificarla.

3. Sia $f : S^n \to S^n$ l'applicazione antipodale, ossia $f(x) = -x$. Dimostrare che, se n è dispari, allora f è omotopa all'identità.

4. Si mostri che un disco aperto centrato nell'origine e privato dell'origine è omotopicamente equivalente a una circonferenza. E' anche omeomorfo a una circonferenza?

5. Mostrare che ogni sottospazio stellato di $\mathbb{R}^n$ è contraibile.

6. Sia X uno spazio topologico e siano α, β, γ cappi di base x_0 tali che $\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma$. Provare che se X è di Hausdorff allora α, β, γ sono costanti.

7. Siano X e Y spazi topologici omotopicamente equivalenti. Dimostrare che X è connesso per archi se e solo se Y lo è.