CURVE SU K3-4 (Tor Vergata, 30/1/19)

§ DEFORMAZIONI DI CONI

Oggi iniziamo a investigare l'esistenza di condizioni sufficienti per l'estendibilità di una curva canonica.
Lo facciamo introducendo un argomento di teoria delle deformazioni.

Scegliamo di avere una varietà proiettiva $Y \subset \mathbb{P}^r$ di dimensione > 0.
Supponiamo Y irriducibile, non singolare ed aCM (aritmeticamente di Cohen-Macaulay).
Ciò implica che

$$A_Y = A = \oplus A_k = \bigoplus_k H^0(Y, \mathcal{O}_Y(k))$$

coincide con P/I, l'anello delle coordinate proiettive di Y.

(dove $P \cong k[x_0, \dots, x_r]$,

$I = I_Y$ l'ideale omogeneo di Y).

Sia

$$C_Y = \mathrm{Spec}(A) \quad \text{il cono affine su } Y.$$
$$\cap$$
$$\mathrm{Spec}(P) = \mathbb{A}^{r+1}.$$

La teoria delle deformazioni di C_Y è "controllata" da certi A-moduli

$$T^1_A = \bigoplus_k T^1_{A,k}, \qquad T^2_A = \bigoplus_k T^2_{A,k}$$

di T^2_X non darò la definizione generale.

T^1_A è definito attraverso una presentazione

$$\bigoplus_k H^0(Y, \mathcal{O}_Y(k+1))^{r+1} \to \bigoplus_k H^0(Y, N_{Y/\mathbb{P}^r}(k)) \to \bigoplus_k T^1_{A,k} \to 0$$

ed è supportato su $\mathrm{Sing}(C_Y)$.

Poiché C_Y ha una singolarità isolata in $\underline{0}$, $\dim_{\mathbb{C}}(T^1_X) < \infty$

e quindi solo un # finito di

$T^1_{A,k} \neq 0$.

T^1_A è lo spazio tg al funtore

Def_{C_Y} - In partic.

$T^1_{A,0}$ corrisponde alle deformazioni su $k[\varepsilon]$ che sono indotte da deformazioni di $Y \subset \mathbb{P}^2$, cioè che sono deformazioni coniche.

T^2_A è lo spazio che contiene le ostruzioni alla liscezza di

Def_{C_Y}.

Wahl ha calcolato T^1_A e T^2_A nel caso di curve canoniche.

TEOREMA (Wahl)

Sia $Y = C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ una curva canonica. Allora:

(i) $\dim(T^1_{A,0}) = 3g-3$

$\dim(T^1_{A,1}) \geq g$.

$\dim(T^1_{A,2}) = 1$

$T^1_{A,k} = 0 \qquad k \geq 3.$

(ii) $\forall\ k \geq 1$

$$(T^1_{A,-k})^\vee \cong \operatorname{coker}(\phi_{\omega,\omega^k})$$

in partic $(T^1_{A,-1})^\vee \cong \operatorname{coker}(\phi_\omega)$

(iii) $(T^2_{A,1-k})^\vee \cong H^1(\mathbb{P}^{s-1}, \mathcal{I}^2_C(k))$

In particolare: se

$H^1(\mathbb{P}^{s-1}, \mathcal{I}^2_C(k)) = 0 \quad \forall k \neq 2$

allora $T^2_A = T^2_{A,-1}$ e

$$(T^2_{A,-1})^\vee \cong \ker(\phi_\omega).$$

<u>DIM</u>. Segue da facili calcoli

con varie successioni esatte, che omettiamo. $\square$

§ IL TEOREMA DI ESTENDIBILITÀ

Nel 1997 Wahl ha dimostrato il seguente notevole

TEOREMA (Wahl)

Supponiamo che $\mathrm{Cliff}(C) \geq 3$ e che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

- $H^1(\mathbb{P}^{g-1}, \mathcal{I}_C^2(k)) = 0 \quad \forall k \neq 2$.
- $\Phi_{\omega_C} : \bigwedge^2 H^0(\omega_C) \to H^0(\omega_C^3)$ non suriettiva.

Allora C è estendibile.

OSSERVAZIONI. Ricordiamo che l'estendibilità di C significa che esiste una superficie non cono

$\bar{S} \subset \mathbb{P}^g$ e iperpiano $H \subset \mathbb{P}^g$

t.c. $C = \bar{S} \cap H$.

Quindi $\bar{S}$ è una superficie a sezioni iperpiane curve canoniche. Se $\bar{S}$ è nonsingolare allora $\bar{S}$ è una K3.
Ma $\bar{S}$ è a priori solo una superficie a CM, quindi in particolare è normale.

Quindi il teorema non dà una condizione sufficiente perchè C sia una K3 curva.
Infatti esistono molti esempi di $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ che sono estendibili ma non sono K3 curve.
(e.g. curve piane di grado ≥ 7).

CENNI DI DIM DEL TEOREMA

La dimostrazione del teorema usa argomenti di teoria delle deformazioni. E' una dim molto esplicita che non è utile per voi fare in dettaglio. Però sarà interessante spiegarne a grandi linee la struttura soprattutto per capire in che modo entrano in gioco le ipotesi.

Le ipotesi implicano che si ha una presentazione:

$$P(-3)^b \xrightarrow[\rho]{} P(-2)^a \xrightarrow{f} P \to P/_I = A \to 0 \quad (*)$$

dove f è determinata dalle

$a := \binom{g-2}{2}$ quadriche che generano I_C

(teorema di Petri e $\mathrm{Cliff}(C) \geq 3$)

ρ è determinata da una matrice $a \times b$ di forme lineari le cui colonne sono relazioni (sizigie) tra le quadriche. Il fatto che tutte le relazioni siano generate da sizigie lineari è un teorema dovuto a Schreyer e Voisin (indip).

La presentazione (*) induce

$$P(-2)^a \longrightarrow I$$

e quindi

$$\mathrm{Hom}(I/I^2, A) \subset A(2)^a$$

Avendosi una successione

$$\begin{array}{c} \mathrm{Hom}(I/I^2, A) \to T^1_A \to 0 \\ \cap \\ A(2)^a \end{array}$$

si vede che gli elementi di

$T^1_{A,-1}$ possono descriversi come

a-uple di forme lineari $(A_1 = P_1)$

L'ipotesi ϕ_ω non suriettiva

$\Rightarrow T^1_{A,-1} \neq 0$ e un suo

elemento non nullo è rappresentato da un a-vettore di forme lineari. Denotiamolo con $f^{(1)}$.

Scriviamo

$$F = f + \varepsilon f^{(1)} \qquad \varepsilon^2 = 0$$

dove

$$f \in P_2^a, \quad f^{(1)} \in P_1^a.$$

F definisce la deformaz. del 1° ordine di Spec(A) corrispondente ad $f^{(1)}$.

Questa affermazione significa che il morfismo

(Δ) $$\mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[\varepsilon]/(F)\right) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\varepsilon])$$

è piatto. La piattezza significa che ogni relazione tra le f si solleva ad una relazione tra le F.

Cioè $\forall\ r \in P^a_1$ t.c. ${}^t r \cdot f = 0$ $\exists\ r^{(1)} \in \mathbb{C}^a$ t.c.

NB $r^{(1)}$ è costante polinomiori di grado

$${}^t R F = 0 \quad \text{dove} \quad R = r + \varepsilon r^{(1)}.$$

La teoria delle deformazioni ci dice che la deformazione (A) si solleva ad una vera deformazione su

$$\mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[t])$$

se non ci sono ostruzioni.
ad ogni sollevamento successivo di F a $\mathbb{C}[t]/(t^3)$, $\mathbb{C}[t]/(t^4)$, ecc...

Vediamo il primo caso:

Abbiamo un sollevamento

$$F^{[2]} = f + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)}$$

in $\mathbb{C}[\varepsilon] = \mathbb{C}[t]/(t^3)$.

che sia piatto su $\mathbb{C}[\varepsilon]$.

Cioè per ogni $R = R + \varepsilon R^{(1)}$

si deve avere ${}^{t}R\, F^{(2)} = 0$

(R non può estendersi ulteriormente per motivi di grado)

Facili calcoli mostrano che:

→ $f^{(2)} \in \mathbb{C}^{a}$ è un vettore di costanti

→ l'ostruzione all'$\exists$ di $F^{(2)}$ appartiene a

$$T^2_{A,-k} \qquad k \geq 3$$

Ma

$$T^2_{A,1-k} = H^1(I^2_C(k)) = 0 \quad k \neq 2$$

per ipotesi. Questo

implica l'$\exists$ di $f^{(2)}$.

I casi successivi si trattano nello stesso modo e si vede che già

$$\overline{F} := f + t f^{(1)} + t^2 f^{(2)}$$

è piatto su $\mathbb{C}[t]$ e quindi la deformazione cercata

è $\overline{\mathcal{C}} := \operatorname{Spec}\left(P[t]/\overline{F}\right) \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^1$.

ovviamente che $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathbb{A}^{g+1}$ è una varietà affine di dimensione 3, e le fibre di π sono deformazioni di $\mathcal{C}_\varphi$.

Inoltre il sistema di polinomi $\overline{F}$ è omogeneo di grado 2

nelle variabili $t, x_0, \dots, x_{g-1}$.

Quindi ho fatto vedere

$$\bar{S} := \mathrm{Proj}\left(\frac{P[t]}{\bar{F}}\right) \subset \mathrm{Proj}\,(P[t]) = \mathbb{P}^3$$

e $$\bar{S} \cap H = C$$

dove $H : \{t=0\}$ $\square$

OSSERVAZIONI

Il punto oscuro di questo teorema è l'ipotesi

* $$H^1(\mathcal{I}_C^2(k)) = 0 \quad k \neq 2$$

che è di difficile interpret. geometrica.

ed è di ostacolo alla comprensione dello scarto tra le condizioni:

→ C estendibile

→ C K3 curva.

Ricordando che $H^1(I_C^2(2)) = \ker(\phi_{\omega_C})$ vediamo che sicuramente, se $g \geq 11$ allora $H^1(I_C^2(2)) \neq 0$.

Nel suo lavoro del 1997 Wahl ha dimostrato che la condizione

* è soddisfatta da una curva di genere $g \geq 8$ generale

Purtroppo nel teorema di estendibilità di Wahl non si fa l'ipotesi che C sia generale (anzi C non lo è, visto che ha $g \geq 11$ e ϕ_ω non suriettiva). Comunque nello stesso lavoro Wahl congettura che la * sia valida per ogni curva C tale che $\mathrm{Cliff}(C) \geq 3$.
Questa congettura è stata dimostrata nel 2017

TEOREMA (Arbarello - Bruno - S)

ogni curva C t.c. $\mathrm{Cliff}(C) \geq 3$ soddisfa
$$H^1(\mathcal{I}^2_{C/\mathbb{P}^{g-1}}(k)) = 0 \quad \forall k \neq 2.$$

Combinando questo risultato con il teorema di estendibilità di Wahl otteniamo il

$\boxed{\text{COROLLARIO:}}$ Sia C t.c. $\mathrm{Cliff}(C) \geq 3$ e Φ_{ω_C} non suriettiva.

Allora C è estendibile.

La dimostrazione del teorema è molto tecnica ed elaborata. Certamente non possiamo parlarne qui.

Aggiungiamo ancora qualche osservazione.

Il corollario dà una condizione sufficiente affinché una C sia estendibile.

ma come sappiamo l'estendibilità è una necessità più debole dell'essere una K3 curva

Infatti si può verificare che le curve piane nonsingolari di grado ≥ 7 soddisfano le ipotesi del teorema di Wahl (cioè $\mathrm{Cliff}(C) \geq 3$ e $(*)$) e quindi sono estendibili ma non sono K3 curve.

Wahl ha congetturato che:

CONGETTURA (Wahl 1997)

Se C è Petri generale di genere $g \geq 8$ allora è una K3 curva se e solo se Φ_{w_C} non è suriettiva.

Questa congettura è stata dimostrata da ABS per $g \geq 11$ nella seguente forma leggermente più debole:

TEOREMA (ABS, 2017)

Una curva Petri generale C di genere $g \geq 11$ ha Φ_{ω_C} non suriettiva $\Longleftrightarrow$ C è contenuta su una superficie K3 o in una superficie normale che è limite di K3.

In realtà la congettura originale di Wahl è falsa. Infatti esistono curve Petri generali di genere ≥ 11 con Φ_ω non suriettiva che non sono K3 curve, ma sono contenute in superfici limite di K3 (dimostrato da Arbarello-Bruno).