CURVE SU K3-1 (Tor Vergata, 23/1/19)

Oggi introduciamo il problema di caratterizzare le curve nonsingolari immergibili in una sup. K3

le chiameremo K3 CURVE

Vedremo come è possibile dare una condizione NECESSARIA intrinseca affinché C sia una K3 curva.

§ MAPPE GAUSSIANE

Due succ. esatte onnipresenti e utili in ogni circostanza.

Sia V $\mathbb{C}$-sp. vettoriale, $\dim(V)=r+1$.

la succ. di Eulero nella versione duale è:

$$0\to\Omega^1_{\mathbb{P}(V)}\to V^\vee\otimes\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{O}\to 0.$$

Se $\otimes \mathcal{O}(2)$:

$$0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}(V)}(2) \to V^\vee \otimes \mathcal{O}(1) \to \mathcal{O}(2) \to 0$$

$$\Rightarrow \quad H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}(V)}(2)) = \Lambda^2 V^\vee$$

Se $X \subset \mathbb{P}^r$ la restriz. della succ. di Eulero $\otimes \mathcal{O}(1)$ ci dà, posto $L = \mathcal{O}_X(1)$:

$$0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}|X} \otimes L \to V^\vee \otimes \mathcal{O}_X \to L \to 0$$

$$\begin{matrix} \Omega^1_{\mathbb{P}|X} \otimes L \\ \parallel \\ M_L \end{matrix}$$

M_L noto as di Lazarsfeld kernel bundle.

Succ. Conormale :

$$0 \to N^\vee_{X/\mathbb{P}} \to \Omega^1_{\mathbb{P}|X} \to \Omega^1_X \to 0$$

$\underline{\underline{I_X}}/I_X^2$ che però esser confrontata con Eulero :

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
 & N^\vee \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & \Omega^1_{P|X} \arrow[r] \arrow[d] & V^\vee \otimes L^{-1} \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r] & 0. \\
 & \Omega^1_X \arrow[d] & & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}
$$

Supponiamo di avere un altro M invertibile. Abbiamo

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
 & N^\vee \otimes LM \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & M_L \otimes M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & V^\vee \otimes M \arrow[r] & LM \arrow[r] & 0 \\
 & \Omega^1_X \otimes LM \arrow[d] & & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

Allore (ricl. $H^0(L) = V^\vee$):

$$H^0(M_L \otimes M) = \ker\left[H^0(L) \otimes H^0(M) \to H^0(LM)\right]$$

$$\phi_{L,M} := H^1(\varphi) : H^0(M_L \otimes M) \to H^0(\Omega^1 \otimes LM)$$

è la MAPPA GAUSSIANA rel a L, M.

CASI PARTICOLARI IMPORTANTI

$\to$ $L = M$

$$\phi_{L,L} : H^0(M_L \otimes L) \longrightarrow H^0(\Omega^1_X \otimes L^2)$$

$$H^0(M_L \otimes L) = \ker\left[H^0(L) \otimes H^0(L) \to H^0(L^2) \right] \cong I_2(X) \oplus \Lambda^2 H^0(L)$$

Quindi

$$\phi_{L,L} : I_2(X) \oplus \Lambda^2 H^0(L) \to H^0(\Omega^1_X \otimes L^2)$$

e $\ker(\phi_{L,L}) = H^0(N^\vee \otimes L^2)$

Claim $I_2(X) \subseteq \ker(\phi_{L,L})$

dim.

$0 \to I_X^2(2) \to I_X(2) \to N^\vee \otimes L^2 \to 0$

$H^0(-)$:

$$0 \to H^0(I_X^2(2)) \to H^0(I_X(2)) \to H^0(N^\vee \otimes L^2)$$

$$\overset{\shortparallel}{0} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \square$$

$\therefore$ $\phi_{L,L}$ è equivalente a

$$\phi_L \doteq \phi_{L,L}\Big|_{\Lambda^2 H^0(L)} : \Lambda^2 H^0(L) \to H^0(\Omega^1_X L^2)$$

$\longrightarrow$ $X = C$ curve proj. lisse

$$\phi_L : \Lambda^2 H^0(L) \to H^0(\omega_C L^2)$$

ancora $\quad v \wedge w \mapsto R(\langle v, w\rangle) \in |\omega L^2|$

divisore di ramificaz. del fascio.

(classicamente chiamato: GRUPPO JACOBIANO del fascio)

ϕ_L si può interpretare geometr.:

Sia
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\gamma_L"] \arrow[d] & \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \\ G(2,V) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

l'applic. di Gauss composta con Plücker.

Allora ϕ_L è l'applic. di restriz. delle sezioni iperpiane.

→ C curva , $L = \omega_C$

$$\phi_\omega : \Lambda^2 H^0(\omega) \longrightarrow H^0(\omega^3)$$

è la <u>mappa di Wahl</u>

ha un carattere completamente intrinseco.

→ OSSERVAZIONE su $\ker(\Phi_L)$ e $\operatorname{coker}(\phi_L)$.

sono controllati da $H^0(N^\vee \otimes L^2)$ e $H^1(N^\vee \otimes L^2)$

e ci diciamo se $\gamma_2(C)$ è

degenere e/o non lin. normale.

§ ESTENDIBILITÀ

<u>Definizione</u>: $C \subset \mathbb{P}^r$ ns

si dice s-estendibile, $s \geq 1$,

se $\exists$ una varietà (SH)-dim.le

$X \subset \mathbb{P}^{r+s}$, non un cono su C,

e uno sp. lineare $\Sigma \cong \mathbb{P}^r \subset \mathbb{P}^{r+s}$

t.c. $C = X \cap \Sigma$.

Se $s=1$ diciamo C estendibile.

X si dice una s-estensione

(estensione se $s=1$) di C

PROPOSIZIONE 1

Supponiamo che $X \subset \mathbb{P}^{r+1}$ e esista H iperpiano t.c. $C = H \cap X$.
Sia $L = \mathcal{O}_C(1) = N_{C/X}$.
Allora una delle due condiz. seguenti è verificata:

- $\Phi_{\omega,L}$ non è suriettiva
- la succ. conormale di $C \subset X$ si spezza.

DIM. Si ha $C = X \cap H$

dove $H \subset \mathbb{P}^{r+1}$ è un iperpiano

Diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & L^{-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Omega^1_{\mathbb{P}^{r+1}|_C} \arrow[r] & \Omega^1_{H|_C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\eta: & 0 \arrow[r] & L^{-1} \arrow[r] & \Omega^1_{X|_C} \arrow[r] & \omega_C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Oss. La nostra superficie si spezza perché $\mathrm{Ext}^1_H(\Omega^1_H, \mathcal{O}_H(-1)) =$

$$H^1(T_H(-1)) = 0.$$

Consideriamo:

$$\begin{tikzcd}
 & & \Omega^1_{\mathbb{P}^{n+1}}|_C \otimes \omega L \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^1_{H|_C} \otimes \omega_C L \arrow[d, "\varphi"] & \\
0 \arrow[r] & \omega_C \arrow[r] & \Omega^1_{X|_C} \otimes \omega_C L \arrow[r] & \omega_C^2 L \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Se $\Phi_{\omega_C, L} = H^0(\varphi)$ suriettiva

$\Rightarrow H^0(\Omega^1_{X|C} \otimes \omega_C L) \to H^0(\omega_C^2 L)$ suriettiva

$\Rightarrow 0 = \delta : H^0(\omega_C^2 L) \to H^1(\omega_C)$

Ma $\delta \in H^0(\omega_C^2 L)^\vee = H^1(L^{-1}\omega_C^{-1}) =$

$$= \mathrm{Ext}^1(\omega_C, L^{-1})$$

e $\delta = \eta$. $\square$

Dobbiamo capire geometricamente da cosa dipende lo spezzamento della succ. conormale.

Qui ci viene in soccorso

$\boxed{\text{\underline{PROP} 2 (Beauville-Mérindol)}}$

Sia $C = X \cap H$, con

$X \subset \mathbb{P}^{r+1}$ superficie non degenere. – Supp. $h^0(\mathcal{O}_C(1)) = r+1$.

Consideriamo le seguenti condizioni:

(i) la succ. conormale di $C \subset X$ si spezza.

(ii) $\exists\, v \in \mathbb{P}^{r+1} \setminus H$ t.c.

$\forall x \in C$ il p. tg $\overline{T_x X} \ni v$.

Allora

(ii) $\Rightarrow$ (i) e

se $g \geq 1$ (ii) $\Leftrightarrow$ (i)

OSSERVAZIONE: Non si sta supponendo che X sia un'estensione di C, cioè X potrebbe anche essere un cono.
In tal caso la cond. (ii) è verificata con v = vertice e quindi anche (i) è vera.
In generale la (ii) dice che il cono $C \cdot V$ e X sono tangenti lungo C.

DIM. (ii) $\Rightarrow$ (i).

Per ogni $x \in C$ la retta $\langle x, v \rangle$ definisce un ss vettoriale di $T_x X$ trasversale a $T_x C$

L'unione $\bigcup_{x \in C} \langle x, v \rangle$ definisce un $W \subset T_{X|C}$ complementare a T_C e quindi induce uno spezzamento della succ. normale.

$(i) \Rightarrow (ii)$

Consideriamo Eulero$(-1)|_C$:

$$0 \to \mathcal{O}_C(-1) \xrightarrow{a} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1))^\vee \otimes \mathcal{O}_C \to T_{\mathbb{P}^{n+1}}|_C(-1) \to 0$$

Claim : $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1))^\vee \cong H^0(T_{\mathbb{P}^{n+1}}|_C(-1))$

dim

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1)) \otimes H^0(\omega_C) \arrow[rr, "H^1(a)^\vee"] \arrow[dr, "\nu"'] & & H^0(\omega_C(1)) \\
& H^0(\mathcal{O}_C(1)) \otimes H^0(\omega_C) \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

ν è suriettiva per ipotesi.
μ è suriett. perché $g \geq 1$ (da vedere dopo)

$\Rightarrow H^1(a)^\vee$ suriett. $\Rightarrow H^1(a)$ iniett.

$\square$

Dal Claim segue che

$$\boxed{H^0(T_{\mathbb{P}^{2t+1}}(-1)) \xrightarrow[\cong]{} H^0(T_{\mathbb{P}^{2t+1}|C}(-1))}$$

L'ipotesi che la succ. normale spezza

$$\begin{array}{c} 0 \to T_C \to T_{X|C} \to N_{C/X} \to 0 \\ \hphantom{0 \to T_C \to T_{X|C} \to {}} \| \\ \hphantom{0 \to T_C \to T_{X|C} \to {}} \mathcal{O}_C(1) \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\exists\ 0 \neq i : \mathcal{O}_C(1) \to T_{X|C}$$

e quindi:

$$0 \to T_{X|C}(-1) \to T_{\mathbb{P}^{2t+1}|C}(-1) \xrightarrow{u} N_{X/\mathbb{P}^{2t+1}|C}(-1) \to 0$$

$\exists\ 0 \neq s \in H^0(T_{\mathbb{P}^{2t+1}|C}(-1))$, $s \in \ker(H^0(u))$.

Da $\boxed{}$ deduciamo

l'∃ di sistema di coordinate

$x_0, \dots, x_{n+1}$ in $\mathbb{P}^{n+1}$ tali che

$$s = \frac{\partial}{\partial x_0}\Big|_C .$$

La condizione $s \in \ker[H^0(\mu)]$

significa che $\frac{\partial F}{\partial x_0}$ si annulla

su C $\forall F \in I_X$.

Ciò si può anche esprimere così: $\forall F \in I_X$ l'iperpiano tg

$\sum \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) X_i$ contiene $(1,0,\dots,0) = v$.

Quindi $T_x X \ni v$.

Infine osserviamo che $v \notin H$. perché altrimenti tutte le rette tg a C passerebbero per v. ✗.

Resta da dire se

LEMMA. C di genere $g \geq 1$

L molto ampio birazionale. $\Rightarrow$

$H^0(L) \otimes H^0(\omega) \to H^0(\omega L)$ suriettiva

dim Sia $D = P_1 + \dots + P_{r-1}$

generale. Allora: $|L(-D)|$ è senza bpf.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & \\
 & H^0(\omega L^{-1}(D)) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & H^0(\omega) \otimes H^0(L(-D)) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & H^0(\omega) \otimes H^0(L) \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & H^0(\omega) \otimes H^0(L_{|D}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(\omega L(-D)) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\omega L) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\omega \otimes L_{|D}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{coker}(\beta) \arrow[r, two heads] & \operatorname{coker}(\mu) \arrow[d] & 0 & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Ma $h^0(\omega L^{-1}(D)) = g - d + r$

$\therefore \quad rk(\beta) = 2g - (g - d + r)$

$= g + d - r$

$= h^0(\omega L(-D))$

$\Rightarrow$ ξ suriettiva $\square . \square$

COROLLARIO Nella situazione della Prop. 2, supponiamo che sia soddisfatta la condizione (ii), che S sia l'intersezione delle quadriche che la contengono e che non sia un cono. Allora esiste un'involuzione σ di S il cui luogo fisso è C.

DIM. La (ii) implica che

per ogni $Q \in I_2(S)$ l'iperpiano polare di v rispetto a Q contiene C (teorema di reciprocità). Pertanto

$\frac{\partial Q}{\partial x_0} = a x_0$, cioè $Q = a x_0^2 + q(x_1, \dots x_{n+1})$

con $a \neq 0 \iff v \notin Q$

$a = 0 \iff v \in Q$ e Q è cono di vertice v.

L'involuzione

$\sigma : (x_0, \dots x_{2t+1}) \mapsto (-x_0, \dots x_{2t+1})$

fissando v e H, manda Q in sé stessa.
Ma allora σ induce involuzioni su $S = \bigcap Q$ che fissa

$H \cap [\bigcap Q] = C$. oppure $C \cup \{v\}$.

Quest'ultimo caso si verifica se e solo se $v \in Q$ $\forall Q \in I_2(S)$
Ma in tal caso
S è un cono di vertice v
caso che è escluso per ipotesi.

$\square$

Ultima modifica: 12:06