GE510 A.A. 2016/2017

Contents

1. Limiti induttivi e limiti proiettivi

Sia $(I, \leq)$ un *insieme parzialmente ordinato*. Lo diremo *filtrante* oppure *diretto* se per ogni $i, j \in I$ esiste $k \in I$ tale che $i \leq k$ e $j \leq k$.

Sono **esempi** di insiemi parzialmente ordinati filtranti $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ e $\mathcal{P}(X)$, l'insieme delle parti di un insieme $X \neq \emptyset$, rispetto alla relazione $\subseteq$. Se $x \in X$ allora l'insieme $\mathcal{U}_x$ dei sottoinsiemi $U \subset X$ contenenti x è filtrante rispetto alla relazione di contenimento $\supseteq$.

Possiamo considerare $(I, \leq)$ come una categoria i cui oggetti sono gli $i \in I$ e $\operatorname{Hom}(i, j)$ consiste di un solo elemento oppure è vuoto a seconda che $i \leq j$ oppure $i \not\leq j$.

Un *sistema induttivo in una categoria* $\mathcal{A}$ *indicizzato da* $(I,\leq)$ è un funtore covariante

$$F:(I,\leq)\longrightarrow \mathcal{A}$$

Più esplicitamente consiste del dato di oggetti $F(i)=A_i\in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}),\ i\in I$ e di un morfismo $F(i\leq j)=f_{ji}:A_i\to A_j$ per ogni $i\leq j$ in modo che si abbia

$$f_{ii}=1_{A_i}$$

per ogni $i\in I$ e un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "f_{ji}"] \arrow[dr, "f_{ki}"'] & & A_j \arrow[dl, "f_{kj}"] \\ & A_k & \end{tikzcd}$$

per ogni $i\leq j\leq k$. Il *sistema induttivo* $\{A_i,f_{ji}\}_{i\in I}$ si dirà *filtrante* se $(I,\leq)$ è filtrante.

Se $\mathcal{A}=Ins$, risp. (Ab, An, ecc.) parleremo di un sisterma induttivo di insiemi (risp. gruppi abeliani, anelli commutativi, ecc.).

Una famiglia $\{\psi_i:A_i\to B\}_{i\in I}$ di morfismi in $\mathcal{A}$ si dirà *compatibile* con il sistema induttivo se è commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "f_{ji}"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & A_j \arrow[dl, "\psi_j"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

per ogni $i\leq j$. Un famiglia compatibile $\{\phi_i:A_i\to A\}_{i\in I}$ si dice un *limite induttivo* del sistema induttivo dato se per ogni altra famiglia compatibile $\{\psi_i:A_i\to B\}_{i\in I}$ esiste un unico morfismo $\chi:A\to B$ che rende commutativi tutti i diagrammi seguenti:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "f_{ji}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & A_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\ & A \arrow[d, "\chi"] & \\ & B & \end{tikzcd}$$

Un limite induttivo, se esiste, è unico a meno di isomorfismo unico, e si denota

$$\varinjlim_{i\in I} A_i,\ \text{oppure}\ \varinjlim F$$

.

Esercizio 1.1. Verificare che il *limite induttivo* di un sistema induttivo di insiemi $\{A_i, f_{ji}\}_{i\in I}$ è l'insieme quoziente

$$\varinjlim_{i\in I} A_i := \frac{\coprod_{i\in I} A_i}{\equiv}$$

in cui due elementi $a_i \in A_i$ ed $a_j \in A_j$ si considerano equivalenti se e solo se esiste $k \in I$ tale che $i \leq k$, $j \leq k$ e $f_{ki}(a_i) = f_{kj}(a_j)$. Quindi in particolare esiste.

Se $\{A_i, f_{ji}\}$ è un sistema induttivo filtrante di gruppi abeliani (risp. anelli commutativi) allora $\lim_{\rightarrow} A_i$ esiste, ma si costruisce in modo leggermente diverso. Un caso particolare è il seguente.

Esercizio 1.2. Sia $\{A_i, f_{ji}\}_{i\in I}$ un sistema induttivo filtrante di insiemi (risp. gruppi abeliani, anelli commutativi) e supponiamo che esista S (insieme, ecc.) tale che $A_i \subset S$ per ogni $i \in I$ e che per ogni $i \leq j$ l'applicazione (risp. omomorfismo) $f_{ji} : A_i \to A_j$ sia un'inclusione. Allora il limite induttivo esiste e si ha

$$\varinjlim_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i$$

Esercizio 1.3. L'insieme parzialmente ordinato $(I, \leq)$ si dirà *discreto* se $i \not\leq j$ per ogni $i \neq j$. Se $(I, \leq)$ è discreto un sistema induttivo $F : (I, \leq) \to \mathcal{A}$ è nient'altro che il dato di oggetti $A_i = F(i) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Se $\mathcal{A} = \mathrm{Ins}$ allora

$$\varinjlim F = \coprod_{i\in I} A_i$$

Se $\mathcal{A} = Ab$ allora

$$\varinjlim F = \bigoplus_{i\in I} A_i$$

La nozione duale è la seguente. Sia $(I, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. *Un sistema proiettivo in $\mathcal{A}$ indicizzato da* $(I, \leq)$ è un funtore contravariante:

$$F : (I, \leq) \longrightarrow \mathcal{A}$$

Più concretamente esso consiste di una famiglia di oggetti $\{F(i) = A_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})\}_{i\in I}$ e da un morfismo

$$f_{ji} : A_i \longrightarrow A_j$$

per ogni $i \geq j$ in modo che $f_{ii} = 1_{A_i}$ per ogni $i \in I$ e

$$f_{kj} f_{ji} = f_{ki}$$

per ogni $k \leq j \leq i$.

Se $\mathcal{A} = Ins, Ab, An$ parleremo di un *sistema proiettivo di insiemi (risp. gruppi abeliani, anelli commutativi)* indicizzato da $(I, \leq)$.

Una famiglia di morfismi $\{\psi_i : B \to A_i\}_{i\in I}$ si dirà *co-compatibile* con il sistema proiettivo dato se è commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\psi_j"'] \arrow[dr, "\psi_i"] & \\ A_i \arrow[rr, "f_{ji}"] & & A_j \end{tikzcd}$$

per ogni $i \geq j$. Una famiglia co-compatibile $\{\phi_i : A \to A_i\}_{i\in I}$ si dice un *limite proiettivo* del sistema proiettivo dato se per ogni altra famiglia co-compatibile $\{\psi_i : B \to A_i\}_{i\in I}$ esiste un unico $\zeta : B \to A$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "\zeta"] \arrow[ddl, "\psi_i"'] \arrow[ddr, "\psi_j"] & \\ & A \arrow[dl, "\phi_i"] \arrow[dr, "\phi_j"'] & \\ A_i \arrow[rr, "f_{ji}"'] & & A_j \end{tikzcd}$$

per ogni $i \geq j$. Se un limite proiettivo esiste allora è unico, a meno di isomorfismo unico, e si denota

$$\varprojlim_{i\in I} A_i = \varprojlim F$$

Esercizio 1.4. Il limite proiettivo di un sistema proiettivo $\{A_i, f_{ji}\}_{i\in I}$ di insiemi esiste ed è l'insieme

$$\varprojlim A_i = \{(s_i) \in \prod_i A_i : f_{ji}(s_i) = s_j \text{ per ogni } i \geq j\}$$

Quindi mentre il limite induttivo è un quoziente dell'unione degli A_i, il limite proiettivo è un sottoinsieme del prodotto.

I limiti induttivi e proiettivi possono anche essere calcolati su sottosistemi cofinali. Precisamente:

Definizione 1.5. Dato un insieme parzialmente ordinato $(I, \leq)$ un suo sottoinsieme J si dice *cofinale* se per ogni $i \in I$ esiste $j \in J$ tale che $i \leq j$.

Lemma 1.6. *Se $\{A_i, f_{ji}\}_{i\in I}$ è un sistema induttivo di insiemi, gruppi abeliani, ecc., e $J \subset I$ è un sottoinsieme cofinale allora, se esistono,*

$$\varprojlim_{i\in I} A_i = \varprojlim_{j\in J} A_j$$

e

$$\varinjlim_{i\in I} A_i = \varinjlim_{j\in J} A_j$$

Dimostrazione. Esercizio □

Esempio 1.7. Sia Y uno spazio topologico e sia $\mathcal{T}$ la famiglia degli aperti di Y. Allora $(\mathcal{T}, \subseteq)$ è un insieme parzialmente ordinato. Un funtore contravariante

$$F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$$

è un *prefascio* su Y a valori in $\mathcal{A}$.

Se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ è una base della topologia allora anche $(\mathcal{B}, \subseteq)$ è un insieme parzialmente ordinato.

2. Prefasci e fasci

Il concetto di fascio è fondamentale in geometria algebrica. In questo paragrafo raccogliamo alcuni fatti importanti di teoria dei fasci.

Sia Y uno spazio topologico e $\mathcal{B} = \{U_i\}_{i\in I}$ una base della topologia di Y. Un *prefascio* di insiemi su $\mathcal{B}$ consiste di insiemi $\{\mathcal{F}(U_i)\}_{i\in I}$ ed un'applicazione

$$\rho^{U_i}_{U_j} : \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \mathcal{F}(U_j)$$

per ogni inclusione $U_j \subset U_i$, in modo che si abbia:

- $\rho^{U_i}_{U_i} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U_i)}$ per ogni $i \in I$.
- $\rho^{U_j}_{U_k}\rho^{U_i}_{U_j} = \rho^{U_i}_{U_k}$ per ogni $U_k \subset U_j \subset U_i$.

In modo simile si dà la definizione di prefascio di gruppi abeliani (risp. anelli commutativi) su $\mathcal{B}$. Più in generale un prefascio su $\mathcal{B}$ a valori in una categoria $\mathcal{A}$ è un funtore contravariante

$$(\mathcal{B}, \subseteq) \longrightarrow \mathcal{A}$$

Un prefascio di insiemi su $\mathcal{B}$ si dice un *fascio su* $\mathcal{B}$ se soddisfa la seguente condizione:

(C) Se $U \in \mathcal{B}$ e $\{U_h\}_{h\in H}$ è un ricoprimento di U con aperti di $\mathcal{B}$, allora per ogni $(s_h) \in \prod_h \mathcal{F}(U_h)$ tale che si abbia

$$\rho^{U_h}_{U_{hk}}(s_h) = \rho^{U_k}_{U_{hk}}(s_k)$$

per ogni $U_{hk} \in \mathcal{B}$ contenuto in $U_h \cap U_k$, esiste un unico $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che

$$\rho^U_{U_h}(s) = s_h$$

per ogni $h \in H$.

Se come base $\mathcal{B}$ si prende la famiglia di tutti gli aperti di Y allora si parlerà di prefasci e fasci su Y.

Proposizione 2.1. *Supponiamo che $\mathcal{B}$ sia una base della topologia dello spazio Y e $\mathcal{F}$ sia un prefascio di insiemi su $\mathcal{B}$. Allora esiste un unico prefascio di insiemi $\mathcal{G}$ su Y tale che $\mathcal{G}(U) = \mathcal{F}(U)$ per ogni $U \in \mathcal{B}$. Se $\mathcal{F}$ è un fascio su $\mathcal{B}$ allora $\mathcal{G}$ è un fascio su Y.*

Dimostrazione. Per ogni aperto $\emptyset \neq U \subset Y$ definiamo

$$\mathcal{G}(U) = \varprojlim_{U \supset V \in \mathcal{B}} \mathcal{F}(V) = \{(s_V) : \rho^V_W(s_V) = s_W,\ \forall W \subset V\} \subset \prod_{U \supset V \in \mathcal{B}} F(V)$$

dove il limite è preso sul sistema proiettivo $(\{U_i : U_i \in \mathcal{B}, U_i \subset U\}, \rho^{U_i}_{U_j})$. Per ogni $U' \subset U$ la restrizione

$$\rho^U_{U'} : \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U')$$

è l'applicazione indotta dalla proiezione:

$$\prod_{U \supset V \in \mathcal{B}} F(V) \longrightarrow \prod_{U' \supset V \in \mathcal{B}} F(V)$$

Si verifica subito che $\mathcal{G}$ è un prefascio e non è difficile dimostrare che è un fascio se $\mathcal{F}$ è un fascio. $\square$

Definizione 2.2. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio di insiemi sulla base $\mathcal{B}$ dello spazio Y e sia $p \in X$. Definiamo la *spiga* di $\mathcal{F}$ in p come l'insieme:

$$\mathcal{F}_p := \varinjlim_{U \in \mathcal{B}_p} \mathcal{F}(U)$$

dove il limite induttivo è preso rispetto al sistema induttivo filtrante $\mathcal{B}_p$ di tutti gli aperti di $\mathcal{B}$ contenenti p, rispetto alla relazione $\supseteq$ e rispetto alle restrizioni ρ^U_V. Gli elementi di $\mathcal{F}_p$ si chiamano *germi*. Ad ogni $U \in \mathcal{B}_p$ e ad ogni $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ resta associato un elemento $\sigma_p \in \mathcal{F}_p$, chiamato il *germe di* σ. Se $\tau \in \mathcal{F}(V)$ per un altro $V \in \mathcal{B}_p$ allora $\sigma_p = \tau_p$ se e solo se esiste $W \in \mathcal{B}_P$ tale che $W \subset U \cap V$ e $\rho^U_W(\sigma) = \rho^V_W(\tau)$.

Se $\mathcal{F}$ è un prefascio di gruppi abeliani, di anelli, ecc. allora su $\mathcal{F}_p$ viene indotta una struttura di gruppo abeliano, di anello, ecc..

3. Alcune nozioni sui fasci

Fissiamo uno spazio topologico Y con topologia T e siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due prefasci su Y, a valori in una categoria $\mathcal{A}$. Un omomorfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è il dato di un morfismo:

$$\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

per ogni aperto U di Y, in modo che per ogni inclusione di aperti $V \subseteq U$ il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho^U_V"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^U_V"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"'] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Se pensiamo $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ come funtori contravarianti da $(\mathrm{T}, \subseteq)$ ad $\mathcal{A}$, allora l'omomorfismo φ è nient'altro che una trasformazione naturale da $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$. In modo ovvio si definisce la *composizione* di due omomorfismi di prefasci a valori in $\mathcal{A}$:

$$\psi \circ \varphi : \; \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia una delle categorie Ins, *Ab*. Dato un omomorfismo di prefasci $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ per ogni $p \in Y$ resta indotto un morfismo delle spighe in p:

$$\varphi_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$$

che è definito nel modo seguente. Sia $\sigma_p \in \mathcal{F}_p$ e sia $U \subset Y$ un intorno aperto di p tale che esista un rappresentante $\sigma_U \in \mathcal{F}(U)$ di σ_p; allora definiamo $\varphi_p(\sigma_p) \in \mathcal{G}_p$ come il germe di $\varphi(U)(\sigma_U) \in \mathcal{G}(U)$. È immediato verificare che $\varphi_p(\sigma_p)$ non dipende dalla scelta di U e di σ_U.

Definizione 3.1. $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ si dice *iniettivo (risp. suriettivo, biettivo)* se $\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ è iniettivo (risp. suriettivo, biettivo) per ogni $p \in Y$.

Se $\varphi(U)$ è iniettiva per ogni aperto $U \subset Y$ diremo che $\mathcal{F}$ è un *sottoprefascio* di $\mathcal{G}$ (*sottofascio* se $\mathcal{F}$ è un fascio). Se $\varphi(U)$ è biettiva per ogni aperto $U \subset Y$ diremo che φ è un *isomorfismo.*

Utilizzeremo il seguente semplice:

Lemma 3.2. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio di insiemi su Y e $U \subset Y$ un aperto. Se $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ sono tali che $s_p = s'_p$ per ogni $p \in U$ allora $s = s'$.*

Dimostrazione. Per ipotesi, per ogni $p \in U$ possiamo trovare un intorno aperto $U_p \subset U$ di p tale che $\rho^U_{U_p}(s) = \rho^U_{U_p}(s')$. Poniamo

$$\sigma_p := \rho^U_{U_p}(s) = \rho^U_{U_p}(s')$$

La famiglia $\{U_p : p \in U\}$ è un ricoprimento aperto di U e le sezioni σ_p soddisfano la condizione

$$\rho^{U_p}_{U_p \cap U_q}(\sigma_p) = \rho^{U_q}_{U_p \cap U_q}(\sigma_q)$$

per ogni $p, q \in U$ tali che $U_p \cap U_q \neq \emptyset$. Poiché $\mathcal{F}$ è un fascio esiste un unico $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\rho^U_{U_p}(\sigma) = \sigma_p$ per ogni $p \in U$. Ma allora deve essere $\sigma = s = s'$. □

La proposizione seguente descrive una proprietà importante degli omomorfismi.

Proposizione 3.3. *Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un omomorfismo iniettivo di prefasci di insiemi, con $\mathcal{F}$ un fascio. Allora $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è iniettiva per ogni aperto $U \subset Y$, cioè $\mathcal{F}$ è un sottofascio di $\mathcal{G}$.*

Dimostrazione. Sia $U \subset Y$ aperto e $\sigma, \tau \in \mathcal{F}(U)$ tali che

$$\varphi(U)(\sigma) = \varphi(U)(\tau) \in \mathcal{G}(U)$$

Allora si ha anche

$$\varphi_p(\sigma_p) = \varphi(U)(\sigma)_p = \varphi(U)(\tau)_p = \varphi(\tau_p)$$

per ogni $p \in U$. Per l'ipotesi di iniettività deve aversi $\sigma_p = \tau_p$ per ogni $p \in U$. Dal Lemma 3.2 segue che $\sigma = \tau$. □

Esempio 3.4. L'ipotesi che $\mathcal{F}$ sia un fascio è necessaria per la validità della Proposizione 3.3. Si consideri ad esempio il prefascio su $\mathbb{R}$ così definito: $\mathcal{F}(U) = \{0\}$ per ogni aperto $U \neq \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e le restrizioni sono le ovvie applicazioni. È evidente che $\mathcal{F}$ non è un fascio. Sia inoltre $\mathcal{G}$ il prefascio costante $\mathcal{G}(U) = \{0\}$ per ogni aperto $U \subset \mathbb{R}$. Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ l'ovvio omomorfismo. Allora φ è iniettivo perché $\mathcal{F}_p = \{0\}$ per ogni $p \in \mathbb{R}$, ma $\varphi(\mathbb{R})$ non è iniettiva.

Proposizione 3.5. *Se $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un omomorfismo iniettivo e suriettivo di fasci allora φ è un isomorfismo, cioè $\varphi(U)$ è biettiva per ogni $U \subset Y$.*

Dimostrazione. Sia $U \subset Y$ aperto. Dalla Prop. 3.3 segue che $\varphi(U)$ è iniettiva.

Sia $\sigma \in \mathcal{G}(U)$. Dalla suriettività di φ segue che per ogni $p \in U$ esistono un aperto $U_p \subset U$ contenente p e $\tau_{U_p} \in \mathcal{F}(U_p)$ tali che

$$\varphi(U_p)(\tau_{U_p}) = \rho^U_{U_p}(\sigma)$$

Siano $p, q \in U$ tali che $U_p \cap U_q \neq \emptyset$. Allora si ha:

$$\begin{aligned}\varphi(U_p \cap U_q)[\rho^{U_p}_{U_p \cap U_q}(\tau_{U_p})] &= \rho^{U_p}_{U_p \cap U_q}[\varphi(U_p)(\tau_{U_p})] \\ &= \rho^{U_p}_{U_p \cap U_q}(\rho^U_{U_p}(\sigma)) = \rho^U_{U_p \cap U_q}(\sigma)\end{aligned}$$

e in modo simile si vede che:

$$\varphi(U_p \cap U_q)[\rho^{U_q}_{U_p\cap U_q}(\tau_{U_q})] = \rho^{U}_{U_p\cap U_q}(\sigma)$$

Dalla prima parte della dimostrazione segue che

$$\rho^{U_p}_{U_p\cap U_q}(\tau_{U_p}) = \rho^{U_q}_{U_p\cap U_q}(\tau_{U_q})$$

Poiché $\mathcal{F}$ è un fascio esiste $\tau \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\rho^{U}_{U_p}(\tau) = \tau_{U_p}$ per ogni $p \in U_p$. Si ha:

$$\rho^{U}_{U_p}(\varphi(U)(\tau)) = \varphi(U_p)(\rho^{U}_{U_p}(\tau)) = \varphi(U_p)(\tau_{U_p}) = \rho^{U}_{U_p}(\sigma)$$

Poiché σ e $\varphi(\tau)$ hanno le stesse restrizioni ad ogni U_p e poiché $\mathcal{G}$ è un fascio segue che $\sigma = \varphi(\tau)$, e quindi $\varphi(U)$ è suriettiva. □

Un omomorfismo iniettivo e suriettivo di prefasci non è in generale un isomorfismo, cioè l'ipotesi che $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ siano fasci è indispensabile perché valga la conclusione della Proposizione 3.5. Inoltre per la suriettività non vale un risultato analogo alla Proposizione 3.5, come mostrato dal seguente esempio.

Esempio 3.6. Prendiamo $Y = \mathbb{C}$ e sia $\mathcal{F} = \mathcal{O}^h_{\mathbb{C}}$, il fascio dei germi di fuzioni olomorfe, definito da

$$\mathcal{O}^h_{\mathbb{C}}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} : \ f \text{ olomorfa}\}$$

È evidente che $\mathcal{O}^h_{\mathbb{C}}$ è un fascio di anelli commutativi. Consideriamo l'omomorfismo:

$$\bar{\partial} : \mathcal{O}^h_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{O}^h_{\mathbb{C}}$$

definito da:

$$\bar{\partial}(f) = \frac{df}{dz}$$

Notare che $\bar{\partial}$ è un omomorfismo di fasci di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali, ma non un è un omomorfismo di fasci di anelli.

Sia $p \in \mathbb{C}$. L'anello locale $\mathcal{O}^h_{\mathbb{C},p}$ può essere identificato con l'anello delle serie di potenze di $z - p$ a raggio di convergenza positivo, e

$$\bar{\partial}_p : \mathcal{O}^h_{\mathbb{C},p} \longrightarrow \mathcal{O}^h_{\mathbb{C},p}$$

è la derivazione termine a termine. Poiché le serie possono essere integrate termine a termine, $\bar{\partial}_p$ è suriettiva per ogni $p \in \mathbb{C}$. D'altra parte, se $U \subset \mathbb{C}$ è un aperto non semplicemente connesso ed $f \in \mathcal{O}^h_{\mathbb{C}}(U)$, in generale f non ha una primitiva in U.

Ora introdurremo una costruzione che permette di associare in modo funtoriale un fascio ad un prefascio.

Teorema 3.7. *Sia $\mathcal{F}$ un prefascio di insiemi su uno spazio topologico Y. Esiste un fascio $\mathcal{F}^+$ ed un omomorfismo iniettivo e suriettivo*

$$\epsilon : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$$

che è un isomorfismo se e solo se $\mathcal{F}$ è un fascio. Il fascio $\mathcal{F}^+$ e l'omomorfismo ϵ sono unici a meno di isomorfismo unico.

Dimostrazione. Definiamo $\mathcal{F}^+$ nel seguente modo. Consideriamo:

$$\pi : \coprod_{p\in Y} \mathcal{F}_p \longrightarrow Y, \quad \sigma_p \longmapsto p$$

Per ogni aperto $U \subset Y$ definiamo $\mathcal{F}^+(U)$ come il sottoinsieme di

$$\{s : U \to \coprod \mathcal{F}_p : \pi s = 1_U\}$$

definito nel seguente modo: $s \in \mathcal{F}^+(U)$ se e solo se, per ogni $p \in U$ esistono $p \in U_p \subset U$ e $\sigma(p) \in \mathcal{F}(U_p)$ tali che $\sigma(p)_x = s(x)$ per ogni $x \in U_p$.

È immediato verificare che $\mathcal{F}^+$ è un prefascio e che è definito un omomorfismo $\epsilon : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$. Evidentemente $\epsilon_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}^+_p$ è biettivo.

$\mathcal{F}^+$ è un fascio. Infatti sia $\{U_i\}_{i\in I}$ una famiglia di aperti, $U = \cup_{i\in I} U_i$ e $s_i \in \mathcal{F}^+(U_i)$ tali che

$$\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_j)$$

per ogni $i, j \in I$. Salvo restringere gli aperti U_i possiamo supporre che $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ per ogni i. Definiamo $s \in \mathcal{F}^+(U)$ ponendo $s(x) = s_i(x)$ se $x \in U_i$. Questa definizione è ben posta e s soddisfa

$$\rho^U_{U_i}(s) = s_i$$

per ogni $i \in I$.

L'unicità di $\mathcal{F}^+$ segue dalla proposizione 3.5. □

Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua di spazi topologici e sia $\mathcal{F}$ un prefascio su X. definiamo un prefascio $f_*\mathcal{F}$ su Y ponendo

$$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

I seguenti fatti sono di immediata verifica:

- Se $\mathcal{F}$ è un fascio di insiemi allora anche $f_*\mathcal{F}$ è un fascio.
- Se $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un omomorfismo di prefasci allora ponendo:

  $$f_*(\varphi)(U) = \varphi(f^{-1}(U)) : \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \longrightarrow G(f^{-1}(U))$$

  si definisce un omomorfismo

  $$f_*(\varphi) : f_*\mathcal{F} \longrightarrow f_*\mathcal{G}$$

- L'operazione f_* così definita è un funtore dalla categoria dei prefasci su X alla categoria dei prefasci su Y.
- Se:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

ed $\mathcal{F}$ è un prefascio su X, allora

$$(gf)_*\mathcal{F} = g_*(f_*\mathcal{F})$$

Una coppia $(Y, \mathcal{O}_Y)$ costituita da uno spazio topologico e da un fascio di anelli si dice uno *spazio anellato*. Un *morfismo di spazi anellati*

$$(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

è una coppia $(f, f^\natural)$ costituita da un'applicazione continua $f : X \to Y$ e da un omomorfismo

$$f^\natural : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$$

È immediato verificare che con questa definizione gli spazi anellati costituiscono una categoria. Nel seguito scriveremo semplicemente f invece di $(f, f^\natural)$ e denoteremo uno spazio anellato con il simbolo X omettendo di indicare il fascio $\mathcal{O}_X$ se è chiaro dal contesto di quale fascio si tratti.

Lemma 3.8. *Se $f : X \to Y$ è un morfismo di spazi anellati allora per ogni $x \in X$ resta indotto un omomorfismo di anelli:*

$$f_x^\natural : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

Dimostrazione. Esercizio. □

Sia X uno spazio anellato. Se per ogni $x \in X$ l'anello $\mathcal{O}_{X,x}$ è locale, chiameremo X uno *spazio anellato in anelli locali.*

Se X ed Y sono spazi anellati in anelli locali ed $f : X \to Y$ è un morfismo, supporremo implicitamente che per ogni $x \in X$ l'omomorfismo $f_x^\natural : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ sia un omomorfismo locale, cioè che

$$f_x^\natural(\mathfrak{m}_{Y,f(x)}) \subset \mathfrak{m}_{X,x}$$

Esempio 3.9. La condizione che $f_x^\natural$ sia locale non è automaticamente soddisfatta. È sufficiente prendere $\varphi : A \to B$ come un omomorfismo non locale tra due anelli locali A e B e considerare $X = Y = \{p\}$ lo spazio costituito da un punto, $f =$ identità, e $f^\natural = \varphi$.

NOTAZIONE: D'ora in poi, le sezioni di un prefascio $\mathcal{F}$ al di sopra di un aperto U si denoteranno anche con $\Gamma(U, \mathcal{F})$, oltre che con $\mathcal{F}(U)$.

4. Algebra omologica in $mod(A)$

Sia A un anello (sottinteso commutativo con unità), e sia $mod(A)$ la categoria degli A-moduli. Se $A = \mathbb{Z}$ allora $mod(\mathbb{Z})$ è la categoria dei gruppi abeliani e si denota con Ab. Diamo alcune definizioni.

- Un *complesso (coomologico)* di A-moduli è una successione di moduli e omomorfismi:

  $$M^\bullet : \cdots \longrightarrow M^{i-1} \xrightarrow{\partial^{i-1}} M^i \xrightarrow{\partial^i} M^{i+1} \xrightarrow{\partial^{i+1}} \cdots$$

  tale che $\partial^i \cdot \partial^{i-1} = 0$ per ogni i. I ∂^i si dicono *omomorfismi di cobordo*. L'indice i si dice il *grado* del corrispondente modulo. Un *complesso omologico* si definisce in modo analogo, con la differenza che gli omomorfismi abbassano il grado e si dicono *omomorfismi di bordo*. I complessi omologici si denotano quindi come:

  $$M_\bullet : \cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} M_i \xrightarrow{\partial_i} M_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \cdots$$

  Noi considereremo prevalentemente complessi coomologici.
- Gli elementi del sottomodulo $\ker(\partial^i)$ si dicono *cocicli* e quelli di $\mathrm{Im}(\partial^{i-1})$ si dicono *cobordi*. *L'i-esimo modulo di coomologia* del complesso $M^\bullet$ è

  $$H^i(M^\bullet) = \frac{\ker(\partial^i)}{\mathrm{Im}(\partial^{i-1})}$$

- $M^\bullet$ si dice *esatto* in grado i se $\ker(\partial^i) = \mathrm{Im}(\partial^{i-1})$, cioè se $H^i(M^\bullet) = 0$. Diremo che $M^\bullet$ è *aciclico* se è esatto in ogni grado. In tal caso diremo anche che $M^\bullet$ è una *successione esatta.*
- Sia M un A-modulo. Un complesso della forma

  $$K^\bullet : 0 \to K^0 \to K^1 \to \cdots$$

  si dice una *risoluzione* di M se esiste un omomorfismo $\epsilon : M \to K^0$, detto *aumentazione*, tale che

  $$0 \to M \to K^0 \to K^1 \to \cdots$$

  sia aciclico.
- Dati complessi $M^\bullet$, $N^\bullet$, un *omomorfismo di complessi*

  $$F^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$$

è una successione di omomorfismi $\{f^i : M^i \to N^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tale che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} M^i \arrow[r, "\partial^i"] \arrow[d, "f^i"'] & M^{i+1} \arrow[d, "f^{i+1}"] \\ N^i \arrow[r, "\partial^i"] & N^{i+1} \end{tikzcd}$$

sia commutativo per ogni $i \in \mathbb{Z}$. Con questa definizione i complessi di A-moduli ed i loro omomorfismi costituiscono una categoria che verrà denotata con $\mathcal{K}(A)$. In questa categoria sono definiti nuclei, conuclei, immagini, e il complesso nullo.

- Si verifica immediatamente che un omomorfismo $f^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ induce omomorfismi
$$H^i(f^\bullet) : H^i(M^\bullet) \longrightarrow H^i(N^\bullet), \quad i \in \mathbb{Z}$$
in modo funtoriale. Cioè per ogni $i \in \mathbb{Z}$ si ottiene un funtore covariante:
$$H^i : \mathcal{K}(A) \longrightarrow mod(A)$$
- L'omomorfismo $f^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ si dice un *quasi-isomorfismo* se $H^i(f^\bullet)$ è un isomorfismo per ogni $i \in \mathbb{Z}$.

Esempio 4.1. Sia M un A-modulo e $K^\bullet$ una sua risoluzione con aumentazione $\epsilon : M \to K^0$. Possiamo identificare M con il complesso che è 0 in tutti i gradi $\neq 0$ e uguale ad M in grado 0. Allora l'aumentazione può interpretarsi come un omomorfismo di complessi:
$$\epsilon : M \to K^\bullet$$
e la condizione che $K^\bullet$ sia una risoluzione si traduce nella condizione che ϵ sia un quasi-isomorfismo.

Il risultato elementare più importante riguardante i funtori H^i è il seguente:

Teorema 4.2. *Sia*
$$0 \longrightarrow L^\bullet \longrightarrow M^\bullet \longrightarrow N^\bullet \longrightarrow 0$$
una successione esatta corta in $\mathcal{K}(A)$, cioè tale che
$$0 \longrightarrow L^i \longrightarrow M^i \longrightarrow N^i \longrightarrow 0$$
sia una successione esatta in $mod(A)$ per ogni i. Allora sono definiti omomorfismi:
$$\delta^i : H^i(N^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(L^\bullet), \quad i \in \mathbb{Z}$$

tali che la successione seguente sia esatta:

$$H^{i-1}(N^\bullet) \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(L^\bullet) \longrightarrow H^i(M^\bullet) \longrightarrow H^i(N^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} \cdots$$

Dimostrazione. Esercizio. □

Definizione 4.3. Siano $F^\bullet, g^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ due omomorfismi di complessi. Una *omotopia* tra $f^\bullet$ e $g^\bullet$ è una successione di omomorfismi:

$$h^i : M^i \longrightarrow N^{i-1}$$

tale che si abbia

$$g^i - f^i = \partial^{i-1} \cdot h^i + h^{i-1} \cdot \partial^i$$

per ogni $i \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
M^{i-1} \arrow[r, "\partial^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] & M^i \arrow[r, "\partial^i"] \arrow[dl, "h^i"'] \arrow[d, "f^i"'] & M^{i+1} \arrow[dl, "h^{i+1}"'] \arrow[d, "f^{i+1}"] \\
N^{i-1} \arrow[r, "\partial^{i-1}"] & N^i \arrow[r, "\partial^i"] & N^{i+1}
\end{tikzcd}$$

Proposizione 4.4. *Se esiste un'omotopia tra $f^\bullet$ e $g^\bullet$ allora*

$$H^i(f^\bullet) = H^i(g^\bullet)$$

per ogni $i \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Esercizio. □

Le definizioni e i risultati che abbiamo visto in questo paragrafo possono essere ottenuti in modo puramente categorico, cioè utilizzando solamente proprietà degli oggetti e degli omomorfismi che non fanno riferimento agli elementi degli oggetti stessi. Tali proprietà possono essere utilizzate come assiomi che definiscono una classe più ampia di categorie, chiamate *categorie abeliane*, tra le quali rientrano le categorie *mod*(A) e nelle quali è possibile dare tutte le nozioni e i risultati di algebra omologica che abbiamo dato.

Definizione 4.5. Una *categoria abeliana* è una categoria $\mathcal{A}$ tale che:

- $\mathcal{A}$ possiede un oggetto nullo.
- Per ogni $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hom}(A, B)$ ha una struttura di gruppo abeliano e la legge di composizione è lineare.
- Le somme dirette finite esistono.
- Ogni morfismo ha un nucleo e un conucleo.
- Ogni monomorfismo è il nucleo del suo conucleo, e ogni epimorfismo è il conucleo del suo nucleo.
- Ogni morfismo può essere fattorizzato in un epimorfismo seguito da un monomorfismo.

Le seguenti categorie sono abeliane (alcune di queste verranno introdotte più avanti):

- Ab, la categoria dei gruppi abeliani.
- $mod(A)$, la categoria de moduli su un anello A.
- $Ab(X)$, la categoria dei fasci di gruppi abeliani su uno spazio topologico X.
- $mod(X)$, la categoria dei fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli su uno spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$.
- $Qcoh(X)$, la categoria dei fasci quasi-coerenti su uno schema X.
- $Coh(X)$, la categoria dei fasci coerenti su uno schema X.

La seguente definizione svolgerà un ruolo importante nel seguito:

Definizione 4.6. Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore covariante tra due categorie abeliane. Diremo che F è *additivo* se l'applicazione indotta da F:

$$\mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$$

è un omomorfismo di gruppi abeliani. Un funtore additivo F si dice *esatto* se per ogni successione esatta

$$A \to B \to C$$

in $\mathcal{A}$ la successione

$$F(A) \to F(B) \to F(C)$$

è esatta in $\mathcal{B}$. Diremo che F è *esatto a sinistra* (risp. *esatto a destra*) se per ogni successione esatta corta in $\mathcal{A}$:

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

la successione in $\mathcal{B}$

$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$$

è esatta (risp. la successione in $\mathcal{B}$:

$$F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$$

è esatta). Si danno analoghe definizioni per funtori contravarianti. Precisamente, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ contravariante si dice esatto a sinistra (risp. a destra) se per ogni successione esatta corta in $\mathcal{A}$ come sopra la successione in $\mathcal{B}$

$$0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$$

(risp $F(C) \to F(B) \to F(A) \to 0$) è esatta. F si dice esatto se

$$F(C) \to F(B) \to F(A)$$

è esatta in $\mathcal{B}$ per ogni $A \to B \to C$ esatta in $\mathcal{A}$.

È facile verificare che F è esatto se e solo se è esatto a sinistra e a destra. Il funtore covariante additivo che utilizzeremo più frequentemente è

$$\Gamma(X, -) : Ab(X) \to Ab$$

che associa ad un fascio di gruppi abeliani su uno spazio topologico X il gruppo abeliano delle sue sezioni globali.

5. Fasci fiacchi e coomologia

Sia X uno spazio topologico. Una successione di omomorfismi di fasci:

$$\mathcal{F}^\bullet : \cdots \to \mathcal{F}_{i-1} \to \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_{i+1} \to \cdots$$

si dice *esatta* in grado i (o in $\mathcal{F}_i$) se la successione delle spighe

$$\mathcal{F}_{i-1,x} \to \mathcal{F}_{i,x} \to \mathcal{F}_{i+1,x}$$

è esatta per ogni $x \in X$. Diremo che $\mathcal{F}^\bullet$ è esatta se lo è in ogni i.

Una successione esatta della forma:

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

si dirà *esatta corta*.

Osservazione 5.1. Come si è detto nel paragrafo 4, la categoria $Ab(X)$ è abeliana, e quindi la nozione di successione esatta si sarebbe potuta dare anche in termini puramente categorici. Le due definizioni risultano essere infatti equivalenti.

Proposizione 5.2. *Se*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

è una successione esatta corta di fasci su X allora la successione delle sezioni globali

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_X} \Gamma(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_X} \Gamma(X, \mathcal{H})$$

è esatta. In altre parole il funtore $\Gamma(X, -)$ è esatto a sinistra.

Dimostrazione. L'esattezza in $\Gamma(X, \mathcal{F})$ è già stata dimostrata (Prop. 3.3). Resta da verificare L'esattezza in $\Gamma(X, \mathcal{G})$. Sia $s \in \Gamma(X, \mathcal{G})$ tale che $\beta_X(s) = 0$. Allora, per l'ipotesi di esattezza in $\mathcal{G}$, esistono un ricoprimento aperto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ e $\tau_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$ tali che $\rho^X_{U_i}(s) = \alpha_{U_i}(\tau_i)$ per ogni i. Poiché:

$$\alpha_{U_i \cap U_j}(\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(\tau_i)) = \rho^X_{U_i \cap U_j}(s) = \alpha_{U_i \cap U_j}(\rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}(\tau_j))$$

applicando ancora una volta la 3.3 si ottiene:

$$\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(\tau_i) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(\tau_j)$$

Poiché $\mathcal{F}$ è un fascio esiste un'unica $\tau \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ tale che $\rho^X_{U_i}(\tau) = \tau_i$ per ogni $i \in I$. Ora $\alpha_X(\tau)$ ed s soddisfano:

$$\rho^X_{U_i}(\alpha_X(\tau)) = \alpha_{U_i}(\rho^X_{U_i}(\tau)) = \alpha_{U_i}(\tau_i) = \rho^X_{U_i}(s)$$

per ogni $i \in I$ e quindi $\alpha_X(\tau) = s$. □

Il funtore $\Gamma(X, -)$ non è in generale esatto a destra e quindi non è esatto (si veda l'esempio 3.6). Questo fatto ci porta ad introdurre le nozioni che seguono.

Sia $\mathcal{F}$ un fascio su X. Diremo che $\mathcal{F}$ è *fiacco* se per ogni aperto $U \subset X$ la restrizione

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$$

è suriettiva.

Esempio 5.3. (a) Se $f : Y \to X$ è un'applicazione continua e $\mathcal{F}$ è un fascio fiacco su Y allora $f_*\mathcal{F}$ è un fascio fiacco su X.

(b) Se $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di fasci fiacchi di gruppi abeliani allora la loro somma diretta $\bigoplus \mathcal{F}_i$ è fiacco.

D'ora in poi in questo paragrafo considereremo solo fasci di gruppi abeliani.

Lemma 5.4. *Sia*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \xrightarrow{r} \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0$$

una successione esatta di fasci su X.

(a) *Se $\mathcal{F}_1$ è fiacco allora*

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}_1) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{r(U)} \Gamma(U, \mathcal{F}_3) \longrightarrow 0 \tag{1}$$

è esatta per ogni aperto $U \subset X$.

(b) *Se $\mathcal{F}_1$ ed $\mathcal{F}_2$ sono fiacchi allora $\mathcal{F}_3$ è fiacco.*

Dimostrazione. (*a*) ⇒ (*b*). Consideriamo $U \subset X$ aperto. Abbiamo il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & \Gamma(X, \mathcal{F}_3) \arrow[d, "t"] \\ \Gamma(U, \mathcal{F}_2) \arrow[r, "r(U)"] & \Gamma(U, \mathcal{F}_3) \end{tikzcd}$$

in cui s è suriettiva perché $\mathcal{F}_2$ è fiacco, ed $r(U)$ è suriettiva per la (a). Quindi t è suriettiva, e quindi $\mathcal{F}_3$ è fiacco.

(a) Dobbiamo solo dimostrare la suriettività di $r(U)$, perché $\Gamma(X,-)$ è esatto a sinistra. Non è restrittivo supporre $U = X$.

Sia $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{F}_3)$ e sia $U \subset X$ tale che esista $\tau_U \in \Gamma(U, \mathcal{F}_2)$ tale che $r(U)(\tau_U) = \rho^X_U(\sigma)$. Prendiamo U massimale con questa proprietà e facciamo vedere che $U = X$. Se così non è esiste $x \in X \setminus U$. Per la suriettività di r esiste un aperto W contenente x e $\tau_W \in \Gamma(W, \mathcal{F}_2)$ tale che $r(W)(\tau_W) = \rho^X_W(\sigma)$. Consideriamo:

$$\eta := \rho^U_{U\cap W}(\tau_U) - \rho^W_{U\cap W}(\tau_W)$$

Poiché $r(U \cap W)(\eta) = 0$, per l'esattezza a sinistra di $\Gamma(U \cap W, -)$ possiamo supporre che $\eta \in \Gamma(U \cap W, \mathcal{F}_1)$. Esiste $\bar\eta \in \Gamma(X, \mathcal{F}_1)$ tale che $\rho^X_{U\cap W}(\bar\eta) = \eta$, perché $\mathcal{F}_1$ è fiacco. Poniamo:

$$\tau'_W = \tau_W + \rho^X_W(\bar\eta)$$

Allora

$$\rho^W_{U\cap W}(\tau'_W) = \rho^W_{U\cap W}(\tau_W) + \rho^X_{U\cap W}(\bar\eta) = \rho^U_{U\cap W}(\tau_U)$$

Quindi τ'_W e τ_U coincidono su $U \cap W$ e quindi si incollano dando luogo ad una sezione $\tau_{U\cup W} \in \Gamma(U \cup W, \mathcal{F}_2)$ tale

$$r(U \cup W)(\tau_{U\cup W}) = \rho^X_{U\cup W}(\sigma)$$

contraddicendo la massimalità di U. $\square$

Sia $\mathcal{F}$ un fascio su X e consideriamo l'applicazione, già considerata nel corso della dimostrazione del Teorema 3.7:

$$\pi : \coprod_{x\in X} \mathcal{F}_x \longrightarrow X, \quad \sigma_x \mapsto x$$

Definiamo un prefascio $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ ponendo:

$$\mathcal{D}(\mathcal{F})(U) = \{s : U \to \coprod \mathcal{F}_x : \pi s = 1_U\}$$

È immediato verificare che:

- $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ è un fascio di gruppi abeliani. Lo chiameremo *fascio dei germi di sezioni discontinue* di $\mathcal{F}$.
- Esiste un omomorfismo canonico iniettivo $\mathcal{F} \to \mathcal{D}(\mathcal{F})$.
- $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ è un fascio fiacco.
- Ponendo $\mathcal{D}^{j+1}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}\left(\mathrm{coker}[\mathcal{D}^{j-1}(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^j(\mathcal{F})]\right)$ si definisce una risoluzione di $\mathcal{F}$ con fasci fiacchi:

  $$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F})$$

  dove

  $$\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F}) : 0 \to \mathcal{D}^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^1(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^2(\mathcal{F}) \to \cdots$$

Questa risoluzione è univocamente individuata da $\mathcal{F}$ e verrà chiamata la *$\mathcal{D}$-risoluzione di $\mathcal{F}$*.

Queste osservazioni ci consentono di dare la seguente

Definizione 5.5. Sia $i \geq 0$ un intero. *L'i-esimo gruppo di coomologia di X a coefficienti in $\mathcal{F}$* è

$$H^i(X, \mathcal{F}) := H^i(\Gamma(X, \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F})))$$

dove

$$\Gamma(X, \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F})) : 0 \to \Gamma(X, \mathcal{D}^0(\mathcal{F})) \to \Gamma(X; \mathcal{D}^1(\mathcal{F})) \to \cdots$$

è il complesso delle sezioni globali di $\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F})$.

Si osservi che questa definizione è ben posta perché $\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F})$ è *canonicamente* individuata da $\mathcal{F}$, e quindi gli $H^i(X, \mathcal{F})$ dipendono solo da X e da $\mathcal{F}$.

Proposizione 5.6. *$H^j(X, -)$ è un funtore covariante dalla categoria dei fasci di gruppi abeliani su X alla categoria Ab dei gruppi abeliani, per ogni $j \geq 0$.*

Dimostrazione. Ad un omomorfismo di fasci $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ viene associata univocamente un'applicazione:

$$\tilde{f} : \coprod \mathcal{F}_x \longrightarrow \coprod \mathcal{G}_x$$

in modo ovvio. A sua volta $\tilde{f}$ induce un omomorfismo di fasci $\mathcal{D}(f)$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{D}(\mathcal{F}) \arrow[d, "\mathcal{D}(f)"] \\
\mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{D}(\mathcal{G})
\end{tikzcd}$$

Iterando questa costruzione si arriva a determinare in modo unico un omomorfismo di risoluzioni

$$\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{G})$$

il quale definisce

$$H^j(f) : H^j(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^j(X, \mathcal{G})$$

in modo funtoriale. □

Definizione 5.7. Un fascio $\mathcal{F}$ si dice *aciclico* se $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $i \geq 1$.

Proposizione 5.8. (a) *$H^0(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$ per ogni fascio $\mathcal{F}$ su X.*

(b) *I fasci fiacchi sono aciclici.*

Dimostrazione. (a) Segue subito dall'esattezza a sinistra di $\Gamma(X,-)$.
(b) Supponiamo che $\mathcal{F}$ sia fiacco e consideriamo la sua $\mathcal{D}$-risoluzione:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{D}^0(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{D}^1(\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

Nella successione esatta:

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{D}^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^0(\mathcal{F})/\mathcal{F} \to 0 \tag{2}$$

i primi due fasci sono fiacchi e quindi anche il terzo lo è per il Lemma 5.4(b). Procedendo induttivamente e applicando lo stesso argomento alle successioni esatte:
(3)

$$0 \to \mathrm{Im}[\mathcal{D}^{j-1}(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^j(\mathcal{F})] \to \mathcal{D}^j(\mathcal{F}) \to \ker[\mathcal{D}^{j+1}(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^{j+2}(\mathcal{F})] \to 0$$

deduciamo che i fasci $\mathrm{Im}[\mathcal{D}^{j-1}(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^j(\mathcal{F})]$ e $\ker[\mathcal{D}^{j+1}(\mathcal{F}) \to \mathcal{D}^{j+2}(\mathcal{F})]$ sono fiacchi per ogni $j \geq 1$. Allora, per il Lemma 5.4(a) sono esatte anche le successioni delle loro sezioni globali. Da ciò segue facilmente che il complesso:

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{D}^0(\mathcal{F})) \to \Gamma(X,\mathcal{D}^1(\mathcal{F})) \to \cdots$$

è esatto. □

Abbiamo il seguente teorema:

Teorema 5.9. *Sia:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0$$

una successione esatta di fasci su X. Allora esistono omomorfismi di gruppi:

$$H^j(X,\mathcal{F}_3) \longrightarrow H^{j+1}(X,\mathcal{F}_1), \quad j \geq 1$$

tali che la seguente successione sia esatta:

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}_1) \to H^0(X,\mathcal{F}_2) \to H^0(X,\mathcal{F}_3) \to H^1(X,\mathcal{F}_1) \to H^1(X,\mathcal{F}_2) \to \cdots$$

Dimostrazione. Gli omomorfismi tra i fasci della successione esatta inducono omomorfismi tra le $\mathcal{D}$-risoluzioni:

$$\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F}_1) \to \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F}_2) \to \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F}_3)$$

che sono definiti come nella dimostrazione della Proposizione 5.6. È un facile esercizio verificare che questi omomorfismi costituiscono una successione esatta corta di complessi di fasci. Ora applichiamo il funtore $\Gamma(X,-)$. Otteniamo una successione di complessi di gruppi abeliani:

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F}_1) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F}_2) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{F}_3) \longrightarrow 0$$

Questa successione è esatta per il Lemma 5.4(a). Ora possiamo applicare il Teorema 4.2 e ottenere la successione esatta dell'enunciato. $\square$

Proposizione 5.10. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani e*

$$0 \to \mathcal{F} \to K^\bullet \tag{4}$$

una risoluzione di $\mathcal{F}$ con fasci aciclici. Allora

$$H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\Gamma(X, K^\bullet))$$

Dimostrazione. Per l'esattezza a sinistra di $\Gamma(X, -)$ l'affermazione è ovvia per $i = 0$. Dimostriamola per $i = 1$. Spezziamo la risoluzione (4) in due successioni esatte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow K^0 \longrightarrow N \longrightarrow 0 \tag{5}$$

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow K^1 \longrightarrow K^2 \longrightarrow \cdots$$

Applicando il Teorema 5.9 alla prima deduciamo che la successione:

$$\Gamma(X, K^0) \longrightarrow \Gamma(X, N) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

è esatta. Inoltre per l'esattezza a sinistra di $\Gamma(X, -)$ anche la successione:

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, N) \longrightarrow \Gamma(X, K^1) \longrightarrow \Gamma(X, K^2)$$

è esatta. Quindi $H^1(X, \mathcal{F}) = H^1(\Gamma(X, K^\bullet))$. Ora procediamo per induzione su i e supponiamo $i \geq 2$. Dalla (5) deduciamo

$$H^{i-1}(X, N) \cong H^i(X, \mathcal{F})$$

e, per l'ipotesi induttiva applicata a N, otteniamo che $H^{i-1}(X, N)$ è l'$(i-1)$-esimo modulo di coomologia di

$$0 \to \Gamma(X, K^1) \to \Gamma(X, K^2) \to \cdots$$

il quale è $H^i(\Gamma(X, K^\bullet))$. $\square$

La proposizione precedente ci dice che per calcolare la coomologia di un fascio $\mathcal{F}$ non è necessario costruirne la risoluzione fiacca canonica, ma è sufficiente risolvere $\mathcal{F}$ con fasci aciclici.

6. Schemi affini: topologia

Se non altrimenti specificato si suppone assegnato un anello commutativo unitario A, e si denota con

$$X = \mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \subset A : \mathfrak{p} \text{ è un ideale primo}\}$$

Quando un ideale primo $\mathfrak{p} \subset A$ è pensato come elemento di X lo si denota con il simbolo $[\mathfrak{p}]$. Viceversa si usa talvolta denotare con il simbolo $\mathfrak{p}_x \subset A$ l'ideale primo corrispondente al punto $x \in X$.

Per ogni $S \subset A$ si pone:

$$V(S) = \{x \in X : S \subset \mathfrak{p}_x\} \subset X$$

e per ogni $Z \subset X$ si pone

$$I(Z) = \bigcap_{z \in Z} \mathfrak{p}_z \subset A$$

I sottoinsiemi $V(S)$, al variare di $S \subset A$, costituiscono i chiusi di una topologia su X che si chiama *topologia di Zariski.*

I chiusi della forma $V(f)$, $f \in A$, si dicono *chiusi principali*; i loro complementari, cioè gli aperti della forma

$$U_f := X \setminus V(f) = \{x \in X : f \notin \mathfrak{p}_x\}$$

si dicono *aperti principali.*

Esercizio 6.1. Dimostrare le affermazioni seguenti:

(1) $V(S) = V((S))$ per ogni $S \subset A$.
(2) $V(I(Z)) = \overline{Z}$ per ogni $Z \subset X$.
(3) $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ per ogni ideale $\mathfrak{a} \subset A$.
(4) $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ e, per ogni $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ ideali, si ha:

$$V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \mathfrak{b} \subset \sqrt{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{b}} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$$

(5) $I(\{x\}) = \mathfrak{p}_x$ per ogni $x \in X$.
(6) $U_f \supset U_g \Leftrightarrow g \in \sqrt{(f)}$

Esercizio 6.2. Sia $S \subset A$. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) La famiglia di aperti principali $\{U_f : f \in S\}$ è un ricoprimento di X.
(ii) $(S) = (1)$.
(iii) Esistono $f_1, \dots, f_n \in S$ e $g_1, \dots, g_n \in A$ tali che

$$g_1 f_1 + \cdots + g_n f_n = 1$$

Esercizio 6.3. Dimostrare le seguenti affermazioni:

(a) X è compatto.
(b) Gli aperti principali sono compatti.

Definizione 6.4. Un sottoinsieme chiuso $Z \subset X$ si dice *irriducibile* se non esistono chiusi non vuoti $V, W \subset X$ tali che

$$Z = V \cup W, \quad V \subsetneq Z \supsetneq W$$

Proposizione 6.5. *Sia $x \in X$. Allora la chiusura $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$ è irriducibile. Viceversa, ogni sottoinsieme chiuso irriducibile di X è della forma $V(\mathfrak{p}) = \overline{[\mathfrak{p}]}$ per qualche ideale primo $\mathfrak{p} \subset A$.*

Dimostrazione. Sia $Z = \overline{\{x\}}$ e supponiamo che si abbia $Z = V \cup W$ con V, W chiusi. Possiamo supporre che $x \in V$. Allora V è un chiuso tale che $x \in V \subset \overline{\{x\}}$ e quindi $V = \overline{\{x\}}$.

Viceversa supponiamo che $Z \subset X$ sia un chiuso irriducibile. Sia $\mathfrak{a} = I(Z)$ e siano $f, g \in A$ tali che $fg \in \mathfrak{a}$. Allora si ha:

$$Z \subset V(fg) = V(f) \cup V(g)$$

Poiché Z è irriducibile deve essere $Z \subset V(f)$ oppure $Z \subset V(g)$, il che implica $f \in \mathfrak{a}$ oppure $g \in \mathfrak{a}$, e quindi $\mathfrak{a}$ è primo e $Z = V(\mathfrak{a})$.

□

Corollario 6.6. *L'applicazione $\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p}) = \overline{[\mathfrak{p}]}$ è una biezione tra* Spec(A) *e la famiglia dei sottoinsiemi chiusi irriducibili di X. Il punto $[p]$ si dice* punto generico *di $V(\mathfrak{p})$.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Se $y \in \overline{\{x\}}$ diremo che y è una *specializzazione* di x e x è una *generalizzazione* di y. Chiameremo x *punto generico* di $\overline{\{x\}}$.

7. Schemi affini: fascio strutturale

Il modo più semplice per definire il fascio strutturale su $X = \mathrm{Spec}(A)$ è quello di utilizzare la base $\mathcal{B}$ costituita dagli aperti principali e definire un fascio $\mathcal{O}_X$ su $\mathcal{B}$. Si procede nel modo seguente.

Per ogni aperto principale U_f, $f \in A$, poniamo

$$\Gamma(U_f, \mathcal{O}_X) = A_f$$

dove A_f è la localizzazione di A nel sistema moltiplicativo $\{f^n, n \geq 0\}$. Se $U_g \subset U_f$ allora $g \in \sqrt{(f)}$ e quindi $g^m = bf$ per qualche $m \geq 1$ e $b \in A$. Allora possiamo definire:

$$\rho^f_g : A_f \longrightarrow A_g, \quad \frac{a}{f^n} \longmapsto \frac{ab^n}{g^{nm}}$$

Questa definizione non dipende dalla scelta di b ed m. Se $U_f = U_g$ allora ρ^f_g e ρ^g_f sono univocamente definite e inverse una dell'altra. Quindi si possono identificare A_f ed A_g. Inoltre è immediato verificare che se $U_g \subset U_f \subset U_h$ allora si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} A_h \arrow[rr, "\rho^h_f"] \arrow[dr, "\rho^h_g"'] & & A_f \arrow[dl, "\rho^f_g"] \\ & A_g & \end{tikzcd}$$

Quindi il dato $\Gamma(U_f, \mathcal{O}_X) = A_f$ e ρ^f_g come sopra definisce un prefascio $\mathcal{O}_X$ di anelli su $\mathcal{B}$. Ora abbiamo il seguente

Lemma 7.1. *Il prefascio $\mathcal{O}_X$ su $\mathcal{B}$ è un fascio su $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che si abbia $U_f = \bigcup_{i \in I} U_{f_i}$. Dobbiamo dimostrare le due seguenti affermazioni:

(a) Se $s \in \Gamma(U_f, \mathcal{O}_X)$ soddisfa $\rho^f_{f_i}(s) = 0$ per ogni $i \in I$ allora $s = 0$.

(b) Se $(s_i) \in \prod_i \Gamma(U_{f_i}, \mathcal{O}_X)$ soddisfa $\rho^{f_i}_{f_i f_j}(s_i) = \rho^{f_j}_{f_i f_j}(s_j)$ allora esiste $s \in \Gamma(U_f, \mathcal{O}_X)$ tale che $\rho^f_{f_i}(s) = s_i$ per ogni $i \in I$.

Poiché U_f è compatto possiamo supporre che I sia finito. Inoltre, restringendo il prefascio $\mathcal{O}_X$ a $U_f = \mathrm{Spec}(A_f)$ possiamo sostituire A_f con A e quindi supporre $f = 1$, cioè $U_f = X$.

La condizione $X = \bigcup_{i \in I} U_{f_i}$ è equivalente a

$$(f_i : i \in I) = (1) = A$$

cioè all'esistenza di $a_i \in A$ tali che $\sum_i a_i f_i = 1$. Inoltre, essendo $U_{f_i^n} = U_{f_i}$ per ogni $n > 0$, si ha anche

$$X = \bigcup_{i \in I} U_{f_i^n}$$

per ogni $n \geq 1$, e quindi esistono $b_i \in A$, dipendenti da n, tali che

$$\sum_i b_i f_i^n = 1 \tag{6}$$

Dimostriamo (a). Sia $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = A$ la cui immagine in $\Gamma(U_{f_i}, \mathcal{O}_X) = A_{f_i}$ sia 0 per ogni $i \in I$. Poiché I è finito esiste $n > 0$ tale $f_i^n s = 0$ per ogni $i \in I$. Siano b_i soddisfacenti la (6). Allora:

$$s = 1s = \left(\sum_i b_i f_i^n \right) s = \sum_i b_i (f_i^n s) = 0$$

Dimostriamo (b). Poiché I è finito possiamo scrivere

$$s_i = \frac{a_i}{f_i^n}$$

con un n indipendente da i. Per ipotesi

$$\rho^{f_i}_{f_i f_j}\left(\frac{a_i}{f_i^n}\right) = \rho^{f_j}_{f_i f_j}\left(\frac{a_j}{f_j^n}\right) \quad \forall i, j \in I$$

Ciò significa che esiste $m > 0$ (che, per la finitezza di I, può essere scelto indipendente da i, j) tale che

$$(f_i f_j)^m (f_j^n a_i - f_i^n a_j) = 0$$

Questa identità può essere così riscritta:

$$f_j^{n+m}(f_i^m a_i) = f_i^{n+m}(f_j^m a_j)$$

Poiché $s_i = \frac{f_i^m a_i}{f_i^{n+m}}$, possiamo sostituire $n + m$ con n e $f_i^m a_i$ con a_i nell'identità precedente e riscriverla nella forma:

$$f_j^n a_i = f_i^n a_j$$

per ogni $i, j \in I$. Ora poniamo $s = \sum_j b_j a_j$, dove i b_j sono come nella (6). Allora abbiamo:

$$f_i^n s = f_i^n \left(\sum_j b_j a_j\right) = \sum_j b_j (f_i^n a_j) = \left(\sum_j b_j f_j^n\right) a_i = a_i$$

e questo significa che $\rho^1_{f_i}(s) = s_i \in A_{f_i}$. □

Ora basta applicare la Proposizione 2.1 per concludere che esiste su X un fascio che coincide con $\mathcal{O}_X$ su $\mathcal{B}$ e che denotiamo con lo stesso simbolo $\mathcal{O}_X$. Lo chiameremo *il fascio strutturale su* X.

La spiga su $x \in X = \mathrm{Spec}(A)$ del fascio strutturale $\mathcal{O}_X$ verrà denotata con $\mathcal{O}_{X,x}$. Per definizione:

$$\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{x \in U} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

Si osservi che il limite induttivo è preso rispetto al sistema induttivo filtrante degli aperti contenenti x ordinato per $\supseteq$ (invece che per $\subseteq$).

Proposizione 7.2. *Per ogni* $x \in X$ *si ha:*

$$\mathcal{O}_{X,x} = A_{\mathfrak{p}_x}$$

In particolare $\mathcal{O}_{X,x}$ *è un anello locale per ogni* $x \in X$.

Dimostrazione. Utilizzando il Lemma 1.6 abbiamo:

$$\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}_x} A_f$$

Se A è integro allora tutti gli A_f sono contenuti nel campo dei quozienti $Q(A)$ e tutte le restrizioni sono inclusioni; il limite induttivo coincide con la loro unione e consiste di tutti gli elementi della forma $\frac{a}{f}$ al variare di $f \in A \setminus \mathfrak{p}_x$ e $a \in A$. Pertanto coincide con $A_{\mathfrak{p}_x}$. Se A non è integro la dimostrazione è simile ma un po' più complicata. $\square$

Esempio 7.3. *Domini d'integrità.* Supponiamo A un dominio. Il punto generico $[(0)] \in X = \mathrm{Spec}(A)$ verrà denotato con η. Tutti gli A_f sono contenuti in $Q(A)$ così come tutti gli anelli locali $\mathcal{O}_{X,x}$. In particolare

$$\mathcal{O}_{X,\eta} = Q(A)$$

e va pensato come il campo delle "funzioni razionali" su X. Se consideriamo un elemento $f \in A$ come una funzione generalizzata su X, gli $f \in \mathfrak{p}$ sono le funzioni che si annullano in $[\mathfrak{p}]$. Pertanto $\mathcal{O}_{X,[\mathfrak{p}]} = A_{\mathfrak{p}}$ consiste di tutte le funzioni razionali, cioè gli elementi di $Q(A)$, che sono regolari in $[\mathfrak{p}]$, cioè il cui denominatore non si annulla in $[\mathfrak{p}]$.

Lemma 7.4. *Se $f \in A$ allora:*

$$\Gamma(U_f, \mathcal{O}_X) = A_f = \bigcap_{f \notin \mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} \tag{7}$$

Dimostrazione. L'inclusione $\subseteq$ è ovvia. La $\supseteq$ segue dalla seguente catena di implicazioni:

$$\frac{a}{g} \in \bigcap_{f \notin \mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} \Rightarrow g \notin \bigcup_{f \notin \mathfrak{p}} \mathfrak{p} \Rightarrow U_f \subseteq U_g \Rightarrow f \in \sqrt{(g)}$$

e quindi per qualche $b \in A$, $m > 0$ si ha $f^m = bg$. Ma

$$f^m = bg \Rightarrow \frac{ab}{f^m} = \frac{a}{g} \Rightarrow \frac{a}{g} \in A_f$$

$\square$

Sia $U = X \setminus V(\mathfrak{a})$ un aperto; possiamo supporre $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Allora utilizzando il Lemma si ha:

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \varprojlim_{U_f \subset U} A_f = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} A_f$$

$$= \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} \Big[\bigcap_{f \notin \mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} \Big] = \bigcap_{x \in U} A_{\mathfrak{p}_x}$$

Questa descrizione dice che $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ consiste di tutte le funzioni razionali che sono regolari in ogni punto di U. In particolare:

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = A$$

Se $A = k[X_1, \dots, X_n]$ dove k è un campo poniamo:

$$\mathbb{A}^n_k := \mathrm{Spec}(A)$$

e chiamiamo $\mathbb{A}^n_k$ l'*n-spazio affine su k.*

Esempio 7.5. *Domini a ideali principali.* I punti di $X = \mathrm{Spec}(A)$ sono η, il punto generico, e gli ideali primi non nulli, che sono tutti principali. I chiusi sono tutti della forma $V(f)$ e quindi tutti gli aperti sono principali. In questo caso rientra $\mathbb{A}^1 := \mathrm{Spec}(k[X])$, dove k è un campo: è la *retta affine su k*. Un altro esempio è $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Un altro caso particolare si ha quando A è un dominio di valutazione discreta. In questo caso

$$\mathrm{Spec}(A) = \{\eta, [\mathfrak{m}]\}$$

dove $\mathfrak{m} \subset A$ è l'ideale massimale e l'unico punto chiuso di X.

Esempio 7.6. Sia $A = k[t]/(t^n)$, dove k è un campo, t un'indeterminata e $n \geq 2$. $X = \mathrm{Spec}(A)$ consiste di un solo punto perché A è un anello locale artiniano. L'anello $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = A$ contiene l'elemento $\bar{t}$ che è $\neq 0$ ma che si annulla nell'unico punto di X.

8. La categoria degli schemi affini

Uno spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ si dice uno *schema affine* se esiste un anello commutativo A tale che $(X, \mathcal{O}_X)$ sia isomorfo, come spazio anellato, a $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$.

Sia $\varphi : A \to B$ un omomorfismo di anelli. Poiché $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \subset A$ è un ideale primo per ogni ideale primo $\mathfrak{p} \subset B$, otteniamo un'applicazione:

$$^a\varphi : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A), \quad [\mathfrak{p}] \longmapsto [\varphi^{-1}(\mathfrak{p})]$$

Proposizione 8.1. *L'applicazione $^a\varphi$ è continua.*

Dimostrazione. Basta verificare che $^a\varphi^{-1}(U_\alpha) \subset \mathrm{Spec}(B)$ è aperto per ogni $\alpha \in A$. Ma:

$$\begin{aligned} ^a\varphi^{-1}(U_\alpha) &= \{y \in \mathrm{Spec}(B) : \ ^a\varphi(y) \in U_\alpha\} \\ &= \{y \in \mathrm{Spec}(B) : \alpha \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p}_y)\} = U_{\varphi(\alpha)} \end{aligned}$$

□

Ora associamo a $\varphi : A \to B$ un morfismo di spazi anellati:

$$(f, f^\natural) : (\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$$

nel modo seguente. Poniamo $f = {}^a\varphi : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$. Definiamo

$$f^\natural : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}$$

sugli aperti principali nel modo seguente. Sia $U_\alpha \subset \mathrm{Spec}(A)$ un aperto principale. Allora $f^{-1}(U_\alpha) = {}^a\varphi^{-1}(U_\alpha) = U_{\varphi(\alpha)}$ e quindi

$$f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}(U_\alpha) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}(U_{\varphi(\alpha)}) = B_{\varphi(\alpha)}$$

Allora

$$f^\natural(U_\alpha) : A_\alpha = \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}) \longrightarrow \Gamma(U_\alpha, f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}) = B_{\varphi(\alpha)}$$

è l'omomorfismo naturale indotto da $\varphi : A \to B$. Otteniamo in questo modo un omomorfismo di $\mathcal{B}$-fasci. In modo naturale possiamo estenderlo ad un omomorfismo $f^\natural$ di fasci.

Viceversa, dato un omomorfismo di schemi affini:

$$f : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

viene indotto un omomorfismo

$$\varphi := f^\natural(\mathrm{Spec}(A)) : A = \Gamma(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Spec}(A), f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}) = B$$

È immediato verificare che il morfismo di spazi anellati $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ indotto da φ è proprio f.

Pertanto deduciamo da quanto precede che:

Teorema 8.2. *La categoria (Aff) degli schemi affini è isomorfa ad $(An)^\circ$, la duale della categoria degli anelli commutativi.*

Esercizio 8.3. Sia $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, con le operazioni definite componente per componente. Si verifichi che, se p, q sono numeri primi, l'ideale $(p) \times (q)$ non è primo in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mentre $(p) \times \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \times (q)$ lo sono. Si deduca che

$$\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \coprod \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$$

dove le inclusioni $f_i : \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ sono i morfismi indotti dalle proiezioni

$$\pi_i : A \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2$$

9. Schemi

Definizione 9.1. Uno schema è uno spazio anellato in anelli locali $(X, \mathcal{O}_X)$ che possiede un ricoprimento con aperti $\{U_i\}_{i \in I}$ tale che $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$ sia uno schema affine per ogni $i \in I$.

Definendo i morfismi di schemi come i loro morfismi come spazi anellati in anelli locali, gli schemi costituiscono una categoria, che denotiamo con (Sch).

Gli schemi affini sono schemi. Ogni aperto U di uno schema affine X, dotato del fascio $\mathcal{O}_{X|U}$, è uno schema perché U può essere ricoperto con aperti principali di X, che sono schemi affini. In generale un tale schema U non è affine.

Se $f : X \to Y$ è un morfismo di schemi, diremo che X è un Y-*schema*, oppure uno schema su Y. Se $Y = \mathrm{Spec}(A)$, diremo che X è un A-schema.

Esercizio 9.2. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo di schemi e sia $x \in X$. Dimostrare che f induce un omomorfismo locale di anelli locali:

$$f_x^\natural : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

in modo funtoriale, cioè compatibile con la composizione di morfismi.

Diamo ora un esempio di schema che non è affine.

Esempio 9.3. *Lo spazio proiettivo* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$, $n \geq 1$.
Lo descriveremo come l'unione di $n+1$ copie $U_0, \dots, U_n$ di

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[Y_1, \dots, Y_n])$$

Introduciamo indeterminate $X_0, \dots, X_n$ e definiamo

$$U_i = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]\right)$$

L'identificazione di U_i con U_j lungo $U_i \cap U_j$ avviene tramite l'identità tra gli anelli:

$$\mathbb{Z}\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}, \frac{X_i}{X_j}\right] = \mathbb{Z}\left[\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j}, \frac{X_j}{X_i}\right]$$

Sostituendo $\mathbb{Z}$ con un campo $\mathbf{k}$ otteniamo lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ su $\mathbf{k}$.

Esempio 9.4. Consideriamo indeterminate $X_0, X_1, \dots, X_n$ e il sottoanello $B = \mathbf{k}[X_0^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ del campo $\mathbf{k}(X_1, \dots, X_n)$. Allora

$$\operatorname{Spec}(B) = (\mathbf{k}^*)^{n+1}$$

Consideriamo gli $n+1$ sottoanelli:

$$\begin{aligned} B_0 &= \mathbf{k}[X_0^{-1}X_1, \dots, X_0^{-1}X_n], \\ B_1 &= \mathbf{k}[X_1^{-1}X_0, \dots, X_1^{-1}X_n], \\ B_2 &= \mathbf{k}[X_2^{-1}X_0, \dots, X_2^{-1}X_n], \\ \dots, B_n &= \mathbf{k}[X_n^{-1}X_0, \dots, X_n^{-1}X_{n-1}] \end{aligned}$$

Ognuno di essi è isomorfo ad un anello di polinomi in n indeterminate e quindi

$$\operatorname{Spec}(B_i) \cong \mathbf{k}^n$$

Le inclusioni $B_i \subset B$ inducono inclusioni aperte $(\mathbf{k}^*)^n \subset \mathbf{k}^n$. Non è difficile verificare che il più piccolo sottoanello di B contenente B_i e B_j è

$$B_{ij} := \mathbf{k}[X_j X_i^{-1}, X_j^{-1}X_0, \dots, X_j^{-1}X_n] = \mathbf{k}[X_i X_j^{-1}, X_i^{-1}X_0, \dots, X_i^{-1}X_n]$$

e quindi

$$\operatorname{Spec}(B_j) \supset \operatorname{Spec}(B_{ij}) \subset \operatorname{Spec}(B_i),$$

Da queste relazioni segue facilmente che gli $n+1$ spazi affini $\mathrm{Spec}(B_0), \ldots, \mathrm{Spec}(B_n)$ coincidono a due a due lungo gli $\mathrm{Spec}(B_{ij})$. La loro unione è $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.

10. Schemi e prevarietà

Diamo alcune definizioni.

Definizione 10.1. Uno schema X si dice *ridotto* se $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ è un anello ridotto, cioè privo di elementi nilpotenti, per ogni aperto $U \subset X$. Diremo che X è irriducibile se lo è come spazio topologico, cioè se non è unione di due sottoinsiemi chiusi propri e non vuoti.

Lemma 10.2. *Sia X uno schema, $Z \subset X$ un sottoinsieme chiuso e irriducibile. Allora esiste un unico $z \in Z$ tale che $Z = \overline{z}$.*

Dimostrazione. Sia $U \subset X$ affine tale che $Z \cap U \neq \emptyset$. Se $z \in Z$ è denso in Z allora $z \in U \cap Z$ e $Z \cap U \subset \overline{z}$. Viceversa, se $z \in U \cap Z$ è tale che $Z \cap U \subset \overline{z}$ allora $Z = \overline{z}$. Pertanto il lemma segue dal Corollario 6.6. □

Un'altra definizione che ci servirà è la seguente.

Definizione 10.3. Sia k un campo. Un k-schema X si dice *di tipo finito* su k se X possiede un ricoprimento finito con aperti affini $\mathcal{U} = \{U_i = \mathrm{Spec}(A_i)\}$ tali che ogni A_i sia una k-algebra di tipo finito.

Sussiste la seguente

Proposizione 10.4. *Un k-schema X è di tipo finito se e solo se per ogni aperto affine $U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$ la k-algebra A è di tipo finito.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Sia k un campo. Con il termine *k-prevarietà* intenderemo una k-varietà quasi-proiettiva come definita nel corso di Geometria Algebrica 1. Quindi una k-prevarietà X è un sottoinsieme localmente chiuso e irriducibile dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^r_k$ per qualche r. Una tale X può essere dotata di un fascio di anelli $\mathcal{O}_X$, il suo *fascio strutturale*, definendo:

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \{f \in K(X) : f \text{ è regolare in ogni punto di } U\}$$

In questo paragrafo vogliamo stabilire che relazione esiste tra k-schemi e k-prevarietà nel caso di un campo algebricamente chiuso. Pertanto in questo paragrafo d'ora in poi supporremo che $k = \overline{k}$ sia algebricamente chiuso.

Sia X una k-prevarietà. Associamo ad X un k-schema $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ nel modo seguente. Ad ogni sottoinsieme irriducibile $W \subset X$ di dimensione positiva associamo un simbolo $[W]$ e definiamo $\mathcal{X}$ come l'unione di X con tutti questi simboli. Per ogni aperto $U \subset X$ sia $U^* \subset \mathcal{X}$ l'unione di U e di tutti i $[W]$ tali che $U \cap W \neq \emptyset$. Allora si verifica facilmente che i seguenti fatti sono veri:

(a) $(\bigcup_\alpha U_\alpha)^* = \bigcup_\alpha U_\alpha^*$.
(b) $(U_1 \cap U_2)^* = U_1^* \cap U_2^*$.
(c) $U^* \cap X = U$.

Quindi $\mathcal{T}_{\mathcal{X}} = \{U^*\}$ è una topologia su $\mathcal{X}$ che per restrizione induce la topologia di Zariski $\mathcal{T}_X$ su X. Inoltre la corrispondenza

$$U \mapsto U^*$$

è una biezione tra $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$. Si noti che X ed $\mathcal{X}$ non sono omeomorfi in quanto i loro insiemi sostegno non si corrispondono biunivocamente.

Ora definiamo un fascio di anelli $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ su $\mathcal{X}$ ponendo:

$$\Gamma(U^*, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

per ogni aperto $U \subset X$. Allora:

Lemma 10.5. $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ *è un k-schema ridotto e irriducibile.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Consideriamo ora un morfismo di k-prevarietà $F : X_1 \to X_2$. Estendiamolo ad un'applicazione:

$$\mathcal{F} : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$$

ponendo $\mathcal{F} = F$ su X_1 e, per ogni $W \subset X_1$ irriducibile di dimensione positiva:

$$\mathcal{F}([W]) = \begin{cases} F(W) & \text{se } F(W) \text{ è un punto} \\ [\overline{F(W)}] & \text{se } \dim(\overline{F(W)}) > 0 \end{cases}$$

Se $U_2^* \subset \mathcal{X}_2$ si verifica subito che

$$\mathcal{F}^{-1}(U_2^*) = F^{-1}(U_2)^*$$

e quindi $\mathcal{F}$ è continua. Infine, per ogni aperto $U_2^* \subset \mathcal{X}_2$, definiamo

$$\Gamma(U_2^*, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_2}) \longrightarrow \Gamma(F^{-1}(U_2), \mathcal{O}_{X_1})$$

come la composizione degli omomorfismi seguenti:

$$\Gamma(U_2^*, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_2}) = \Gamma(U_2, \mathcal{O}_{X_2}) \to \Gamma(F^{-1}(U_2), \mathcal{O}_{X_1}) = \Gamma(\mathcal{F}^{-1}(U_2^*), \mathcal{O}_{\mathcal{X}_1})$$

Si definisce così un omomorfismo $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_2} \to \mathcal{F}_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}_1}$ e pertanto abbiamo associato ad F un morfismo $\mathcal{F} : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$. In conclusione abbiamo dimostrato:

Proposizione 10.6. *La costruzione precedente definisce un funtore covariante:*

$$(k\text{-}prevarietà) \longrightarrow (k\text{-}schemi\ ridotti\ irriducibili\ di\ tipo\ finito)$$

È possibile dimostrare che il funtore che abbiamo definito è un isomorfismo di categorie. Si rinvia a [5] per i dettagli. Di conseguenza possiamo in sostanza identificare le due categorie. Per questo motivo d'ora in poi un k-schema ridotto irriducibile e di tipo finito su k algebricamente chiuso verrà chiamato una *k-varietà*.

Utilizzando la Proposizione 10.6 possiamo introdurre la nozione di *dimensione* di una k-varietà X definendola uguale a quella della corrispondente k-prevarietà. La denoteremo con $\dim(X)$. Se $\dim(X) = 1$ (risp. $\dim(X) = 2$) chiameremo X una *curva* (risp. una *superficie*).

11. Morfismi da uno schema ad uno schema affine

È facile descrivere i morfismi da uno schema qualsiasi a valori in uno schema affine, come mostra la proposizione che segue.

Proposizione 11.1. *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno schema e $Y = \operatorname{Spec}(A)$ uno schema affine. Allora l'applicazione naturale*

$$\Phi : \operatorname{Hom}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, \mathcal{O}_X(X)), \quad (f, f^\natural) \mapsto f^\natural(Y)$$

è una biezione.

Dimostrazione. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento affine di X. Per quanto visto nel paragrafo 8 la corrispondenza

$$\operatorname{Hom}(U_i, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, \mathcal{O}_X(U_i))$$

è una biezione. Inoltre per ogni $i, j \in I$ abbiamo un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Hom}(U_i, Y) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(A, \mathcal{O}_X(U_i)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Hom}(U_i \cap U_j, Y) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(A, \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))
\end{array}$$

Dato $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, \mathcal{O}_X(X))$, gli restano associati omomorfismi

$$\varphi_i : \ A \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{\rho^X_{U_i}} \mathcal{O}_X(U_i)$$

Ogni φ_i induce un morfismo ${}^a\varphi_i : U_i \to Y$, e due tali morfismi coincidono su ogni $U_i \cap U_j$ affine, per il diagramma precedente. Quindi la famiglia $\{{}^a\varphi_i\}$ si incolla dando luogo ad un morfismo $f : X \to Y$. Per costruzione $\Phi(f) = \varphi$ e pertanto Φ è suriettiva.

D'altra parte, se $\Phi(f) = \Phi(g) =: \varphi$ e $f \neq g$, cioè se esiste $x \in X$ tale che $f(x) \neq g(x)$, sia $i \in I$ tale che $x \in U_i$. Allora sia $f_{|U_i}$ che $g_{|U_i}$ sono determinati da φ_i, una contraddizione. □

Due casi particolari della proposizione sono degni di nota.

Corollario 11.2. (i) $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ *è un oggetto finale per la categoria* (Sch).

(ii) *Ogni schema* X *possiede un morfismo canonicamente definito:*

$$X \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$$

Dimostrazione. (i) Per ogni anello R esiste un unico omomorfismo $\mathbb{Z} \longrightarrow R$.

(ii) L'omomorfismo è quello indotto dall'identità $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(X)$. □

Esempio 11.3. Se $X = \mathrm{Spec}(K)$, con K campo, il morfismo

$$X \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$$

manda l'unico punto di X nel'ideale generato dalla caratteristica di K.

Esercizio 11.4. Sia $A \to B$ un omomorfismo di anelli, e sia

$$Y = \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A) = Z$$

il corrispondente morfismo di schemi affini. Sia $X \to Z$ un Z-schema. Dimostrare che l'applicazione Φ della Proposizione 11.1 induce una corrispondenza biunivoca

$$\mathrm{Hom}_Z(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(B, \mathcal{O}_X(X))$$

12. Prodotti fibrati

Sia $\mathcal{A}$ una categoria e $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Ponendo:

$$h_X(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$$

e

$$h_X(f) : h_X(B) \longrightarrow h_X(A), \quad g \longmapsto g \cdot f$$

si definisce un funtore contravariante:

$$h_X : \mathcal{A} \longrightarrow Ins$$

che è chiamato il *funtore rappresentabile (contravariante) definito da* X. In modo analogo si definisce il *funtore rappresentabile (covariante) definito da* X

$$h^X : \mathcal{A} \longrightarrow Ins$$

ponendo $h^X(A) = \mathrm{Hom}(X, A)$ per ogni $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Più in generale, si dice *rappresentabile* un funtore covariante (risp. contravariante)

$$F : \mathcal{A} \longrightarrow Ins$$

che è isomorfo ad h^X (risp. h_X) per qualche $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Diremo in tal caso che F *è rappresentato da* X ovvero che X *rappresenta* F.

I funtori rappresentabili sono generalmente definiti da qualche proprietà/costruzione per la quale esiste un oggetto universale: sarà questo oggetto a rappresentare il funtore.

Consideriamo in $\mathcal{A}$ un diagramma:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

ed il funtore che associa a $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ le coppie di morfismi $(f, g) \in \mathrm{Hom}(T, X) \times \mathrm{Hom}(T, Y)$ che rendono commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Un oggetto che rappresenta questo funtore, se esiste, è unico a meno di isomorfismo unico; esso viene chiamato *prodotto fibrato* relativo al diagramma dato e si denota $X \times_Z Y$. Se $\mathcal{A}$ possiede un oggetto finale F e $Z = F$ allora $X \times_Z Y$ si chiama *prodotto di* X *per* Y e si denota $X \times Y$.

La nozione duale è quella di *coprodotto fibrato*.

Esempio 12.1. I prodotti fibrati e i coprodotti fibrati sono casi particolari di limiti proiettivi e di limiti induttivi. Sia $\xi : (I, \leq) \to \mathcal{A}$ un sistema induttivo. Gli possiamo associare il funtore covariante

$$F_\xi : \mathcal{A} \longrightarrow Ins$$

che associa a $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ l'insieme $F_\xi(B)$ costituito da tutte le famiglie

$$\{\varphi : A_i \to B\}$$

compatibili con ξ. Se il limite induttivo $\lim_{\to} \xi$ esiste allora rappresenta il funtore F_ξ.

Considerazioni analoghe possono farsi per i limiti proiettivi (in questo caso si ha un funtore contravariante rappresentabile se il $\lim_{\leftarrow} \xi$ esiste).

Proposizione 12.2. *Il prodotto tensoriale di algebre è il coprodotto fibrato nella categoria degli anelli. Dualmente nella categoria degli schemi affini si ha:*

$$\mathrm{Spec}(B) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(C) = \mathrm{Spec}(B \otimes_A C)$$

per ogni coppia di A-algebre B, C.

In realtà vale una proprietà più generale e cioè che $\mathrm{Spec}(B \otimes_A C)$ è il prodotto fibrato nella categoria degli schemi. Questo può essere visto facilmente utilizzando l'esercizio 11.4.

Infine, utilizzando ricoprimenti affini e la proposizione precedente, si dimostra che nella categoria degli schemi i prodotti fibrati esistono. Per dettagli si rimanda al testo [5].

Esempio 12.3. Tra i più importanti esempi di prodotti fibrati troviamo le *fibre di un morfismo*. Supponiamo assegnato un morfismo $f : X \to Y$ di schemi. Sia $y \in Y$ e sia $k(Y) = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}$ il campo residuo del punto. Sia

$$\mathrm{Spec}(k(y) \longrightarrow Y$$

il morfismo definito mandando in y l'unico punto di $\mathrm{Spec}(k(y))$ e definendo

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k(y))}$$

come l'ovvio omomorfismo. La *fibra di f al di sopra del punto y* è per definizione il prodotto fibrato

$$f^{-1}(y) := \mathrm{Spec}(k(y)) \times_Y X$$

definito dal diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(k(y)) \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(k(y)) \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

13. Coomologia degli schemi affini

Se X è uno schema, un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli $\mathcal{F}$ si dice un *fascio algebrico*. Sia A un anello, $M \in mod(A)$ ed $X = \mathrm{Spec}(A)$. Definiamo un fascio algebrico $\widetilde{M}$ su $X = \mathrm{Spec}(A)$ definendolo sulla base $\mathcal{B}$ degli aperti principali nel modo seguente:

$$\Gamma(U_f, \widetilde{M}) := M_f$$

Si verifica senza difficoltà che in questo modo si ottiene un fascio su $\mathcal{B}$ il quale si estende ad un fascio su X nel modo usuale (Prop. 2.1). Un fascio algebrico della forma $\widetilde{M}$ si dice *quasi-coerente*. Se M è un

A-modulo di presentazione finita, cioè può essere descritto mediante una presentazione della forma:

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \to 0$$

allora $\widetilde{M}$ si dice *coerente*.

Se X è uno schema, un fascio algebrico $\mathcal{F}$ su X si dice *quasi-coerente* (rispettivamente *coerente*) se esiste un ricoprimento affine $\mathcal{U}$ di X tale che $\mathcal{F}_{|U}$ sia quasi-coerente (risp. coerente) per ogni $U \in \mathcal{U}$. Ricordiamo che $\mathcal{F}_{|U}$ è la *restrizione* di $\mathcal{F}$ ad U, cioè il fascio algebrico su U definito da

$$\Gamma(V, \mathcal{F}_{|U}) = \Gamma(V, \mathcal{F})$$

Il risultato principale riguardante la coomologia dei fasci algebrici su una varietà affine è il seguente

Teorema 13.1 (Serre)**.** *Se X è una varietà affine ed $\mathcal{F}$ un fascio algebrico quasi-coerente su X allora*

$$H^j(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \textit{per ogni } j \geq 1$$

Questo teorema può essere dimostrato in diversi modi. In [3] si dà la dimostrazione nel caso in cui A è noetheriano, utilizzando proprietà dei moduli iniettivi su A. Qui seguiremo un metodo diverso, dovuto a Kempf, che consente di evitare l'ipotesi di noetherianità. Ci occorrono alcune premesse.

Sia X uno spazio topologico ed $\mathcal{F} \in Ab(X)$ un fascio di gruppi abeliani. Fissato un aperto $U \subset X$ definiamo un nuovo fascio ${}_U\mathcal{F}$ ponendo

$$\Gamma(V, {}_U\mathcal{F}) = \Gamma(V \cap U, \mathcal{F}) = \Gamma(U \cap V, \mathcal{F}_{|U})$$

per ogni aperto $V \subset X$; le restrizioni sono definite nel modo ovvio. Se denotiamo con $j : U \to X$ l'inclusione allora dalla definizione segue subito che si ha ${}_U\mathcal{F} = j_*\mathcal{F}_{|U}$ e un omomorfismo:

$$\mathcal{F} \longrightarrow {}_U\mathcal{F}$$

Proposizione 13.2. *Sia X spazio topologico e $\mathcal{B}$ una base degli aperti chiusa rispetto alle intersezioni finite. Sia $\mathcal{F} \in Ab(X)$ e supponiamo che per qualche $i \geq 1$ si abbia*

$$H^j(W, \mathcal{F}) = 0$$

per ogni $0 < j < i$ e per ogni $W \in \mathcal{B}$ (la condizione è vuota se $i = 1$). Allora per ogni $\sigma \in H^i(X, \mathcal{F})$ è possibile trovare un ricoprimento $X = \bigcup W_\alpha$ con $W_\alpha \in \mathcal{B}$ tale che l'immagine di σ in $H^i(X, {}_{W_\alpha}\mathcal{F})$ sia zero per ogni α.

Dimostrazione. Per induzione su i. Supponiamo $i = 1$. Per ogni $W \in \mathcal{B}$ abbiamo un diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}(\mathcal{F})/\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & {}_W\mathcal{F} \arrow[r] & {}_W\mathcal{D}(\mathcal{F}) \arrow[r] & {}_W\mathcal{D}(\mathcal{F})/{}_W\mathcal{F} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{8}$$

La classe $\sigma \in H^1(X, \mathcal{F})$ proviene da una sezione $\tau \in \Gamma(X, \mathcal{D}(\mathcal{F})/\mathcal{F})$ perché $H^1(X, \mathcal{D}(\mathcal{F})) = 0$. Per l'esattezza della prima riga e poiché $\mathcal{B}$ è una base è possibile trovare un ricoprimento $\{W_\alpha\}$ di X con elementi di $\mathcal{B}$ tale che $\tau_{|W_\alpha}$ si sollevi ad un sezione di $\mathcal{D}(F)$ su W_α. Segue che, per ogni α, l'immagine di τ in $\Gamma(X, {}_{W_\alpha}\mathcal{D}(\mathcal{F})/{}_{W\alpha}\mathcal{F})$ si solleva ad una sezione di ${}_{W\alpha}\mathcal{D}(\mathcal{F})$ su X. Ma allora, per la commutatività del diagramma, l'immagine di σ in $H^1(X, {}_{W_\alpha}\mathcal{F})$ è zero.

Prima di procedere con il passo induttivo osserviamo che per ogni $W \in \mathcal{B}$ si ha un isomorfismo:

$$ {}_W\mathcal{D}(\mathcal{F})/{}_W\mathcal{F} \cong {}_W(\mathcal{D}(\mathcal{F})/\mathcal{F}) \tag{9}$$

Infatti per ogni aperto $V \in \mathcal{B}$ sufficientemente piccolo, posto $U = V \cap W$, si ha un diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Gamma(U, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Gamma(U, \mathcal{D}(\mathcal{F})) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Gamma(U, \mathcal{D}(\mathcal{F})/\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Gamma(V, {}_W\mathcal{F}) \arrow[r] & \Gamma(V, {}_W\mathcal{D}(\mathcal{F})) \arrow[r] & \Gamma(V, {}_W(\mathcal{D}(\mathcal{F})/\mathcal{F})) & \end{tikzcd}$$

e quindi la (9) è vera.

Supponiamo $i \geq 2$. Allora dalla prima riga del diagramma (8) e dalle ipotesi su $\mathcal{F}$ segue che si hanno isomorfismi

$$H^{j-1}(W, \mathcal{D}(\mathcal{F})/\mathcal{F}) \cong H^j(W, \mathcal{F}) = 0$$

per $1 < j - 1 < i$ perché $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ è fiacco.

Dimostriamo il passo induttivo. Per ogni $W \in \mathcal{B}$ abbiamo un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} H^{i-1}(X, \mathcal{D}(\mathcal{F})/\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(X, \mathcal{F}) \arrow[d] \\ H^{i-1}(X, {}_W(\mathcal{D}(\mathcal{F})/\mathcal{F})) \arrow[r] & H^i(X, {}_W\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

Le frecce orizzontali sono isomorfismi perché $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ e ${}_W\mathcal{D}(\mathcal{F})$ sono fiacchi. La conclusione segue ora dall'ipotesi induttiva. $\square$

Lemma 13.3. *Sia* $X = \mathrm{Spec}(A)$*,* $M \in mod(A)$ *e* $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ *il corrispondente modulo quasi coerente. Sia* $f \in A$*. Allora* ${}_{U_f}\mathcal{F} = \widetilde{M_f}$*. In particolare* ${}_{U_f}\mathcal{F}$ *è quasi-coerente.*

Dimostrazione. Per ogni aperto principale U_g si ha:

$$\Gamma(U_g,\ {}_{U_f}\mathcal{F}) = \Gamma(U_g \cap U_f, \mathcal{F}) = \Gamma(U_{fg}, \mathcal{F}) = M_{fg} = (M_f)_g = \Gamma(U_g, \widetilde{M_f})$$

□

Dimostrazione del Teorema 13.1. Sia $\mathcal{B}$ la base di X costituita dagli aperti principali e sia $X = \bigcup_\alpha W_\alpha$ un ricoprimento finito con $W_\alpha = U_{f_\alpha} \in \mathcal{B}$. Per ogni $M \in mod(A)$ si ha un'inclusione $M \subset \bigoplus_\alpha M_{f_\alpha}$. Posto $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ se ne deduce una successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \bigoplus\ {}_{W_\alpha}\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0 \tag{10}$$

la quale, essendo una successione esatta di fasci quasi-coerenti, induce una successione esatta sulle sezioni globali. Pertanto

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \bigoplus H^1(X,\ {}_{W_\alpha}\mathcal{F}) \tag{11}$$

è esatta. Procediamo per induzione su i e supponiamo $i = 1$. Per la Proposizione 13.2, per ogni $\sigma \in H^1(X, \mathcal{F})$ è possibile trovare un ricoprimento $\{W_\alpha\}$ tale che L'immagine di σ in $\bigoplus H^1(X,\ {}_{W_\alpha}\mathcal{F})$ sia zero. Dall'iniettività della (11) segue che $\sigma = 0$. Quindi $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$.

Supponiamo $i \geq 2$. Per l'ipotesi induttiva $\mathcal{F}$ soddisfa le ipotesi della Proposizione 13.2. Sia $\sigma \in H^i(X, \mathcal{F})$ e sia $\{W_\alpha\}$ un ricoprimento tale che l'immagine di σ in $\bigoplus H^i(X,\ {}_{W_\alpha}\mathcal{F})$ sia zero. Dalla successione esatta (11) e dall'ipotesi induttiva segue che

$$0 \longrightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \bigoplus H^i(X,\ {}_{W_\alpha}\mathcal{F})$$

è esatta. Quindi $\sigma = 0$, e pertanto $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$. □

Possiamo generalizzare il Teorema 13.1 introducendo la seguente

Definizione 13.4. Un morfismo $f : X \to Y$ di schemi si dice *affine* se esiste un ricoprimento affine $\mathcal{U}$ di Y tale che l'aperto $f^{-1}(U) \subset X$ sia affine per ogni $U \in \mathcal{U}$.

Ogni immersione chiusa o aperta $X \subset Y$ è un morfismo affine. Se Z è uno schema affine e Y uno schema qualunque allora la proiezione

$$Z \times Y \to Y$$

è un morfismo affine. Se $\mathcal{F}$ è un fascio quasi-coerente su X e $f : X \to Y$ è affine allora $f_*\mathcal{F}$ è quasi-coerente.

Teorema 13.5. *Se $f : X \to Y$ è un morfismo affine e $\mathcal{F}$ è un fascio quasi-coerente su X allora*
$$H^n(Y, f_*\mathcal{F}) \cong H^n(X, \mathcal{F})$$
per ogni $n \geq 0$.

Dimostrazione. Sia $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}^\bullet$ una risoluzione di $\mathcal{F}$ con fasci fiacchi. Per ogni aperto affine $V \subset Y$ la successione
$$0 \to \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F}) \to \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F}^0) \to \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F}^1) \to$$
è esatta perché $f^{-1}(V)$ è affine e per il Teorema 13.1. Quindi
$$0 \to f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{F}^\bullet$$
è una risoluzione di $f_*\mathcal{F}$ con fasci fiacchi. Quindi:
$$\begin{aligned} H^n(Y, f_*\mathcal{F}) &= H^n(\Gamma(Y, f_*\mathcal{F}^\bullet) \\ &= H^n(\Gamma(X; \mathcal{F}^\bullet)) \\ &= H^n(X, \mathcal{F}) \end{aligned}$$
□

14. Coomologia di Cech

In questo paragrafo introdurremo un'altra definizione di coomologia dei fasci, la coomologia di Cech, e per gli schemi la confronteremo con la coomologia definita in precedenza.

Sia X uno spazio topologico, e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Supporremo che I sia stato totalmente ordinato. In pratica considereremo solo ricoprimenti finiti, ma le definizioni e i risultati sono validi nell'ipotesi più generale. Sia $\mathcal{F} \in Ab(X)$ un fascio di gruppi abeliani. Nel seguito utilizzeremo la notazione:
$$U_{i_0 \ldots i_n} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}$$
Definiamo un complesso di gruppi abeliani:
$$\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \ 0 \longrightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} \cdots\cdots \tag{12}$$
ponendo
$$\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \cdots < i_n} \Gamma(U_{i_0 \ldots i_n}, \mathcal{F})$$
e definendo $\delta^n : \check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{C}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ nel modo seguente. Per ogni $\sigma = (\sigma_{i_0 \cdots i_n}) \in \check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ definiamo $\delta^n \sigma = ((\delta^n \sigma)_{i_0 \cdots i_{n+1}})$ ponendo:
$$(\delta^n \sigma)_{i_0 \cdots i_{n+1}} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \sigma_{i_0 \cdots \hat{i}_j \cdots i_{n+1}}$$

dove il simbolo $\hat{i}_j$ significa che l'indice i_j viene omesso, e dove, per semplificare la scrittura, si è scritto $\sigma_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_{n+1}}$ invece di

$$\rho^{U_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_{n+1}}}_{U_{i_0\cdots i_{n+1}}}(\sigma_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_{n+1}})$$

Si osservi che *se* I *è finito allora* $\check{C}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})=0$ *per ogni* $n\geq|I|$.

Il fatto che (12) è un complesso discende dal seguente

Lemma 14.1. $\delta^{n+1}\cdot\delta^n=0$ *per ogni* $n\geq 0$.

Dimostrazione. Esercizio. □

Il complesso (12) è chiamato *complesso di Cech di* $\mathcal{F}$ *relativo al ricoprimento* $\mathcal{U}$. Il gruppo

$$\check{H}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}):=H^n(\check{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}))$$

è chiamato n*-esimo gruppo di coomologia di Cech di* $\mathcal{F}$ *relativo al ricoprimento* $\mathcal{U}$.

Proposizione 14.2. *L'omomorfismo*

$$\epsilon:\Gamma(X,\mathcal{F})\to\check{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}),\quad \sigma\mapsto(\sigma_{|U_i})$$

induce un isomorfismo

$$\Gamma(X,\mathcal{F})\cong\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

Dimostrazione. È conseguenza immediata della proprietà dell'incollamento. □

Lemma 14.3. *Supponiamo che* $U_s=X$ *per qualche* $s\in I$. *Allora il complesso*

$$0\to\Gamma(X,\mathcal{F})\to\check{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \tag{13}$$

è omotopicamente banale e quindi esatto.

Dimostrazione. Definiamo un'operatore di omotopia:

$$\Gamma(X,\mathcal{F})\xleftarrow{k_0}\check{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\xleftarrow{k_1}\check{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\xleftarrow{k_2}\cdots$$

ponendo $k_0(\alpha)=\alpha_s$, e

$$k_n(\alpha)_{i_0\cdots i_{n-1}}=(-1)^h\alpha_{i_0\cdots s\cdots i_{n-1}}$$

dove

$$i_0<\cdots<i_h<s<i_{h+1}<\cdots<i_{n-1}$$

e si deve intendere $\alpha_{i_0\cdots s\cdots i_{n-1}}=0$ se $s\in\{i_0\cdots i_{n-1}\}$.

Per concludere la dimostrazione sarà sufficiente dimostrare che

$$k_{n+1}\cdot\delta^n+\delta^{n-1}\cdot k_n=\pm\mathrm{id}_{\check{C}^n}$$

Sia dunque $\alpha \in \check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Si ha:

$$\begin{aligned}(\delta^{n-1} \cdot k_n)(\alpha)_{i_0 \cdots i_n} &= \sum (-1)^j (k_n \alpha)_{i_0 \cdots \hat{i}_j \cdots i_n} \\ &= \sum_{i_j < s} (-1)^{j+h-1} \alpha_{i_0 \cdots \hat{i}_j \cdots s \cdots i_n} + \sum_{i_j > s} (-1)^{j+h} \alpha_{i_0 \cdots s \cdots \hat{i}_j \cdots i_n}\end{aligned} \tag{14}$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned}(k_{n+1} \cdot \delta^n)(\alpha)_{i_0 \cdots i_n} &= (-1)^h (\delta^n \alpha)_{i_0 \cdots s \cdots i_n} \\ &= \sum_{i_j < s} (-1)^{j+h} \alpha_{i_0 \cdots \hat{i}_j \cdots s \cdots i_n} + (-1)^{2h} \alpha_{i_0 \cdots i_n} + \sum_{i_j > s} (-1)^{j+h+1} \alpha_{i_0 \cdots s \cdots \hat{i}_j \cdots i_n}\end{aligned} \tag{15}$$

Sommando si trova:

$$(\delta^{n-1} \cdot k_n)(\alpha)_{i_0 \cdots i_n} + (k_{n+1} \cdot \delta^n)(\alpha)_{i_0 \cdots i_n} = \alpha_{i_0 \cdots i_n}$$

□

Ora vogliamo introdurre una versione fascificata del complesso (12). Per ogni $n \geq 0$ definiamo un fascio $\check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ponendo

$$\check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(V) = \check{C}^n(V \cap \mathcal{U}, \mathcal{F}_{|V})$$

dove $V \cap \mathcal{U}$ denota il ricoprimento $\{V \cap U_i\}_{i \in I}$ di V e $\mathcal{F}_{|V}$ è la restrizione di $\mathcal{F}$ a V; gli omomorfismi di restrizione sono definiti in modo ovvio. In modo parimenti ovvio, aperto per aperto, si definiscono omomorfismi:

$$\delta^n : \check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{\mathcal{C}}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

e si verifica che si ottiene un complesso di fasci:

$$\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : 0 \to \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to$$

È anche evidente come definire un omomorfismo di aumentazione:

$$\mathcal{F} \to \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Proposizione 14.4. *Il complesso*

$$0 \to \mathcal{F} \to \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \tag{16}$$

è una risoluzione di $\mathcal{F}$.

Dimostrazione. Se $V \subset X$ è un aperto sufficientemente piccolo esiste $s \in I$ tale che $V \subset U_s$, cioè tale che $U \cap U_s = V$. Ma allora il ricoprimento $V \cap \mathcal{U}$ soddisfa le ipotesi del Lemma 14.3 con $X = V$ e quindi

$$0 \to \Gamma(V, \mathcal{F}) \to \Gamma(V, \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \to \Gamma(V, \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \to \cdots$$

è esatto. □

Il risultato principale riguardante la coomologia di Cech per gli schemi è il seguente.

Teorema 14.5. *Sia X uno schema e $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_N\}$ un ricoprimento finito di X con aperti affini. Supponiamo che $U_{i_0 \cdots i_n} \subset X$ sia affine per ogni $i_0, \ldots, i_n \in \{0, \ldots, N\}$. Allora per ogni fascio quasi coerente $\mathcal{F}$ su X e per ogni $n \geq 0$ si ha:*

$$\check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong H^n(X, \mathcal{F})$$

Dimostrazione. Applicheremo la Proposizione 5.10 utilizzando la risoluzione (16). A tale scopo sarà sufficiente dimostrare che i fasci $\check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sono aciclici, cioè che

$$H^j(X, \check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = 0$$

per ogni $j \geq 1$ e per ogni $n \geq 0$. Per il modo in cui sono definiti abbiamo:

$$\check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{i_0 < \cdots < i_n} {}_{U_{i_0 \cdots i_n}}\mathcal{F}$$

ed è quindi sufficiente dimostrare che i fasci ${}_{U_{i_0 \cdots i_n}}\mathcal{F}$ sono aciclici. Sia $J : U_{i_0 \ldots i_n} \subset X$ l'inclusione. Si ha:

$${}_{U_{i_0 \cdots i_n}}\mathcal{F} = J_*(\mathcal{F}_{|U_{i_0 \cdots i_n}})$$

I fasci $\mathcal{F}_{|U_{i_0 \cdots i_n}}$ sono quasi-coerenti perché tale è $\mathcal{F}$ e l'inclusione aperta J è un morfismo affine. Quindi, applicando il Teorema 13.5

$$H^j(X, {}_{U_{i_0 \cdots i_n}}\mathcal{F}) = H^j(U_{i_0 \ldots i_n}, \mathcal{F}_{|U_{i_0 \cdots i_n}}) = 0$$

per $j \geq 1$. □

Corollario 14.6. *Supponiamo che lo schema X possa essere ricoperto con $N + 1$ aperti affini tali che ogni loro intersezione finita sia ancora affine. Allora si ha*

$$H^n(X, \mathcal{F}) = 0$$

per ogni $n \geq N + 1$ e per ogni un fascio quasi-coerente $\mathcal{F}$ su X.

Dimostrazione. È sufficiente osservare che $\check{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ se $n \geq N+1$ e applicare il Teorema 14.5. □

La condizione che l'intersezione di due aperti affini sia affine non è sempre verificata. Questa proprietà è collegata alla nozione di separatezza, che studieremo nel prossimo paragrafo.

Prima di concludere questo argomento dimostriamo un risultato che ci sarà utile successivamente.

Lemma 14.7. *Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X. Allora si ha un isomorfismo:*

$$H^1(X,\mathcal{F}) \cong \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

al variare di $\mathcal{U}$ tra tutti i ricoprimenti aperti di X.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X e sia

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r] & \mathcal{B}^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[d] & \\
 & & & \vdots &
\end{tikzcd} \tag{17}$$

l'inizio della risoluzione (14.4) di $\mathcal{F}$. Allora si ha:

$$\operatorname{coker}[H^0(X,\check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{B}^1)] = \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

Quindi dalla successione di coomologia della (25) deduciamo un'omomorfismo iniettivo:

$$c_{\mathcal{U}} : \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F})$$

Dalla Proposizione 13.2 segue che per ogni $\alpha \in H^1(X,\mathcal{F})$ esiste $\mathcal{U}$ tale che $\alpha \in \mathrm{Im}(c_{\mathcal{U}})$. Passando al limite si ottiene la tesi. $\square$

15. La coomologia dei fasci $\mathcal{O}(n)$

Denotiamo con $P = \mathbf{k}[X_0,\dots,X_r]$ l'anello dei polinomi su un campo $\mathbf{k}$. Considereremo P graduato; quindi scriveremo $P = \oplus_{n\geq 0} P_n$, dove P_n è lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado n. In questo paragrafo considereremo lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^r = \mathbb{P}^r_{\mathbf{k}}$ utilizzando la sua costruzione fatta nell'esempio 9.4 che si può riassumere così. Per ogni $i = 0,\dots,r$ si considera il localizzato P_{X_i}, che è a sua volta un anello graduato

$$P_{X_i} = \bigoplus_k P_{X_i,k}$$

ed è contenuto nel campo $\mathbf{k}(X_0,\dots,X_r)$. La componente omogenea di grado zero di P_{X_i} si identifica con $P_{X_i,0} = \mathbf{k}[X_i^{-1}X_0,\dots,X_i^{-1}X_r]$, che è un anello di polinomi in r variabili. Si ha inoltre:

$$\begin{aligned}(P_{X_i,0})_{X_jX_i^{-1}} &= \mathbf{k}[X_iX_j^{-1}, X_i^{-1}X_0, \dots, X_i^{-1}X_r] \\ &= \mathbf{k}[X_jX_i^{-1}, X_j^{-1}X_0, \dots, X_j^{-1}X_r] \\ &= (P_{X_j,0})_{X_iX_j^{-1}}\end{aligned}$$

Pertanto possiamo definire $\mathbb{P}^r_{\mathbf{k}}$ come l'unione degli $r+1$ spazi affini $\mathrm{Spec}(P_{X_i,0} \cong \mathbb{A}^r$, che a due a due si intersecano lungo $\mathrm{Spec}((P_{X_i,0})_{X_jX_i^{-1}})$. Questa definizione di $\mathbb{P}^r_{\mathbf{k}}$ a partire da P si denota con il simbolo $\mathrm{Proj}(P)$ e si presta ad essere generalizzata come ora vedremo.

Consideriamo un anello graduato $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$. Supponiamolo generato su A_0 dai suoi elementi omogenei di grado 1. Consideriamo elementi omogenei $z_0, \dots, z_r \in A_1$ che generano A e consideriamo gli schemi affini $X_i = \mathrm{Spec}(A_{z_i,0})$ dove $A_{z_i,0}$ è la componente omogenea di grado zero del localizzato (che è graduato) $A_{z_i} = \bigoplus_n A_{z_i,n}$. Gli X_i si incollano lungo i rispettivi aperti $X_{ij} = \mathrm{Spec}(A_{z_iz_j,0}$. Lo schema così ottenuto $X = X_0 \cup \dots \cup X_r$ si denota con $\mathrm{Proj}(A)$.

Sia $M = \oplus_n M_n$ un A-modulo graduato. Possiamo associargli un fascio quasi coerente $M^\sim$ su $X = \mathrm{Proj}(A)$ definendolo sugli aperti affini X_i come il fascio $\widetilde{M}_{z_i,0}$. Questi fasci si incollano dando luogo al fascio $M^\sim$. In particolare $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} = P^\sim$. Se M è finitamente generato come P-modulo allora $M^\sim$ è coerente (ma non vale il viceversa - si veda il prossimo paragrafo). Se per un fissato $n \in \mathbb{Z}$ definiamo

$$M(n) = \oplus_m M(n)_m := \oplus_m M_{n+m}$$

si ottiene un altro modulo graduato ed il corrispondente fascio quasi coerente $M(n)^\sim$. Una classe molto importante di fasci di questa forma è costituita dai fasci $\mathcal{O}(n)$ su $\mathbb{P}^r$, definiti, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, come

$$\mathcal{O}(n) = P(n)^\sim$$

I fasci $\mathcal{O}(n)$ sono evidentemente coerenti perché i moduli $P(n)$ sono liberi di rango uno. Il seguente teorema ne calcola la coomologia.

Teorema 15.1. (i) *$H^\ell(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(n)) = 0$ per ogni $\ell \neq 0, r$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}$.*

(ii)

$$H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(n)) = \begin{cases} P_n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

In particolare

$$\dim[H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(n))] = \begin{cases} \binom{n+r}{r} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

(ii) $H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(n)) = 0$ *per ogni* $n \geq -r$, *e*

$$H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(n)) \cong \langle X_0^{i_0} \cdots X_r^{i_r} : i_j \leq 0, \sum i_j = n + r + 1 \rangle$$

per ogni $n \leq -r - 1$. *Quindi:*

$$\dim[H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(n))] = \binom{-n-1}{r}, \quad n \leq -r - 1$$

In particolare $H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(-r-1)) \cong \mathbf{k}$

(iv) *La moltiplicazione definisce una forma bilineare non degenere:*

$$H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(n)) \times H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(-n-r-1)) \to H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(-r-1)) \cong \mathbf{k}$$

Dimostrazione. Denotiamo con $U_i = \{[X_0, \ldots, X_r] : X_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^r$ l'i-esimo aperto fondamentale. Allora:

$$\Gamma(U_i, \mathcal{O}(n)) = \left\{ \frac{f}{X_i^k} : f \in P_{n+k} \right\}$$

Consideriamo il fascio quasi-coerente

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(n)$$

Poiché la coomologia commuta con le somme dirette si ha:

$$H^\ell(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}) = \bigoplus_n H^\ell(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(n))$$

e quindi calcoleremo $H^\ell(\mathbb{P}^r, \mathcal{F})$. Sia $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_r\}$. Per il Teorema 14.5 si ha

$$H^\ell(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}) \cong \check{H}^\ell(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^\ell(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

dove:

$$\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \ 0 \longrightarrow \oplus P_{X_i} \xrightarrow{\delta^0} \oplus P_{X_i X_j} \xrightarrow{\delta^1} \cdots \xrightarrow{\delta^{r-1}} P_{X_0 \ldots X_r} \to 0$$

Possiamo anche interpretare questo complesso nel modo seguente. Consideriamo, in $\mathbb{A}^{r+1} = \mathrm{Spec}(P)$, gli aperti principali U_{X_i}. Allora la famiglia di aperti affini

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \{U_{X_0}, \ldots, U_{X_r}\}$$

è un ricoprimento di $\mathbb{A}^{r+1} \setminus \{0\}$. Quindi possiamo identificare

$$\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \check{C}^\bullet(\widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1} \setminus \{0\}})$$

e conseguentemente

$$H^\ell(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}) = H^\ell(\mathbb{A}^{r+1} \setminus \{0\}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1} \setminus \{0\}})$$

Pertanto il teorema è conseguenza del risultato che ora enunceremo. $\square$

Teorema 15.2. *Per ogni* $r \geq 1$ *si ha:*

(i) $H^0(\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\},\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}})=\mathbf{k}[X_0,\dots,X_r]$
(ii) $H^r(\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\},\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}})\cong X_0^{-1}\cdots X_r^{-1}\mathbf{k}[X_0^{-1},\dots,X_r^{-1}]$
(iii) $H^\ell(\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\},\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}})=0$ *se* $\ell\neq 0,r$.

Dimostrazione. Abbiamo successione esatta:

$$0\longrightarrow P\longrightarrow P_{X_r}\longrightarrow \bigoplus_{p_r<0}\left(\frac{P}{(X_r)}\right)X_r^{p_r}\longrightarrow 0 \tag{18}$$

che fascificata e ristretta a $\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}$ dà la successione esatta di fasci quasi coerenti:
(19)

$$0\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}}\longrightarrow {}_{U_{X_r}}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}}\longrightarrow \bigoplus_{p_r\le -1}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r}\setminus\{0\}}X_r^{p_r}\longrightarrow 0$$

Osserviamo che

$${}_{U_{X_r}}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}}=J_*\mathcal{O}_{U_{X_r}}$$

dove $J:U_{X_r}\to\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}$ è l'inclusione. Poiché J e U_{X_r} sono affini abbiamo:

$$H^0({}_{U_{X_r}}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}})=\mathbf{k}[X_0,\dots,X_r,X_r^{-1}]$$

e $H^\ell({}_{U_{X_r}}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}})=0$ se $\ell>0$.

Procediamo per induzione su r. Supponiamo $r=1$. La successione (19) ci dà in questo caso:

$$\begin{tikzcd}
0\to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}) \arrow[r] & H^0({}_{\widetilde{U}_{X_1}}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}) \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, equal] & \bigoplus_{p_1\le -1}H^0(\mathbb{A}^1\setminus\{0\},\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1\setminus\{0\}})X_1^{p_1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}})\to 0 \\
& \mathbf{k}[X_0,X_1,X_1^{-1}] & \bigoplus_{p_1\le -1}\mathbf{k}[X_0,X_0^{-1}]X_1^{p_1} &
\end{tikzcd}$$

Confrontando con la (18) vediamo che

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}})=\mathbf{k}[X_0,X_1]$$

e l'immagine di ϵ è $\bigoplus_{p_1<0}\mathbf{k}[X_0]X_1^{p_1}$. Quindi

$$H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}})=\operatorname{coker}(\epsilon)=X_0^{-1}X_1^{-1}\mathbf{k}[X_0^{-1},X_1^{-1}]$$

e dunque il teorema è vero in questo caso.

Supponiamo $r\ge 2$. La (19) ci dà la successione esatta:

$$0\to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}})\longrightarrow \mathbf{k}[X_0,\dots,X_r,X_r^{-1}]\xrightarrow{\epsilon}\bigoplus_{p_r\le -1}\mathbf{k}[X_0,\cdots,X_{r-1}]X_r^{p_r}$$

$$\to H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}})\to 0$$

Confrontando con la (18) vediamo che

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}})=\mathbf{k}[X_0,\dots,X_r]$$

ed ϵ è suriettiva; quindi $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}}) = 0$. Inoltre sempre la (19) dà:

$$\bigoplus_{p_r \leq -1} H^{\ell-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^r\setminus\{0\}})X_r^{p_r} \cong H^\ell(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}})$$

per ogni $\ell \geq 2$. Quindi l'ipotesi induttiva implica:

$$H^\ell(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}}) = 0$$

se $\ell \geq 2$ e $\ell \neq r$ e

$$H^r(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}}) \cong \bigoplus_{p_r \leq -1} H^{r-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^r\setminus\{0\}})X_r^{p_r} = X_0^{-1}\cdots X_r^{-1}\mathbf{k}[X_0^{-1},\ldots,X_r^{-1}]$$

□

Una conseguenza del Teorema 15.2 è anche che per $r \geq 1$ lo schema $\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}$ non è affine. Infatti

$$\Gamma(\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}}) = \mathbf{k}[X_0,\ldots,X_r] = \Gamma(\mathbb{A}^{r+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}})$$

e quindi

$$\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\} \neq \operatorname{Spec}(\Gamma(\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{r+1}\setminus\{0\}})) = \mathbb{A}^{r+1}$$

16. Fasci coerenti sullo spazio proiettivo

In questo paragrafo manterremo le ipotesi del precedente. Se M è un P-modulo graduato ed $\mathcal{F} = M^\sim$ allora si ha, per ogni $n \in \mathbb{Z}$:

$$M(n)^\sim = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(n)$$

e denoteremo questo fascio con il simbolo $\mathcal{F}(n)$. Ovviamente:

$$\mathcal{F}(n) \otimes \mathcal{O}(m) = \mathcal{F}(n+m)$$

per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$.

Se X è uno schema proiettivo e $J : X \subset \mathbb{P}^r$ è l'immersione chiusa, possiamo sostituire $\mathcal{O}_X$ con $J_*\mathcal{O}_X$, e ottenere un fascio di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$- algebre, in particolare algebrico su $\mathbb{P}^r$. Poiché X è chiuso si ha $J_*\mathcal{O}_{X,z} = 0$ per ogni $z \in \mathbb{P}^r \setminus X$. Con abuso di notazione scriveremo ancora $\mathcal{O}_X$ invece di $J_*\mathcal{O}_X$. Si osservi che $\mathcal{O}_X$ è un quoziente di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$, cioè si ha una successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

dove $\mathcal{I}_X \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$ è il *fascio di ideali* di X.

Se $\mathcal{F}$ è un fascio quasi-coerente su X possiamo estendere $\mathcal{F}$ a tutto $\mathbb{P}^r$ in modo analogo identificandolo con $J_*\mathcal{F}$. Quindi ogni fascio quasi-coerente su X può essere visto come un fascio quasi-coerente su tutto $\mathbb{P}^r$. Pertanto sono definiti i fasci $\mathcal{F}(n)$ anche per fasci $\mathcal{F}$ su X.

Lemma 16.1. (i) *Se $\mathcal{F}$ è quasi-coerente (risp. coerente) su X allora $\mathcal{F}$ è quasi-coerente (risp. coerente) anche come fascio su $\mathbb{P}^r$.*

(ii) *Se un fascio quasi-coerente $\mathcal{F}$ su $\mathbb{P}^r$ è della forma $M^\sim$ per qualche P-modulo graduato M allora per ogni $n_0 \in \mathbb{Z}$ si ha anche*

$$\mathcal{F} = (M_{\geq n_0})^\sim$$

dove $M_{\geq n_0} = \oplus_{n \geq n_0} M_n$.

(iii) *$\mathcal{F}$ è coerente se e solo se $M_{\geq n_0}$ è finitamente generato per qualche n_0. Quindi in tal caso è possibile prendere $\mathcal{F} = M^\sim$ con M finitamente generato.*

(iv) *Ogni fascio quasi-coerente $\mathcal{F}$ è della forma $M^\sim$ per qualche M graduato. Infatti è possibile prendere $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(n))$.*

Dimostrazione. (i) segue facilmente da quanto osservato all'inizio del paragrafo.

(ii) Poniamo $\mathcal{G} = M^\sim_{\geq n_0}$. L'inclusione $M_{\geq n_0} \subset M$ induce un omomorfismo iniettivo $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$. D'altra parte, per ogni $i = 0, \dots, r$ abbiamo

$$\Gamma(U_i, \mathcal{F}) \to \Gamma(U_i, \mathcal{G}), m/X_i^k \mapsto mX_i^n/X_i^{k+n}, \quad n \gg 0$$

e questi omomorfismi inducono $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. È facile verificare che ϕ e ψ sono inversi uno dell'altro.

(iii) e (iv): si rimanda a [3], cap. II. □

Dimostriamo il seguente fondamentale:

Teorema 16.2 (Serre)**.** *Sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente su uno schema proiettivo X. Allora*

(i) *$H^\ell(X, \mathcal{F})$ è un $\mathbf{k}$-spazio vettoriale di dimensione finita per ogni $\ell \geq 0$.*

(ii) *Esiste $n_0 \in \mathbb{Z}$ tale che*

$$H^\ell(X, \mathcal{F}(n)) = 0$$

per ogni $\ell > 0$ e per ogni $n \geq n_0$.

Dimostrazione. (i) Poiché l'immersione chiusa $J : X \subset \mathbb{P}^r$ è affine, la coomologia di $\mathcal{F}$ coincide con quella di $J_*\mathcal{F}$ per il Teorema 13.5. Quindi possiamo supporre che $\mathcal{F}$ sia un fascio coerente su $\mathbb{P}^r$. Daremo la dimostrazione per induzione discendente su ℓ. Se $\ell > r$ l'asserto è vero per il Corollario 14.6. Poiché $\mathcal{F}$ è coerente possiamo supporre che $\mathcal{F} = M^\sim$ con M un P-modulo finitamente generato. Sia $q > 0$

maggiore del massimo dei gradi dei generatori di M. Allora si ha una suriezione:

$$P(-q)^{\oplus s} \to M_{\geq q} \to 0$$

per qualche s. Fascificando e ricordando che l'operazione $-^{\sim}$ è esatta, otteniamo una successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-q)^{\oplus s} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 \tag{20}$$

con $\mathcal{G}$ coerente. Per il Teorema 15.1 abbiamo che l'omomorfismo:

$$H^\ell(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}) \to H^{\ell+1}(\mathbb{P}^r, \mathcal{G})$$

è un isomorfismo per ogni $\ell < r-1$ ed è iniettivo per $\ell = r-1$. Quindi (i) segue in questi casi per induzione. Per $\ell = r$ sia ha una suriezione:

$$H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(-q))^{\oplus s} \to H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}) \to 0$$

e la finito-dimensionalità segue da quella di $H^r(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(-q))$.

(ii) L'asserto è vero per $\mathcal{O}(m)$ se $m \geq -r$. Tensorizzando la (20) per $\mathcal{O}(n)$ con $n \gg 0$ si ottiene:

$$H^\ell(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(n)) \cong H^{\ell+1}(\mathbb{P}^r, \mathcal{G}(n))$$

e il risultato segue per induzione discendente su ℓ. □

Se $\mathcal{F}$ è un fascio coerente su una varietà proiettiva X denoteremo spesso con $h^i(X, \mathcal{F})$ la dimensione di $H^i(X, \mathcal{F})$. Il risultato precedente giustifica la seguente

Definizione 16.3. Sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente su uno schema proiettivo X. La *caratteristica di Eulero-Poincaré* di $\mathcal{F}$ è

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(X, \mathcal{F})$$

La definizione ha senso perché la somma consiste di un numero finito di addendi finiti. Se non vi è possibilità di confusione scriveremo $\chi(\mathcal{F})$ invece di $\chi(X, \mathcal{F})$.

Esempio 16.4.

$$\chi(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(n)) = \frac{(n+r)(n+r-1)\cdots(n+1)}{r!} = \binom{n+r}{r}$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

La caratteristica di EP è additiva rispetto a successioni esatte. In altre parole si ha:

Proposizione 16.5. *Se*

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \cdots \to \mathcal{F}_m \to 0$$

è una successione esatta di fasci coerenti su uno schema proiettivo X si ha:

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^i \chi(X, \mathcal{F}_i) = 0$$

In particolare, per ogni successione esatta di fasci coerenti:

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

si ha:

$$\chi(\mathcal{F}_2) = \chi(\mathcal{F}_1) + \chi(\mathcal{F}_2)$$

Dimostrazione. Esercizio. □

Se k è un campo algebricamente chiuso e C è una curva proiettiva su k definiamo il *genere aritmetico* di C come

$$p_a(C) = 1 - \chi(\mathcal{O}_C) = h^1(C, \mathcal{O}_C)$$

Se S è una superficie proiettiva su k definiamo il *genere aritmetico* di S come:

$$p_a(S) = \chi(\mathcal{O}_S) - 1 = h^2(S, \mathcal{O}_S) - h^1(S, \mathcal{O}_S)$$

17. Fasci invertibili

Un fascio coerente $\mathcal{F}$ su uno schema X si dice *localmente libero di rango* N se X possiede un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ tale che per ogni $U \in \mathcal{U}$ esista un isomorfismo

$$\varphi_U : \mathcal{F}_{|U} \to \mathcal{O}_U^N$$

Un fascio localmente libero di rango uno si dice *invertibile*. In questo paragrafo ci limiteremo a considerare fasci invertibili, anche se molte delle cose che diremo sono valide per fasci localmente liberi di rango qualsiasi.

Lemma 17.1 (di incollamento)**.** *Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento con aperti. Supponiamo assegnato un fascio $\mathcal{F}_i$ su U_i per ogni $i \in I$, e isomorfismi*

$$\varphi_{ij} : \mathcal{F}_{j|U_i \cap U_j} \to \mathcal{F}_{i|U_i \cap U_j}$$

in modo che le seguenti condizioni siano soddisfatte:

1. $\varphi_{ii} = 1_{\mathcal{F}_i}$, *per ogni $i \in I$.*
2. $\varphi_{ik} = \varphi_{ij}\varphi_{jk}$ *per ogni $i, j, k \in I$.*

Allora, esiste un fascio $\mathcal{F}$ su X dotato di isomorfismi $\varphi_i : \mathcal{F}_{|U_i} \to \mathcal{F}_i$ per ogni $i \in I$ tali che

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \cdot \varphi_j^{-1} \tag{21}$$

per ogni $i, j \in I$. Il fascio $\mathcal{F}$ insieme agli isomorfismi φ_i sono determinati a meno di isomorfismo unico. I φ_{ij} vengono chiamati isomorfismi di transizione.

Dimostrazione. Esistenza. Per brevità scriveremo $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Sia $U \subset X$ aperto. Definiamo

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \{(\sigma_i) \in \prod_i \Gamma(U_i \cap U, \mathcal{F}_i) : \varphi_{ij}(\rho^{U_j \cap U}_{U_{ij} \cap U}(\sigma_j)) = \rho^{U_i \cap U}_{U_{ij} \cap U}(\sigma_i) \; \forall i, j \in I\} \tag{22}$$

Se $V \subset U$ si definisce in modo ovvio la restrizione

$$\rho^U_V : \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(V, \mathcal{F})$$

Verifichiamo che $\mathcal{F}$ è un fascio. Supponiamo che $U = \cup_\alpha U_\alpha$ con gli U_α aperti e siano $\sigma_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{F})$ tali che

$$\rho^{U_\alpha}_{U_{\alpha\beta}}(\sigma_\alpha) = \rho^{U_\beta}_{U_{\alpha\beta}}(\sigma_\beta) \tag{23}$$

per ogni α, β. Si ha:

$$\sigma_\alpha = (\sigma_{\alpha i}) \in \prod_i \Gamma(U_{\alpha i}, \mathcal{F}_i), \;\; \sigma_\beta = (\sigma_{\beta i}) \in \prod_i \Gamma(U_{\beta i}, \mathcal{F}_i)$$

La condizione (23) significa che

$$\rho^{U_{\alpha i}}_{U_{\alpha\beta i}}(\sigma_{\alpha i}) = \rho^{U_{\beta i}}_{U_{\alpha\beta i}}(\sigma_{\beta i})$$

per ogni α, β, i. Allora, poiché $\mathcal{F}_i$ è un fascio, per ogni $i \in I$ esiste $\sigma_i \in \Gamma(U \cap U_i, \mathcal{F}_i)$ tale che $\rho^{U \cap U_i}_{U_{\alpha i}}(\sigma_i) = \sigma_{\alpha i}$. Sarà sufficiente verificare che $(\sigma_i) \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, cioè che (σ_i) verifica la condizione della definizione (22). Ma si ha:

$$\varphi_{ij}[\rho^{U_{\alpha j}}_{U_{\alpha ij}}(\sigma_{\alpha j})] = \rho^{U_{\alpha i}}_{U_{\alpha ij}}(\sigma_{\alpha i})$$

per ogni i, j, α e ciò implica, per il fatto che gli $\mathcal{F}_i$ sono fasci, che

$$\varphi_{ij}[\rho^{U_j}_{U_{ij}}(\sigma_j)] = \rho^{U_i}_{U_{ij}}(\sigma_i)$$

e quindi la condizione è verificata.

Dimostriamo che $\mathcal{F}_{|U_i} \cong \mathcal{F}_i$ per ogni $i \in I$. Sia $U \subset U_i$. abbiamo

$$\begin{aligned}\Gamma(U, \mathcal{F}_{|U_i}) &= \Gamma(U, \mathcal{F}) \\ &= \{(\sigma_h) \in \prod \Gamma(U \cap U_h, \mathcal{F}_h) : \varphi_{kh}[\rho^{U \cap U_h}_{U \cap U_{hk}}(\sigma_h)] = \rho^{U \cap U_k}_{U \cap U_{hk}}(\sigma_k)\}\end{aligned}$$

In virtù della condizione (2) (σ_h) è individuata dalla sua coordinata i-esima $\sigma_i \in \Gamma(U \cap U_i, \mathcal{F}_i) = \Gamma(U, \mathcal{F}_i)$. Definiamo pertanto

$$\varphi_i(U) : \Gamma(U, \mathcal{F}_{|U_i}) \to \Gamma(U, \mathcal{F}_i,), \quad (\sigma_h) \mapsto \sigma_i$$

Le (21) sono ovvie.

Unicità. Supponiamo che $\mathcal{G}$ sia un'altro fascio dotato di isomorfismi

$$\psi_i : \mathcal{G}_{|U_i} \longrightarrow \mathcal{F}_i$$

tali che $\varphi_{ij} = \psi_i \cdot \psi_j^{-1}$. Allora vengono univocamente determinati isomorfismi

$$\varphi_i^{-1} \cdot \psi_i : \mathcal{G}_{|U_i} \longrightarrow \mathcal{F}_{|U_i}$$

Su U_{ij} si ha:

$$\varphi_i^{-1} \cdot \psi_i = \varphi_i^{-1} \cdot \varphi_{ij} \cdot \psi_j = \varphi_j^{-1} \cdot \psi_j$$

e quindi gli isomorfismi $\varphi_i^{-1} \cdot \psi_i$ si incollano dando luogo ad un isomorfismo $\mathcal{G} \cong \mathcal{F}$ che è univocamente determinato dai dati $\{\mathcal{F}_i, \varphi_{ij}\}$.

$\square$

Questo lemma suggerisce un modo di assegnare un fascio invertibile su uno schema X. Supponiamo dato un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X e per ogni $i, j \in I$ un isomorfismo:

$$\varphi_{ij} : \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} \to \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$$

in modo che le condizioni (1) e (2) del Lemma 17.1 siano verificate. Allora resta definito in modo univoco un fascio invertibile $\mathcal{L}$ su X. In generale φ_{ij} è rappresentato dalla moltiplicazione per una funzione regolare e mai nulla su $U_i \cap U_j$, cioè $\varphi_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$, dove $\mathcal{O}_X^*$ è il fascio di gruppi abeliani moltiplicativi dei germi di funzioni regolari che non si annullano in alcun punto. Le φ_{ij} vengono chiamate *funzioni di transizione* di $\mathcal{L}$. Viceversa ogni fascio invertibile $\mathcal{L}$ su X può essere assegnato in questo modo su un opportuno ricoprimento.

Vediamo come si possono descrivere i fasci $\mathcal{O}(n)$ su $\mathbb{P}^r$ da questo punto di vista.

Esempio 17.2. Consideriamo il ricoprimento affine $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_r\}$ di $\mathbb{P}^r$ costituito dagli aperti fondamentali. L'isomorfismo:

$$\varphi_i : \Gamma(U_i, \mathcal{O}(n)) = (P_{X_i})_n \to \Gamma(U_i, \mathcal{O}) = (P_{X_i})_0$$

è dato dalla moltiplicazione per X_i^{-n}. Quindi

$$\varphi_i \cdot \varphi_j^{-1} = \varphi_{ij} = \frac{X_j^n}{X_i^n}$$

dove abbiamo identificato l'isomorfismo con la corrispondente funzione di transizione.

Definizione 17.3. L'insieme delle classi di isomorfismo di fasci invertibili su X è dotato di una struttura di gruppo abeliano in cui la moltiplicazione è indotta dall'operazione di prodotto tensoriale. L'elemento neutro è la classe $[\mathcal{O}_X]$ e l'inverso di $[\mathcal{L}]$ con funzioni di transizione $\{\varphi_{ij}\}$ rispetto a un ricoprimento $\mathcal{U}$ è la classe di isomorfismo del fascio $\mathcal{L}^{-1}$ le cui funzioni di transizione sono $\{\varphi_{ij}^{-1}\}$ rispetto allo stesso ricoprimento. Questo gruppo si chiama *gruppo di Picard* di X e si denota con $\mathrm{Pic}(X)$

Per descrivere $\mathrm{Pic}(X)$ è necessario poter descrivere la classe di isomorfismo di un dato fascio invertibile.

Lemma 17.4. *Siano $\mathcal{L}$ ed $\mathcal{M}$ due fasci invertibili definiti rispetto ad uno stesso ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ da funzioni di transizione $\{\varphi_{ij}\}$ e $\{\psi_{ij}\}$ rispettivamente. Allora $\mathcal{L}$ ed $\mathcal{M}$ sono isomorfi se e solo se esistono $a_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X^*)$ tali che*

$$\psi_{ij} = a_i^{-1}\varphi_{ij}a_j, \quad \forall i, j \in I \tag{24}$$

Dimostrazione. Supponiamo che le a_i esistano. Per ogni $i \in I$ definiamo un isomorfismo:

$$\rho_i : \mathcal{M}_{|U_i} \longrightarrow \mathcal{L}_{|U_i}$$

ponendo $\rho_i = \varphi_i^{-1} \cdot a_i \cdot \psi_i$. Restringendo ad $U_i \cap U_j$ si ha:

$$\begin{aligned} \rho_i &= \varphi_i^{-1} \cdot a_i \cdot \psi_i \\ &= (\varphi_{ij} \cdot \varphi_j)^{-1} a_i(\psi_{ij} \cdot \psi_j) \\ &= \varphi_j^{-1} \cdot \varphi_{ij}^{-1} a_i(a_i^{-1} \cdot \varphi_{ij} \cdot a_j)\psi_j \\ &= \varphi_j^{-1} \cdot a_j \cdot \psi_j = \rho_j \end{aligned}$$

Pertanto le ρ_i si incollano definendo un isomorfismo $\rho : \mathcal{M} \to \mathcal{L}$. Viceversa, se è dato un isomorfismo ρ ponendo

$$a_i = \varphi_i \cdot \rho_{|U_i} \cdot \psi_i^{-1}$$

si verifica subito che le (24) sono verificate. □

Dimostriamo ora il seguente importante:

Teorema 17.5. *Si ha un isomorfismo*

$$\mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento con aperti di X. Il dato di funzioni di transizione $\{\varphi_{ij}\}$ soddisfacenti le condizioni del Lemma 17.1 è un 1-cociclo di Cech per il fascio $\mathcal{O}_X^*$ rispetto al ricoprimento $\mathcal{U}$, cioè $\{\varphi_{ij}\} \in \check{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) := \ker(\delta^1)$. Per il Lemma 17.4, i fasci invertibili definiti da due diversi 1-cocicli $\{\varphi_{ij}\}, \{\psi_{ij}\}$ sono isomorfi se e solo se i cocicli sono coomologhi, cioè se e solo se

$$\{\psi_{ij}\} = \{\varphi_{ij}\}\delta^0(\{a_i\})$$

Pertanto l'insieme delle classi di isomorfismo di fasci invertibili definibili con funzioni di transizione rispetto ad $\mathcal{U}$ è in corrispondenza biunivoca con $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$. Quindi, tenendo conto del fatto che l'isomorfismo si mantiene passando ad un raffinamento del ricoprimento e ripetendo lo stesso ragionamento per tutti i ricoprimenti si deduce che:

$$\operatorname{Pic}(X) \cong \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$$

Ora si conclude utilizzando il Lemma 14.7. □

18. Divisori

La nozione di divisore generalizza quella di ipersuperficie su una varietà algebrica. Esistono due diverse nozioni di divisore, i *divisori di Weil* e i *divisori di Cartier*. Noi tratteremo solo i divisori di Cartier, che sono i più semplici, e corrispondono all'idea di rappresentare una sottovarietà di codimensione uno mediante una sua equazione.

Sia X uno schema integro (cioè ridotto ed irriducibile), $\eta \in X$ il suo punto generico, e sia

$$K = \mathcal{O}_{X,\eta}$$

il campo delle funzioni razionali di X e $K^* = K \setminus \{0\} \subset K$ il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili. Definiamo un fascio costante $\mathcal{K}_X$ su X ponendo, per ogni aperto $\emptyset \neq U \subset X$:

$$\Gamma(U, \mathcal{K}_X) = K$$

Denotiamo con $\mathcal{K}_X^* \subset \mathcal{K}_X$ il sottofascio (di gruppi abeliani moltiplicativi) definito da:

$$\Gamma(U, \mathcal{K}_X^*) = K^*$$

Questo fascio contiene a sua volta come sottofascio il fascio $\mathcal{O}_X^* \subset \mathcal{O}_X$ le cui sezioni su un aperto U sono le funzioni regolari e mai nulle su U.

Definizione 18.1. Un *divisore di Cartier* su X è una sezione del fascio $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$. Quindi ogni divisore di Cartier può essere individuato assegnando un opportuno ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ e, per ogni $i \in I$, un $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X^*) = K^*$, in modo che per ogni $i, j \in I$ si abbia $f_i f_j^{-1} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$. Un divisore di Cartier si dice *principale* se appartiene all'immagine di

$$\Gamma(X, \mathcal{K}_X^*) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$$

I divisori di Cartier costituiscono un gruppo abeliano $\mathrm{Car}(X)$, in cui l'operazione verrà denotata additivamente. Il sottogruppo costituito dai divisori principali si denoterà $\Pr(X)$. Due divisori di Cartier D_1, D_2 si dicono *linearmente equivalenti* se $D_1 - D_2$ è principale; in tal caso scriveremo $D_1 \sim D_2$. Un divisore di Cartier si dice *effettivo* se in qualche ricoprimento $\mathcal{U}$ è definito da $\{f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)\}$.

Proposizione 18.2. *Si ha un isomorfismo canonico:*

$$\frac{\mathrm{Car}(X)}{\Pr(X)} \cong \mathrm{Pic}(X) \tag{25}$$

In altre parole, $\mathrm{Pic}(X)$ *si identifica con il gruppo delle classi di equivalenza lineare di divisori di Cartier.*

Dimostrazione. Consideriamo la successione esatta di fasci su X:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

Poiché $\mathcal{K}_X^*$ è fiacco si ottiene la seguente successione esatta di gruppi abeliani:

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow K^* \longrightarrow \mathrm{Car}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow 0$$

dalla quale la conclusione discende immediatamente tenuto conto del Teorema 17.5. □

L'identificazione (25) può esplicitarsi nel modo seguente. Consideriamo $D \in \mathrm{Car}(X)$, definito da un sistema $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$. Possiamo associargli un fascio invertibile $\mathcal{O}_X(D)$ mediante le funzioni di transizione

$$\varphi_{ij} = f_i f_j^{-1} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$$

le quali soddisfano evidentemente le condizioni (1) e (2) del Lemma 17.1. Supponiamo che $D \sim 0$, cioè che sia principale, rappresentato da $f \in K^*$. Allora $\lambda(D)$ è definito dalle funzioni di transizione $f_i f_j^{-1} = f f^{-1} = 1$ e quindi $\lambda(D) = \mathcal{O}_X$. Pertanto $\Pr(X) \subset \ker(\lambda)$ e quindi λ discende a

$$\bar{\lambda} : \frac{\mathrm{Car}(X)}{\Pr(X)} \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

Supponiamo viceversa che $\lambda(D) \cong \mathcal{O}_X$. Se D è definito da $\{f_i\}$ rispetto ad un ricoprimento $\{U_i\}$ allora $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$ significa che esistono $a_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X^*)$ tali che $f_i f_j^{-1} = a_i a_j^{-1}$ su $U_i \cap U_j$ per ogni i, j. Ma allora si ha $\frac{f_i}{a_i} = \frac{f_j}{a_j}$ su $U_i \cap U_j$ e pertanto esiste $f \in K^*$ tale che $f_{|U_i} = \frac{f_i}{a_i}$ e quindi f definisce il divisore D, il quale è pertanto principale.

19. Fasci invertibili e morfismi a valori in uno spazio proiettivo

Sia $f : X \to Y$ un morfismo di schemi. Oltre all'operazione di immagine diretta $f_*\mathcal{F}$ in Y di un fascio algebrico $\mathcal{F}$ su X è possibile definire *l'immagine inversa* $f^*\mathcal{G}$ in X di un fascio algebrico $\mathcal{G}$ su Y. In generale questa definizione è alquanto più difficile e noi la daremo solo nel caso particolare dei fasci invertibili.

Sia $\mathcal{L}$ un fascio invertibile su Y, definito da un sistema di funzioni di transizione $\{\varphi_{ij}\}$ rispetto ad un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$. Definiamo $f^*\mathcal{L}$ come il fascio invertibile su X definito dalle funzioni di transizione $\{f^\natural(\varphi_{ij}) \in \Gamma(f^{-1}(U_{ij}), \mathcal{O}_X^*)\}$. Questa legge è compatibile con il prodotto tensoriale e con l'isomorfismo e quindi induce un omomorfismo di gruppi:

$$\mathrm{Pic}(Y) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

Una sezione $\sigma \in \Gamma(Y, \mathcal{L})$ può essere rappresentata da un sistema $\{\sigma_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_Y)\}$ tale che $\sigma_i = \varphi_{ij}\sigma_j$ su $U_i \cap U_j$ per ogni $i, j \in I$. Si osservi che, pur essendo σ definita localmente da funzioni regolari, non ha senso parlare del *valore* di σ in un punto $y \in Y$ perché la relazione

$$\sigma_i(y) = \varphi_{ij}(y)\sigma_j(y)$$

rende priva di senso tale nozione; però da questa relazione discende che $\sigma_i(y) \neq 0$ se e solo se $\sigma_j(y) \neq 0$ e quindi ha senso dire se $\sigma(y) \neq 0$ oppure $\sigma(y) = 0$.

Definizione 19.1. Sia $\mathcal{L}$ un fascio invertibile su uno schema Y. Diremo che $\mathcal{L}$ *è generato dalle sue sezioni in un punto* $y \in Y$ se esiste $\sigma \in \Gamma(Y, \mathcal{L})$ tale che $\sigma(y) \neq 0$. Diremo che $\mathcal{L}$ *è generato dalle sue sezioni* (oppure che *è globalmente generato*) se lo è in ogni punto $y \in Y$.

Possiamo associare ad ogni $\sigma \in \Gamma(Y, \mathcal{L})$ una sezione $f^*\sigma \in \Gamma(X, f^*\mathcal{L})$, che definiamo attraverso il sistema $\{f^\natural(\sigma_i) \in \Gamma(f^{-1}(U_i), \mathcal{O}_X)\}$. In questo modo si definisce un'applicazione lineare:

$$\Gamma(Y, \mathcal{L}) \to \Gamma(X, f^*\mathcal{L})$$

Si osservi che dato $x \in X$ e $\sigma \in \Gamma(Y, \mathcal{L})$ si ha $\sigma(f(x)) \neq 0$ se e solo se $(f^*\sigma)(x) \neq 0$.

Un *esempio* tipico di fascio invertibile globalmente generato è il fascio $\mathcal{O}(1)$ su $\mathbb{P}^r$. Si ha

$$\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(1)) = \langle X_0, \dots, X_r \rangle$$

D'ora in poi in questo paragrafo considereremo solo varietà algebriche (cioè schemi integri e di tipo finito su k) definite su un campo algebricamente chiuso k.

Consideriamo un morfismo:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$$

per qualche $r \geq 1$. Possiamo associargli il fascio invertibile $\mathcal{L} := f^*\mathcal{O}(1)$ e le sezioni $f^*X_0, \dots, f^*X_r \in \Gamma(X, \mathcal{L})$. Il fascio $\mathcal{L}$ è globalmente generato perché lo è in ogni punto da qualcuna delle sezioni $f^*X_0, \dots, f^*X_r$. Il morfismo f può essere ricostruito dal dato $(\mathcal{L}, f^*X_0, \dots, f^*X_r)$ perché si ha, per ogni punto chiuso $x \in X$:

$$f(x) = [(f^*X_0)(x), \dots, (f^*X_r)(x)]$$

osservando che i valori $(f^*X_s)(x)$ sono ben definiti a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo; si osservi che è sufficiente assegnare f nei punti chiusi, per la Proposizione 10.6.

Viceversa, supponiamo assegnato un fascio invertibile $\mathcal{L}$ su X e sezioni $\sigma_0, \dots, \sigma_r \in \Gamma(X, \mathcal{L})$, che generano $\mathcal{L}$ in ogni punto. Allora possiamo definire un morfismo:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$$

ponendo

$$f(x) = [\sigma_0(x), \dots, \sigma_r(x)]$$

È immediato che l'immagine $f(X) \subset \mathbb{P}^r$ è non-degenere, cioè non è contenuta in un iperpiano, se e solo se $\sigma_0, \dots, \sigma_r$ sono linearmente indipendenti.

20. Sistemi lineari

In questo paragrafo supporremo che X sia una varietà *proiettiva* definita su k algebricamente chiuso.

Definizione 20.1. Un *sistema lineare* su X è la famiglia dei divisori effettivi (linearmente equivalenti tra loro) definita da tutte le sezioni non nulle di un sottospazio vettoriale $V \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$ per qualche fascio invertibile $\mathcal{L}$ su X. Se $V = \Gamma(X, \mathcal{L})$ il sistema lineare si dice *completo*.

Il sistema lineare associato a V si denoterà con $|V|$; se il sistema è completo, cioè $V = \Gamma(X, \mathcal{L})$ scriveremo $|\mathcal{L}|$ anziché $|\Gamma(X, \mathcal{L})|$. Se $D \in \mathrm{Car}(X)$ è un divisore si usa denotare con $|D|$ il sistema lineare completo $|\mathcal{O}_X(D)|$.

Poiché sezioni proporzionali definiscono lo stesso divisore, $|V|$ si identifica con lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$. Per definizione:

$$\dim(|V|) = \dim(\mathbb{P}(V)) = \dim(V) - 1$$

Consideriamo nuovamente un morfismo:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$$

e supponiamo $f(X)$ non-degenere. Sia $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1))$ e siano $\sigma_s = f^*X_s$, $s = 0, \ldots, r$. L'applicazione lineare:

$$f^* : \Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(1)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L})$$

è iniettiva e associa ad un polinomio omogeneo $H := a_0X_0 + \cdots + a_rX_r \in \Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(1))$ la sezione $f^*H = a_0\sigma_0 + \cdots + a_r\sigma_r \in \Gamma(X; \mathcal{L})$. In termini di divisori possiamo descrivere questa come una corrispondenza che associa ai divisori del sistema lineare $|\mathcal{O}(1)|$ quelli del sistema lineare $|V|$ dove $V = \mathrm{Im}(f^*) \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$. È un'inclusione di spazi proiettivi. Il sistema lineare $|V|$ è completo se e solo se $V = \Gamma(X, \mathcal{L})$ se e solo se $\dim[\Gamma(X, \mathcal{L})] = r + 1$.

Il sottospazio $V \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$ si identifica con $\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(1))$ e quindi $\mathbb{P}^r$ si identifica con lo spazio proiettivo associato al duale $V^\vee = \Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(1))^\vee$. Quindi $\mathbb{P}^r$ si identifica con lo spazio degli iperpiani di V e ci si aspetta pertanto che sia possibile interpretare il morfismo f come a valori in $\mathbb{P}(V)^\vee = \mathbb{P}(V^\vee)$. L'interpretazione è la seguente:

$$f(x) = \{\sigma \in V : \sigma(x) = 0\}$$

per ogni $x \in X$ chiuso. Questa descrizione di f prescinde dalla scelta della base $\sigma_0, \ldots, \sigma_r$ di V e mostra che f dipende solo dal sistema lineare $|V|$.

References

[1] Bucur I., Deleanu A.: *Introduction to the theory of categories and functors*, Wiley (1968).
[2] Eisenbud D.: *Commutative Algebra*, Springer (1995).
[3] Hartshorne R.: *Algebraic Geometry*, Springer (1977). 13, 16
[4] Kempf G.: *Algebraic Varieties*, London Math. Society Lecture Note Series vol. 172 (1993).
[5] Gortz U., Wedhorn T.: *Algebraic Geometry I*, Viehweg & Teubner (2010). 10, 12