CURVE SU K3-3 (Tor Vergata 30/1/19)

§ NASTRI (RIBBONS)

Sia Y uno schema ridotto e connesso, L un fascio invertibile su Y.

Un *nastro* (in inglese *ribbon*) su Y con fibrato normale L è uno schema $\tilde{Y}$ t.c. $\tilde{Y}_{red} = Y$,

$$\mathcal{J}^2_{\tilde{Y}/Y} = 0 \quad \text{e}$$

$$L^\vee = \mathcal{J}_{\tilde{Y}/Y} = \ker\left[\mathcal{O}_{\tilde{Y}} \to \mathcal{O}_Y\right]$$

Ad ogni nastro $\tilde{Y}$ su Y si associa un diagramma la cui riga sotto è la successione conormale di $Y \subset \tilde{Y}$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & L^\vee \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_{\tilde{Y}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
e_{\tilde{Y}}: & 0 \arrow[r] & L^\vee \arrow[r] & \Omega^1_{\tilde{Y}|Y} \arrow[r] & \Omega^1_Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

L'estensione $e_{\tilde{Y}} \in \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_Y, L^\vee)$ è associata canonicamente ad $Y \subset \tilde{Y}$.

L'estensione banale è associata al nastro spezzato, che è l'unico con la proprietà che esiste una retrazione: $\tilde{Y} \to Y$.
Viceversa ad ogni classe di estensione in $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_Y, L^\vee))$ si associa un nastro non spezzato.

ESEMPIO: Sia $Y \subset X$ ipersuperficie X e Y non singolari.
Abbiamo a priori due nastri associati a questa situazione.
Il primo è quello associato alla succ. esatta canonica

$$0 \to N^\vee_{Y/X} \to \Omega^1_{X|Y} \to \Omega^1_Y \to 0$$

Il secondo è quello definito da $\mathcal{O}_{\tilde{Y}} = \mathcal{O}_X / \mathcal{J}^2_{Y/X}$.

Entrambi appartengono a

$\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_Y, N^\vee_{Y/X})$. È facile vedere che coincidono. Si denotano con $2Y$.

Caso particolare: $H \subset \mathbb{P}^{r+1}$ iperpiano.

Allora

$2H \in \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_H, \mathcal{O}(-1)) = H^1(T_H(-1)) = 0$

quindi $2H$ è spezzato.

ESEMPIO. Se C è una curva non-singolare di genere g e $\tilde{C}$ è un nastro su C con fibrato conormale L allora si ha

$$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{C}}) = \chi(\mathcal{O}_C) + \chi(L^\vee) = 2(1-g) - d$$

e quindi

$$\boxed{\tilde{g} = g(\tilde{C}) = 2g - 1 + d}$$

Se $C \subset S$ allora

$$g(2C) = 2C^2 + CK + 1$$

che è il genere aritmetico di $|2C|$.

§ NASTRI E MAPPE GAUSSIANE

Supponiamo che L sia molto

anche su C non-singolare.
Sia $H = \mathbb{P} H^0(L)^\vee$

L'omomorfismo $\Omega^1_{H|C} \to \omega_C$

induce un'applicazione lineare:

$$\eta : \mathrm{Ext}^1_C(\omega_C, L^{-1}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_C(\Omega^1_{H|C}, L^{-1})$$

la cui trasposta è:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_C(L^{-1}, \Omega^1_{H|C} \otimes \omega_C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_C(L^{-1}, \omega_C^2) \\ \| & & \| \\ H^0(\Omega^1_{H|C} \otimes \omega_C L) & \xrightarrow[\phi_{\omega_C, L}]{} & H^0(\omega_C^2 L) \end{array}$$

PROPOSIZIONE. Nella situazione precedente. Sia $H \subset \mathbb{P}$ iperpiano e $S \subset \mathbb{P}$ t.c. $C = S \cap H$. Allora

$$2C \in \ker(\eta).$$

Quindi, se $2C$ non è spezzato allora $\phi_{\omega_C, L}$ non è suriettiva.

Dim.

Abbiamo la seguente situazione

$$
\begin{tikzcd}
e_{2H}|_C : 0 \arrow[r] & L^{-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Omega^1_{\mathbb{P}}|_C \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^1_H|_C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\gamma(2C) : 0 \arrow[r] & L^{-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^1_H|_C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L^{-1} \arrow[r] & \Omega^1_S|_C \arrow[r] & \omega_C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

La freccia $\longrightarrow$ esiste perché $2C \subset S \subset \mathbb{P}$ e questo implica che $\longrightarrow$ è un isomorfismo.

Allora $e_{2H}|_C \cong \gamma(2C)$ ma e_{2H} è spezzata.

Se $2C$ non è spezzata allora γ non è iniettiva e quindi $q_{\omega_C, L}$ non è suriettiva. $\square$