CURVE SU K3-2 (Tor Vergata, 23/1/19)

§ K3 CURVE E MAPPA DI WAHL

Sia C di genere $g \geq 3$.

e consideriamo

$$w := \Phi_{\omega_C} : \bigwedge^2 H^0(\omega_C) \longrightarrow H^0(\omega_C^3)$$

le dimensioni sono $\qquad \binom{g}{2} \qquad\qquad 5(g-1)$

e $\binom{g}{2} \geq 5(g-1) \iff g \geq 10$

Quindi certamente w non è suriettiva se $g \leq 9$.

Il comportamento generico di w è stato studiato da

Mori - Mukai $\qquad\qquad g = 11$

Ciliberto-Miranda $g \leq 9$
Ciliberto-Harris-Miranda $g = 10, \geq 12$

I risultati sono:

<u>TEOREMA</u>. Sia C curva generale di genere $g \geq 3$. Allora

g	w
$3 \leq g \leq 8$	iniettiva
9	nucleo 1-dim.le
10	isomorfismo
11	conucleo 1
≥ 12	suriettiva

Le K3 curve hanno un comportamento speciale rispetto a w.

TEOREMA (WAHL, BM)

Se C è una K3 curva allora w non è suriettiva.

OSSERVAZIONE
Quindi la non-suriettività di W è condizione necessaria affinché C sia una K3 curva.
Osserviamo che W è un'applicazione completamente intrinseca, la sua non-suriettività significa che l'immagine di gauss

$\gamma_W(C) \subset \mathbb{P}^{5g-6}$

non è linearmente normale.

Quindi grosso modo una K3 $S \supset C$ individua un centro di proiezione $v \in \mathbb{P}^{5g-5}$.

Prima di dire il teorema discutiamo un

ESEMPIO. Sia $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva piana ns di grado $d \geq 5$.

In $\mathbb{P}^{g-1}$ abbiamo

$$C \subset S \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

dove $S = V_{2,d-3}$ è lo sup. di Veronese. La mappa w si fattorizza:

$$\bigwedge^2 H^0(\omega_C) \xrightarrow{\alpha} H^0(S, \Omega^1_S(2)) \xrightarrow{\beta} H^0(\omega_C^3)$$

α è suriettiva, ma non lo dico. perché non ci serve (ed è difficile).

β si fattorizza così:

$$\begin{tikzcd}
H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^2}(2d-6)) \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "\beta"'] & H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^2}|_C(2d-6)) \arrow[d, "b"] \\
& H^0(\mathcal{O}_C(3d-9))
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{coker}(a) \subset H^1(\Omega^1_{\mathbb{P}^2}(d-6)) = 0 \therefore a$ surj

$$\begin{tikzcd} H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^2/C}(2d-6)) \arrow[r, "b"] & H^0(\mathcal{O}_C(3d-9)) \arrow[r] & H^1(\mathcal{O}_C(d-6)) \arrow[d] \\ & \operatorname{coker}(b) \arrow[u, equal] & 0 \\ & \operatorname{coker}(\beta) \arrow[u, equal] & \end{tikzcd}$$

Ma
$$H^1(\mathcal{O}_C(d-6)) = H^0(\mathcal{O}_C(3)) = 10$$

$\therefore \quad \operatorname{cork}(w) = 10 \quad .$ $\square$

Con un calcolo simile si dimostra che se $C \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ $g \geq 5$
$\Rightarrow \operatorname{cork}(w) \geq 9$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA .

Poniamo sempre che $g \geq 10$ e che C non sia trigonale. (se è trigonal $\operatorname{cork}(w) \geq 9$).
Supp. $C = S \cap H$ con $S \subset \mathbb{P}^g$

una sup K3. Lo ripetiamo.

Per il teorema sull'estendibilità delle due cose:

- la succ. normale di CCS si spezza
- w uno è suriettiva.

Quindi è sufficiente considerare il caso in cui la succ. normale si spezza.

Allora CCS soddisfa la condizione (ii) della Prop. 2. e quindi, essendo intersezione di quadriche si applica il Corollario –

Pertanto $\exists\ \sigma : S \to S$ che fissa C, che è indotta

dall'involuzione di $\mathbb{P}^g$ che fissa σ ed H.

Ne consegue che il morfismo

$S \to S/\sigma =: T$ è indotto dalla

proiezione $\mathbb{P}^g \setminus \{o\} \to \mathbb{P}^{g-1}$

ma allora $T \subset \mathbb{P}^{g-1}$ è una

superficie di Del Pezzo (non sing.)
di grado $g-1$ – Ma allora

$$g-1 \leq 9 \quad \text{cioè} \quad g \leq 10.$$

$g \leq 9$ è escluso, resta il

caso $g=10$. Ma allora

$S = V_{2,3} \cong \mathbb{P}^2$ (sup di Veronese)

e $C \subset \mathbb{P}^2$ è una sestica non sing. –
Nell'esempio precedente abbiamo
visto che $\operatorname{cork}(w) = 10$. $\square$.

OSSERVAZIONE

Quindi la non suriettività
di $w = \Phi_{\omega_C}$ è condizione

necessaria perché C possa
essere una K3 curva.

La condizione però non è
sufficiente. Esistono molti

con esempi. Il più semplice è dato da una curva piana nonsingolare di grado $d \geq 7$.

A questo punto la ricerca di una condizione sufficiente perché C sia una K3 curva continua tutt'ora.

Ultima modifica: 12:13