Famiglie di spazi plurisecanti

EDOARDO SERNESI Dipartimento di Matematica, III Università di Roma, via C. Segre 2, 00146 Roma

In questa nota illustreremo la nozione di *fuoco del prim'ordine* di una famiglia di varietà proiettive attraverso due applicazioni significative. Nelle applicazioni considereremo solo famiglie di rette, ma le proprietà che utilizzeremo hanno una validità più generale; esse verranno richiamate nel primo paragrafo. I fatti basilari sulle proprietà focali sono stati esposti in forma moderna in [CS1], ma la loro introduzione ed uso sistematico risale a C. Segre.

1. Fuochi di una famiglia di varietà proiettive

Considereremo solo schemi e varietà (cioè schemi ridotti) definiti su $\mathbf{C}$, il campo dei numeri complessi. Sia

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \subset & B \times Y \\ \downarrow & & \\ B & & \end{array} \tag{1}$$

una famiglia di sottoschemi chiusi di una varietà proiettiva nonsingolare Y parametrizzata da una varietà B irriducibile e nonsingolare. Consideriamo la proiezione $f : \mathcal{X} \to Y$ e chiediamoci:

Conferenza tenuta il 3 maggio 1994

Qual'è la dimensione di $f(\mathcal{X})$?
Quando è $f(\mathcal{X})$ *dominante*?

La risposta dipende da $(df)_x$ in un punto generale $x \in \mathcal{X}$. Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \chi : T(f) & \rightarrow & \mathcal{N} \\ & & & & \downarrow & & \| \\ 0 \rightarrow & & T_{\mathcal{X}} & \rightarrow & T_{B\times Y|\mathcal{X}} & \rightarrow & \mathcal{N} \\ & & \downarrow {\scriptstyle df} & & \downarrow & & \\ & & f^*T_Y & = & f^*T_Y & & \end{array}$$

dove

$$T(f) = [T_{(B\times Y)/Y}]_{|\mathcal{X}}$$
$$\mathcal{N} = N_{\mathcal{X}/(B\times Y)}$$

Vogliamo determinare il rango di df , o equivalentemente il rango di $ker(df)$. Da un diagram-chasing segue che $ker(df) = ker(\chi)$. Per ogni $b \in B$, χ induce:

$$\chi_b : T_{B,b} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}(b)} \rightarrow N_{\mathcal{X}(b)/Y}$$

che è l'*applicazione caratteristica* della famiglia (1) , cioè l'applicazione che sulle sezioni globali induce

$$T_{B,b} \rightarrow H^0(\mathcal{X}(b), N_{\mathcal{X}(b)/Y})$$

cioè il differenziale in b dell'applicazione funtoriale $B \rightarrow Hilb_Y$. Denotiamo con $V(\chi)$ il sottoschema chiuso di $\mathcal{X}$ definito dalla condizione

$$rk(\chi) < min\{rk(T(f), rk(\mathcal{N}))\}$$

$V(\chi)$ è detto *sottoschema dei fuochi del primo ordine della famiglia* (1) . La seguente proposizione è immediata.

Proposizione 1 *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*
(i) df *ha rango massimo (cioè ha conucleo di torsione oppure è iniettiva).*
(ii) χ *ha rango massimo.*
(iii) $V(\chi)$ *è un sottoschema chiuso proprio di X.*

Questa proposizione può essere usata in almeno due modi:

(a) Verificando che $V(\chi) = \mathcal{X}$ per dimostrare che

$$dim(f(\mathcal{X}) < min\{dim(Y), dim(\mathcal{X})\} \tag{2}$$

(b) Verificando che la (2) è soddisfatta per concludere che $V(\chi)$ è un sottoschema proprio di cui si possono utilizzare le proprietà.

La situazione più semplice in cui tutto ciò si puo' applicare è quella in cui la (1) è una famiglia di spazi lineari di $\mathbf{P}^r$, ad esempio spazi plurisecanti una data varietà. In questo caso l'omomorfismo:

$$\chi(b): \ T_{B,b} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}(b)} \to N_{\mathcal{X}(b)/Y} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}(b)}(1)^k$$

dove $k = codim_{\mathbf{P}^r}[\mathcal{X}(b)]$, è dato da una matrice di forme lineari, e i fuochi del prim'ordine in $\mathcal{X}(b)$ sono il luogo di annullamento dei minori di ordine massimo di questa matrice.

Il metodo (b) è stato utilizzato in [CS2] per studiare la famiglia dei $\mathbf{P}^{g-3}$ $(g-1)$-secanti una curva canonica di $\mathbf{P}^{g-1}$. In questo caso i fuochi del prim'ordine sono dati dai minori di ordine massimo di una matrice $2 \times (g-3)$ di forme lineari. La famiglia soddisfa la condizione $dim(f(\mathcal{X})) = g-1$, e con qualche difficoltà tecnica si dimostra che $V(\chi)(b)$ è una curva di grado $g-3$ in $\mathbf{P}^{g-3}$ che in generale è una curva razionale e normale. Studiando queste curve si ottengono informazioni geometriche su C.

Qui voglio considerare due risultati che illustrano i metodi (a) e (b). Entrambi si dimostrano facendo intervenire una famiglia della forma seguente:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \subset & B \times \mathbf{P}^r \\ \downarrow & & \\ B & & \end{array} \tag{3}$$

La (3) è una famiglia di rette di $\mathbf{P}^r$, e B e' una varietà irriducibile e nonsingolare di dimensione $r-1$. In questo caso:

$$\begin{array}{cccc} \chi(b): T_{B,b} & \otimes\mathcal{O}_{\Lambda(b)} & \to & N_{\Lambda(b)} \\ & \| & & \| \\ & \mathcal{O}_{\Lambda(b)}^{r-1} & \to & \mathcal{O}_{\Lambda(b)}(1)^{r-1} \end{array}$$

e $V(\chi(b)) = det(\chi(b))$ è un sottoschema di $\Lambda(b)$ di lunghezza $r-1$ a meno che $\chi(b)$ non sia identicamente nulla.

2. Un teorema di Z. Ran

Il primo risultato che considererò è dovuto a Z. Ran ed illustra il metodo (a); esso ha per oggetto una famiglia di rette plurisecanti una varietà algebrica ed è una generalizzazione del classico lemma delle trisecanti.

Teorema 1 (*Ran [R]*) *Sia* $X \subset \mathbf{P}^r$ *una varietà di dimensione* n *e sia* B *una varietà irriducibile che parametrizza una famiglia* (3) *di rette tali che* $\Lambda(b) \cap X$ *abbia lunghezza almeno* $n+2$ *per ogni* $b \in B$ *. Allora*

$$dim[\cup_b \Lambda(b)] \leq n+1$$

Se $X \subset \mathbf{P}^{n+2}$ è nonsingolare il teorema afferma la non esistenza di punti (n+1)-upli della proiezione generica di X in $\mathbf{P}^{n+1}$. La dimostrazione che daremo è presa da [CC], e non è molto diversa in spirito da quella originale di Ran.

Dimostrazione. La famiglia di rette dell'enunciato definisce un diagramma (3). Denotiamo con $\beta : \Lambda \to \mathbf{P}^r$ il morfismo indotto dalla proiezione $B \times \mathbf{P}^r \to \mathbf{P}^r$. Si ha $dim(\Lambda) = dim(B) + 1$ e vogliamo far vedere che $dim[\beta(\Lambda)] \leq n+1$.

Se il risultato è falso lo è anche se sostituiamo a B una sua sottovarietà generale di dimensione $n+1$. Quindi possiamo supporre $dim(B) = n+1$. Inoltre possiamo sostituire ad X una sua proiezione generica in $\mathbf{P}^{n+2}$. Possiamo pertanto anche supporre $r = n+2$. Quindi

$$dim(\Lambda) = r$$

Osserviamo che

$$dim[\beta^{-1}(X)] = r - 1 = n + 1$$

perché $\beta^{-1}(X) \cap \Lambda(b) \neq \emptyset$ per ogni $b \in B$. Quindi sicuramente $d\chi$ degenera nei punti di $\beta^{-1}(X)$. Pertanto il luogo focale contiene $X \cap \Lambda(b)$ per ogni $b \in B$. Ma $X \cap \Lambda(b)$ ha lunghezza almeno $n+2$ ed è contenuto in $V(\chi(b))$, il quale, se $\chi(b) \neq 0$, ha lunghezza $n+1$. Pertanto dev'essere $\chi(b) \equiv 0$, cioè $V(\chi(b)) = \Lambda(b)$ e quindi $V(\chi) = \Lambda$. Ciò significa che β è degenere e quindi $dim[\beta(\Lambda)] \leq n+1$.*qed*

3. Superfici di $\mathbf{P}^5$ con un punto doppio apparente

Sia $S \subset \mathbf{P}^5$ una superficie proiettiva e nonsingolare. Diremo che S *ha un punto doppio apparente* se la proiezione generica di S in $\mathbf{P}^4$ possiede un punto doppio e nessun'altra singolarità. È classico e facile da dimostrare che le seguenti superfici hanno un punto doppio apparente:

(i) una rigata quartica razionale e normale;
(ii) una quintica di Del Pezzo (a sezioni curve ellittiche).

Nel suo celebre lavoro [S] Severi tra l'altro caratterizzò completamente le superfici di $\mathbf{P}^5$ con un punto doppio apparente dimostrando il seguente risultato.

Teorema 2 *Sia $S \subset \mathbf{P}^5$ una superficie proiettiva e nonsingolare dotata di un punto doppio apparente. Allora S è una delle superfici (i), (ii).*

Dimostrazione. La dimostrazione che daremo segue quasi fedelmente quella originale di Severi, ed utilizza proprietà focali applicando quello che nel n. 1 abbiamo chiamato *metodo (b).*

Sia $n = gr(S)$, $g = g(S \cap H)$ il genere di una sezione iperpiana generale $S \cap H$ di S. Le corde di S costituiscono una famiglia (3) di rette di $\mathbf{P}^5$ in cui $B = S \times S$, e quindi $dim(B) = 4$ e $dim(\Lambda) = 5$. Denotiamo con $f : \Lambda \to \mathbf{P}^5$ il morfismo indotto dalla proiezione $B \times \mathbf{P}^5 \to \mathbf{P}^5$. Dal fatto che S ha un punto doppio apparente segue che per ogni punto di $\mathbf{P}^5$ passa una corda e quindi che $f(\Lambda) = \mathbf{P}^5$: in particolare f è non degenere. Segue che $V(\chi) \neq \Lambda$, e quindi che su una corda generale $\Lambda(b)$ il luogo focale è un sottoschema chiuso proprio di lunghezza 4. Per ogni $s \in S$ si ha $dim[f^{-1}(s)] = 2$,e quindi per ogni $b = (s_1, s_2) \in B$ i punti $\{s_1, s_2\} = \Lambda(b) \cap S$ sono fuochi della corda $\Lambda(b)$. Inoltre un semplice calcolo mostra che, poiché $dim[f^{-1}(s)] = 2$ (e non solo 1), ogni punto $s \in S$ è un fuoco di molteplicità 2 su ogni corda che lo contiene. In conclusione su una corda generale $\Lambda(b)$ gli unici fuochi sono i due punti $\{s_1, s_2\} = \Lambda \cap S$.

Inoltre, essendo $f : \Lambda \to \mathbf{P}^5$ un morfismo proprio e birazionale, dal Main Theorem di Zariski segue che $f^{-1}(p)$ è connesso per ogni $p \in \mathbf{P}^5$. Quindi se per un punto $p \in \mathbf{P}^5$ passa più di una corda allora ne passano infinite: ma allora p è un fuoco su ogni corda che lo contiene e quindi $p \in S$.

In conclusione, una corda generale di S non ne incontra altre fuori di S. Pertanto una sezione iperpiana generale $S \cap H$ viene proiettata da una sua corda su una curva piana *nonsingolare* di grado $n-2$ e genere g. Dunque

$$g = \binom{n-3}{2} \tag{4}$$

D'altra parte il limite di Castelnuovo per il genere di una curva di grado n e genere g in $\mathbf{P}^4$ è:

$$g \leq \frac{(n-2)(n-3)}{6} \qquad \textit{se} \quad n \equiv 0,2 \ (\textit{mod}\ 3)$$

$$g \leq \frac{(n-1)(n-4)}{6} \qquad \textit{se} \quad n \equiv 1 \ (\textit{mod}\ 3)$$

Combinando con la (4) vediamo che gli unici casi possibili sono

$$(n, g) = (4, 0), \ (5, 1)$$

e quindi S e' una delle superfici (i), (ii). *qed*

BIBLIOGRAFIA

[CC] Ciliberto C.- Chiantini L.: *A few remarks on the lifting problem* , Asterique 118 (1993), 95-109.

[CS1] Ciliberto C.- Sernesi E.: *Singularities of the theta divisor and congruences of planes* , J. Alg. Geometry 1 (1992), 231-250.

[CS2] Ciliberto C.- Sernesi E.: *Singularities of the theta divisor and families of secant spaces to a canonical curve* , di prossima pubblicazione su J. of Algebra.

[R] Ran Z.: *The (dimension+2)-secant lemma* , Inventiones Math. 106 (1991), 65-71.

[S] Severi F.: *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni e a' suoi punti tripli apparenti* , Rend. Circolo Mat. di Palermo 15 (1901), 33-51.

Nota pervenuta il 7 dicembre 1994