Università di Bologna
Istituto di Geometria
"Luigi Cremona"

SEMINARIO DI VARIABILI COMPLESSE
1981

UN ESEMPIO DI CURVA OSTRUITA IN $\mathbf{P}_3$ (*)

Edoardo Sernesi

1. In [6] Mumford ha dato un esempio di una curva irriducibile e nonsingolare di $\mathbf{P}_3$, di ordine 14 e genere 24, a cui corrisponde un punto singolare di Hilb, lo schema di Hilbert, che parametrizza i sottoschemi chiusi di $\mathbf{P}_3$ (cfr. [4]). Altri esempi di curve con questa proprietà cioè, usando un termine proveniente dalla teoria delle deformazioni, di curve "ostruite", sono stati trovati da Gruson e Peskine (cfr. [5]). I loro esempi, come quello di Mumford, sono curve che stanno su una superficie cubica e rappresentano punti generali di componenti irriducibili multiple di Hilb.

In questa nota do un nuovo esempio di curva ostruita: precisamente costruisco una curva C di $\mathbf{P}_3$, irriducibile, nonsingolare, di ordine 18 e genere 39, che rappresenta un punto singolare di Hilb; C sta su una componente irriducibile di Hilb il cui punto generale è liscio e parametrizza una curva proiettivamente normale.

(*) Conferenza tenuta il 13 marzo 1981

Dal punto di vista della "liaison" (cfr. [7]) quest'esempio è il più semplice possibile: infatti C è geometricamente legata all'unione disgiunta di due rette cioè appartiene alla classe di equivalenza di liaison più vicina a quella delle curve proiettivamente normali, le quali, come è noto (cfr. [1]), rappresentano punti lisci di Hilb.

Tutti gli schemi e le varietà algebriche che si considereranno si supporranno definiti su un fissato campo algebricamente chiuso. Scriveremo $h^i(X,F)$ per denotare la dimensione di $H^i(X,F)$, dove F è un fascio algebrico sulla varietà X.

2. Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}_3$ consideriamo una quadrica nonsingolare Q. Denotando con ℓ ed r due rette incidenti contenute in Q, sia γ una curva generale del sistema lineare

$$|4r + 2\ell|$$

La curva γ è irriducibile, nonsingolare, di genere 3 e ordine 6; poiché si ha

$$h^1(Q,\mathcal{O}(4r+4\ell-\gamma)) = h^1(Q,\mathcal{O}(2\ell)) = 0$$

le superfici quartiche segano su γ una serie completa e quindi

$$h^1(\mathbf{P}_3,\mathcal{I}_\gamma(4)) = 0$$

dove $\mathcal{I}_\gamma$ è il fascio di ideali di γ in $\mathbf{P}_3$.

Si può ottenere γ come intersezione residua di Q con una superficie quartica F passante per due rette ℓ_1 ed ℓ_2 giacenti su Q e incidenti r. Poiché $|4r + 2\ell|$ è irriducibile e privo di punti base, dal teorema di Bertini segue facilmente che F può prendersi nonsingolare. In particolare F è una superficie K-3 [8].

Denotando con H una sua sezione iperpiana, si ha

$$(4H\cdot\ell_1) = 4$$

$$(4H+\ell_1\cdot\ell_2) = 4$$

Dai noti criteri per le superfici K-3 (cfr. [8]) segue allora che il sistema lineare su F

$$|6H - \gamma| = |4H + \ell_1 + \ell_2|$$

è irriducibile e privo di punti base; un suo elemento generale C è quindi una curva irriducibile nonsingolare di ordine

$$(6H-\gamma\cdot H) = 18$$

e genere

$$\frac{1}{2}(6H-\gamma\cdot 6H-\gamma) + 1 = 39$$

3. Denotiamo con N il fascio normale di C in $\mathbf{P}_3$, e con ω_C il fascio canonico di C. Lo spazio tangente di Zariski di Hilb nel punto corrispondente a C si identifica naturalmente ad $H^0(C,N)$ (cfr.[4]).

Per calcolarne la dimensione utilizzeremo la successione esatta di fasci localmente liberi su C

$$(1) \qquad 0 \to \omega_C \to N \to \mathcal{O}_C(4H) \to 0$$

che è indotta dall'inclusione dei fasci di ideali

$$\mathcal{I}_F \subset \mathcal{I}_C \subset \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}$$

di F e di C rispettivamente e dall'identificazione di ω_C con $\mathcal{O}_C(C)$, il fascio normale di C in F.

Dalla (1) deduciamo

$$h^0(C,N) \geq 39+h^0(C,\mathcal{O}_C(4H))-1=72+h^1(C,\mathcal{O}_C(4H))$$

per il teorema di Riemann-Roch, mentre dalla successione esatta

$$0 \to \mathcal{O}_F(-4H) \to \mathcal{O}_F(2H-\gamma) \to \mathcal{O}_C(2H-\gamma) \to 0$$

otteniamo

$$h^1(C,\mathcal{O}_C(4H))=h^0(C,\mathcal{O}_C(C-4H))=h^0(C,\mathcal{O}_C(2H-\gamma)) =$$

$$= h^0(F,\mathcal{O}_F(2H-\gamma)) = 1$$

perché γ è contenuta in una quadrica.

Dunque

$$h^0(C,N) \geq 73.$$

4. E' ben noto (cfr. [2]) che le curve irriducibili e nonsingolari di $\mathbf{P}_3$ di ordine 6 e genere 3 costituiscono una famiglia irriducibile il cui elemento generale non sta su una quadrica.

E' quindi possibile trovare una famiglia di curve nonsingolari irriducibili di $\mathbf{P}_3$

$$\begin{array}{l} \Gamma \subset \mathbf{P}_3 \times S \\ \downarrow \\ S \end{array}$$

parametrizzata da una curva irriducibile S tale che esista un punto $s_o \in S$ la cui fibra $\Gamma(s_o)$ sia γ e tale che $\Gamma(s)$ sia, per ogni $s \in S$, $s \neq s_o$, una curva di genere 3 e ordine 6 che non sta su una quadrica. Poiché

$$h^1(\mathbf{P}_3, \mathcal{I}_\gamma(4)) = 0,$$

per la semicontinuità superiore di

$$h^1(\mathbf{P}_3, \mathcal{I}_{\Gamma(s)}(4))$$

possiamo supporre che su tutte le curve $\Gamma(s)$ le superfici quartiche seghino una serie completa e non speciale; quindi

$$h^o(\mathbf{P}_3, \mathcal{I}_{\Gamma(s)}(4))$$

è costante al variare di $s \in S$.

Esiste allora una famiglia di superfici quartiche parametrizzata da S

$$\begin{array}{l} F \subset \mathbf{P}_3 \times S \\ \downarrow \\ S \end{array}$$

tale che $\Gamma \subset F$, e tale che $F(s_o) = F$. Salvo a sostituire la curva S con un suo aperto, possiamo supporre che per ogni $s \in S$ $F(s)$ sia una superficie quartica nonsingolare, perché $F(s_o)$ lo è.

Sia $\Pi \subset \mathbf{P}_3$ un piano ed

$$H = F \cap (\Pi \times S).$$

Per ogni $s \in S$ consideriamo il sistema lineare sulla superficie $F(s)$

$$|6H(s) - \Gamma(s)| \;;$$

su $F = F(s_o)$

$$|6H(s_o) - \Gamma(s_o)| = |C|$$

Poiché la dimensione di

$$|6H(s) - \Gamma(s)|$$

è costante al variare di $s \in S$, uguale a 39, si deduce l'esistenza di una famiglia di curve parametrizzata da S

$$\begin{array}{ccc} C & \subset F \subset & \mathbf{P}_3 \times S \\ & \searrow \downarrow & \\ & S & \end{array}$$

tale che per ogni $s \in S$

$$C(s) \in |6H(s) - \Gamma(s)|$$

e che inoltre $C(s_o) = C$. Se $s_1 \neq s_o$ è sufficientemente generale, $C(s_1)$ è una curva irriducibile, nonsingolare, di ordine 18 e genere 39, con le seguenti proprietà:

a) $C(s_1)$ è contenuta in una ed una sola superficie quartica che è nonsingolare.

b) le superfici quartiche segano su $C(s_1)$ una serie lineare completa.

La a) è ovvia per costruzione; la b) è conseguenza del fatto che sulla superficie quartica $F(s_1)$ si ha

$$h^1(F(s_1),\mathcal{O}(4H(s_1)-C(s_1))=h^1(F(s_1),\mathcal{O}(\Gamma(s_1)-2H(s_1)))=$$

$$= h^1(F(s_1),\mathcal{O}(2H(s_1)-\Gamma(s_1))) = 0$$

perché le quadriche segano su $\Gamma(s_1)$ una serie completa e non speciale, non essendo $\Gamma(s_1)$ contenuta in una quadrica.

Per la genericità di $s_1 \in S$ la curva $C(s_1)$ rappresenta un punto che sta su un'unica componente irriducibile V di Hilb, cui anche C appartiene. Inoltre la proprietà b) e la semicontinuità superiore di $h^o(\mathbf{P}_3,\mathcal{I}_{C'}(4))$ insieme implicano che la a) è soddisfatta da tutte le curve C' parametrizzate da un opportuno aperto V_o di V contenente il punto corrispondente a $C(s_1)$; cioè ogni curva C' cui corrisponde un punto di V_o è contenuta in una ed una sola superficie quartica, che è nonsingolare.

Non è difficile calcolare la dimensione di V_o. Si noti che, fissata una superficie quartica nonsingolare, le curve parametrizzate da punti di V_o che vi sono contenute costituiscono una sottofamiglia di dimensione al più 39, che è la dimensione di un qualsiasi sistema lineare di curve di genere 39 contenute nella superficie. D'altra parte la più generale superficie quartica contiene solo curve intersezioni complete (cfr. [3]) e quindi non contiene curve parametrizzate da punti di V_o. Ne deduciamo che la famiglia delle superfici quartiche contenenti curve parametrizzate da V_o ha dimensione $\leq$ 33. Conclusione:

$$\dim V = \dim V_o \leq 39+33 = 72.$$

Ma lo spazio tangente di Zariski di Hilb nel punto corrispondente a C ha dimensione maggiore di 72, come abbiamo calcolato nel n^o 2. Quindi Hilb è singolare in quel punto.

5. Usando le successioni esatte di fasci su $F(s_1)$

$$0 \to \mathcal{O}((n-6)H(s_1)+\Gamma(s_1)) \to \mathcal{O}(nH(s_1)) \to \mathcal{O}_{C(s_1)}(nH(s_1)) \to 0,$$

è facile calcolare che $C(s_1)$ è proiettivamente normale. Da [1] segue allora che i punti di V che parametrizzano curve proiettivamente normali costituiscono un aperto liscio non vuoto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ellingsrud G.: Sur le schéma de Hilbert des varietés de codimension 2 dans P^e a cône de Cohen-Macaulay. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (4) 8, 423-432 (1975).

[2] Enriques F., Chisini O.: Lezioni sulla Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, vol. III. Bologna:Zanichelli (1924).

[3] Franchetta A.: Sulle curve appartenenti a una superficie generale d'ordine $n \geq 4$ dell'S_3. Rend. Acc. Naz. Lincei (8) 3, 71-78 (1947).

[4] Grothendieck A.: Les schémas de Hilbert. Sem.Bourbaki 221 (1960-61).

[5] Gruson L., Peskine C.: Genre des courbes de l'espace projectif (II). Preprint.

[6] Mumford D.: Further pathologies in algebraic geometry. Amer. J. Math. 84, 642-648 (1962).

[7] Peskine C., Szpiro L.: Liaison des varietes algebriques I. Inv. Math. 26, 271-302 (1974).

[8] Saint Donat B.: Projective models of K-3 surfaces. Amer. J. Math. 96, 602-639 (1974).

Istituto Matematico "G.Castelnuovo"
Città Universitaria
00100 Roma