Curve su K3-5 (Tor Vergata, 6/2/19)

BREVE RIASSUNTO DI TEORIA DI BRILL-NOETHER

Sia C curva proiettiva liscia di genere g.
Consideriamo i luoghi:

$$W^r_d := \{L \in Pic^d(C) : h^0(L) \geq r+1\}$$

sono chiusi e hanno struttura naturale di sottoschemi chiusi.
Sia $L \in W^r_d$. Si ha identific. naturale

$$T_L Pic^d(C) = H^1(C, \mathcal{O}_C).$$

Ad ogni $\gamma \in H^1(C, \mathcal{O}_C)$ corrisponde una deformazione infinitesimale di L nella direzione γ che si può descrivere come un fascio invertibile $\mathcal{L}_\gamma$ su $C \times Spec\, \mathbb{C}[\varepsilon]$.

LEMMA: Sia $\sigma \in H^0(L)$. Allora σ si estende ad una sezione $\sigma_\gamma \in H^0(\mathcal{L}_\gamma) \iff \sigma \cdot \gamma = 0 \in H^1(C, L)$.

dim: In un opportuno ricoprimento affine abbiamo

$$L \longleftrightarrow \{f_{ij}\} \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_C^*)$$
$$\longleftrightarrow \{g_{ij}\} \in H^1(C, \mathcal{O}_C)$$

$$\mathcal{L}_\gamma \longleftrightarrow \{f_{ij}+\varepsilon g_{ij}\} \in H^1(\mathcal{O}^*_{C\times \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\varepsilon])})$$

$$\sigma = \{\sigma_i\} \in H^0(\mathcal{U}, L) \Leftrightarrow \sigma_i = f_{ij}\sigma_j$$

σ_γ se esiste, è della forma:

$$\sigma_\gamma = \{\sigma_i + \varepsilon \tau_i\} \quad \text{con}$$

$$\sigma_i + \varepsilon\tau_i = (f_{ij}+\varepsilon g_{ij})(\sigma_j + \varepsilon \tau_j)$$

$$\Leftrightarrow \quad g_{ij}\sigma_j + f_{ij}\tau_j = \tau_i \Leftrightarrow \tau_i - f_{ij}\tau_j = g_{ij}\sigma_j$$

$$\therefore \{g_{ij}\sigma_j\} \in B^2(\mathcal{U}, L)$$

$$\therefore \sigma \cdot \gamma = 0 \qquad \square$$

Dal lemma deduciamo che

$$T_L W^r_d = \ker\left[H^1(\mathcal{O}_C) \longrightarrow H^0(L)^\vee \otimes H^1(L)\right]$$

e quindi

$$\dim_L W^r_d \geq g - (r+1)(g-d+r) =: \rho(g,r,d)$$

\# di Brill-Noether

e vale $=$

$$\Leftrightarrow \quad H^1(\mathcal{O}_C) \longrightarrow H^0(L)^\vee \otimes H^1(L)$$

suriettiva

$\Updownarrow$

$\mu_{0,L}: H^0(L) \otimes H^0(\omega_C L^{-1}) \to H^0(\omega_C)$ iniettiva.

$\mu_{0,L}$ si dice applicazione di Petri.

Questo ragionamento si può completare osservando che gli schemi W_d^r hanno una definizione determinantale e quindi hanno dimensione $\geq$ dimensione attesa $= \rho(g,r,d)$

si arriva alla seguente conclusione:

TEOREMA (Brill-Noether-Petri)

$\forall L \in W_d^r$ si ha

$$\rho(g,r,d) \leq \dim_L W_d^r \leq \dim \mathrm{coker}(\mu_{0,L})$$

e W_d^r è non singolare di dim. $\rho(g,r,d)$ in L

$$\Updownarrow$$

$\mu_{0,L}$ è iniettiva

DEFINIZIONE: C si dice Brill-Noether generale se W_d^r ha dimensione pura $\rho(g,r,d)$ $\forall r,d$ (in particolare $W_d^r = \emptyset$ se $\rho(g,r,d) < 0$)

C si dice Petri generale se $\mu_{0,L}$ è iniettiva $\forall L$

Il problema principale della teoria di Brill-Noether è dimostrare l'esistenza di curve BN generali o Petri generali

C Petri generale $\Longrightarrow$ C BN generale

Ma $\not\Leftarrow$. Controesempio più semplice: curve di genere 4 il cui modello canonico in $\mathbb{P}^3$ è contenuto in un cono quadrico.

L'esistenza di curve BN generali per ogni $g \geq 0$ è stata dimostrata da Griffiths-Harris (1980) per degenerazione.

L'esistenza di curve Petri-generali è stata dimostrata da Gieseker.

TEOREMA (Gieseker 1982)
Per ogni $g \geq 0$ esistono curve Petri generali

La dimostrazione originale di Gieseker è ottenuta per degenerazione

Poi raffinata da Eisenbud-Harris.

Una dimostrazione che non utilizza tecniche di degenerazione è stata data da Lazarsfeld nel 1986.

Oggi vedremo questa dimostrazione con una variante dovuta a Pareschi.

§ FIBRATI DI LAZARSFELD-MUKAI

Consideriamo una superficie K3 polarizzata (S, L), dove L è un fascio invert. molto ampio.

Sia $C \in |L|$ una curva nonsingolare e sia $A \in \mathrm{Pic}^d(C)$ t.c.

$$h^0(C,A) = r+1 \geq 2,$$

e supponiamo A globalmente generata.

Estendendolo come fascio nullo al di fuori di C possiamo pensare A come un fascio di torsione su S e consideriamo la succ. esatta:

$$0 \to F_{C,A} \to H^0(C,A) \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{ev} A \to 0 \qquad (1)$$

dove $F_{C,A} := \ker(ev)$ è localmente libero di rango $r+1$

Il suo duale $E_{C,A} := F_{C,A}^\vee$

Si chiama <u>FIBRATO DI LAZARSFELD-MUKAI</u>
associato alla coppia (C, A).
Dualizzando otteniamo la
succ. esatta:

$$0 \to H^0(C,A)^\vee \otimes \mathcal{O}_S \to E_{C,A} \to \omega_C A^{-1} \to 0 \quad (2)$$

$$\omega_C A^{-1} = \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(A, \mathcal{O}_S)$$

Dalle due successioni esatte precedenti
si deduce, con facili calcoli:

PROPOSIZIONE:

$$c_1(E_{C,A}) = L$$

$$c_2(E_{C,A}) = \deg(A) = d$$

$E_{C,A}$ è generato dalle sezioni globali al
di fuori dei punti base di $\omega_C A^{-1}$

$$h^0(E_{C,A}) = h^0(A) + h^0(\omega_C A^{-1})$$

$$H^0(F_{C,A}) = H^1(F_{C,A}) = 0.$$

Dimostriamo due risultati
fondamentali.

LEMMA 1 Sia $A \in W^r_d(C) \setminus W^{r+1}_d(C)$ e supponiamo A bpf.
Allora esiste una successione esatta:

$$0 \to \mathbb{C} \to H^0(E_{C,A} \otimes F_{C,A}) \to \ker(\mu_{0,A}) \xrightarrow{\mu} H^1(\mathcal{O}_C) \quad (3)$$

DIM Restringendo a C la (1) otteniamo

$$0 \to \omega_C^{-1} A \to F_{C,A}|_C \to M_A \to 0$$

dove $M_A = \ker\left[H^0(A) \otimes \mathcal{O}_C \to A \right]$.

Infatti $c_1(M_A) = A^{-1}$ e $c_1(F_{C,A}|_C) = L^{-1}|_C = \omega_C^{-1}$.

Tensorizzando $\otimes \omega_C A^{-1}$ otteniamo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_C \arrow[r] & F_{C,A}|_C \otimes \omega_C A^{-1} \arrow[r] & M_A \otimes \omega_C A^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & H^0(A) \otimes \omega_C A^{-1} \arrow[d] & \\
 & & & \omega_C \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

e la riga orizzontale ci dà:

$$0 \to \mathbb{C} \to H^0(F_{C,A}|_C \otimes \omega_C A^{-1}) \to \ker(\mu_{0,A}) \to H^1(\mathcal{O}_C) \quad (4)$$

Infine, tensorizzando la (2) per $F_{C,A}$ otteniamo:

$$0 \to H^0(A)^\vee \otimes F_{C,A} \to E_{C,A} \otimes F_{C,A} \to F_{C,A}|_C \otimes \omega_C A^{-1} \to 0$$

Osservando che $h^0(F_{C,A}) = h^1(F_{C,A}) = 0$ deduciamo che

$$H^0(E_{C,A} \otimes F_{C,A}) \cong H^0(F_{C,A}|_C \otimes \omega_C A^{-1})$$

e sostituendo nella (*) otteniamo la (3).

$\square$

La (3) mostra che se $h^0(E_{C,A} \otimes F_{C,A}) \geq 2$ sicuramente $\ker(\varphi_{0,A}) \neq 0$.

Dobbiamo dare condizioni affinché

$$h^0(E_{C,A} \otimes F_{C,A}) = 1.$$

PROPOSIZIONE 2 Nelle ipotesi precedenti supponiamo che tutte le curve in $|L|$ siano ridotte ed irriducibili. Allora $h^0(E_{C,A} \otimes F_{C,A}) = 1$.

DIM Per assurdo.

Supponiamo $h^0(E_{C,A} \otimes F_{C,A}) \geq 2$.

Allora $\exists f \in H^0(E_{C,A} \otimes F_{C,A}) = \mathrm{Hom}(E_{C,A}, E_{C,A})$

t.c. $0 \neq f \neq c 1_{E_{C,A}}$, $c \in \mathbb{C}$.

Sia $x \in S$ e sia $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di $f_x : E_x \to E_x$. Allora:

$$\det(f - \lambda 1_E) \in H^0(S, \det(E_{C,A}^{*} \otimes F_{C,A})) =$$

$$= H^0(S, \mathcal{O}_S) = \mathbb{C}$$

e $= 0$ in x. quindi lo è ovunque. Quindi, sostituendo f con $f - \lambda 1_E$ se necessario, possiamo supporre che f NON abbia rango massimo ovunque. Poniamo:

$$N = \mathrm{Im}(f), \quad M_0 = \mathrm{coker}(f)$$

$$M = M_0 / \mathrm{Tor}(M_0)$$

Allora:

$$[L] = c_1(E_{C,A}) = c_1(N) + c_1(M) + c_1(\mathrm{Tor}(M_0))$$

e osserviamo che:

- $c_1(\mathrm{Tor}(M_0))$ è rappresentato da una comb. lineare di componenti di $\mathrm{Supp}(M_0)$.
- N ed M sono privi di torsione e $\neq 0$. Inoltre sono genericamente generati dalle

loro sezioni globali, perché quozienti di $\mathcal{O}^{\oplus k}$.
$\Rightarrow c_1(N)$ e $c_1(M)$ sono effettivi o $= 0$.

Per concludere dobbiamo dimostrare che sono entrambi $\neq 0$ perché ciò dimostrerà che $[L]$ è somma di due classi effettive contraddicendo l'ipotesi.

Possiamo supporre che M ed N siano entrambi localmente liberi (altrimenti si passa ai biduali)

Osserviamo che

$N^\vee$ ed $M^\vee \subset F_{C,A}$

e quindi sono non banali, cioè $\not\cong \mathcal{O}_S^k$ perché $h^0(F_{C,A}) = 0$.

Ora concludiamo con il

LEMMA ELEMENTARE: Sia U loc. libero su una varietà X proiettiva nonsingolare. Supp. U genericamente generato dalle sezioni globali. Allora

$c_1(U) = 0 \iff U$ banale.

Dim Sia $u = \mathrm{rk}(U)$. Scegliamo u sezioni di U che lo generano genericamente. Allora abbiamo:

$$0 \to \mathcal{O}_C^{u} \to U \to T \to 0 \qquad T \text{ torsione.}$$

Allora $c_1(U) = c_1(T) = 0 \iff T = 0$ $\square$

e questo concluderebbe dimostr. propriz. 2 $\square$.

Infine avremo bisogno di un altro lemma.

<u>LEMMA</u> L'applicazione μ della (3) si fattorizza nel modo seguente:

$$\begin{tikzcd}
\ker \mu_{0,A} \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\varphi_{A,\omega_C A^{-1}} = \mu_{1,A}"'] & & H^1(\mathcal{O}_C) \\
& H^0(\omega_C^2) \arrow[ur, "\delta_C^\vee"'] &
\end{tikzcd}$$

dove $\delta_C^\vee$ è la trasposta dell'applicaz. di cobordo δ_C nella successione canonicale di $C \subset S$:

$$0 \to \omega_C^{-1} \to \Omega^1_{S|C} \to \omega_C \to 0$$

e

$$\mu_{1,A} = \varphi_{A,\omega_C A^{-1}} : H^0(\Omega^1_{S|C} \otimes \omega_C) \to H^0(\omega_C^2)$$

Dim. Abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & N^\vee_{C/\mathbb{P}^2}\otimes\omega_C \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_C \arrow[r] \arrow[d, equal] & F_{C,A}|_C\otimes\omega_C A^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "t"] & \Omega^1_{\mathbb{P}^2}|_C\otimes\omega_C \arrow[r] \arrow[d, "s"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varphi_C \arrow[r] & \Omega^1_{S}|_C\otimes\omega_C \arrow[r] & \omega_C^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

dove t è indotta dalla restrizione a $F_{C,A}$ di

$$H^0(A)\otimes\mathcal{O}_S \to H^0(A)\otimes\Omega^1_S \to \Omega^1_S|_C\otimes A$$

Allora $\mu_{1,A} = H^0(s)$ e i cobordi delle due successioni esatte orizzontali sono rispettiv. μ e $\delta_C^\vee$. $\square$

§ IL TEOREMA DI LAZARSFELD

Finalmente possiamo enunciare e dimostrare:

TEOREMA (Lazarsfeld 1986)

Supponiamo che (S, L) sia una superficie K3 polarizzata t.c. tutte le curve in $|L|$ siano ridotte ed irriducibili (ad esempio $\mathrm{Pic}(S) = \mathbb{Z} \cdot [L]$).
Allora la generica $C \in |L|$ è Petri generale.

DIM. Dobbiamo far vedere che $\mu_{0,A}$ è iniettiva per ogni $A \in \mathrm{Pic}(C)$. Possiamo supporre A speciale ed è facile vedere che ci si può ridurre al caso in cui A è bpf.
Per quanto dimostrato sappiamo che μ è iniettiva e che abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\ker \mu_{0,A} \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\mu_{1,A}"'] & & H^1(\Theta_C) \\
& H^0(\omega_C^2) \arrow[ur, "\delta_C^\vee"'] &
\end{tikzcd}$$

Osservando che

$$(\ker \mu_{0,A})^\vee = H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^2|C} \otimes \omega_C)^\vee = H^1(T_{\mathbb{P}^2|C})$$

il triangolo dualizzato ci fornisce
il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} H^0(N_{C/\mathbb{P}^2}) \arrow[r] & H^1(T_C) \arrow[r, "\mu_{1,\check{A}}"] & H^1(T_{\mathbb{P}^2}|_C) \\ & H^0(\omega_C) \arrow[u, "\delta_C"] \arrow[ur, "\mu^\vee"'] & \end{tikzcd}$$

(*) $\qquad$ $\mu^\vee$ suriettiva

Sia $U \subset |L|$ l'aperto che parametrizza le
curve nonsingolari e $\mathcal{C} \longrightarrow U$ la famiglia.
Per ogni r, d i $W^r_d(C)$, $[C] \in U$, si
assemblano in una famiglia

$$W^r_d(\mathcal{C}/U) \xrightarrow[\beta]{} U$$

L'ipotesi che $A \in W^r_d(C)$ su $[C] \in U$ generale
implica che β è suriettiva e

$$d\beta_{(C,A)} : T_{(C,A)} W^r_d(\mathcal{C}/U) \longrightarrow T_C U = H^0(\omega_C)$$

è suriettiva per ogni (C,A).
(si usa la caratteristica 0, vedere
Hartshorne, III.10.6 p.272)

La composizione $\delta_C \circ d\beta_{(C,A)}$ è
il differenziale in (C,A) del morfismo
funtoriale

$$W^r_d(\mathcal{C}/U) \xrightarrow{m} M_g, \quad (C,A) \longmapsto [C]$$

Questo morfismo si fattorizza nel seguente modo:

$$
\begin{tikzcd}
(C,A) \arrow[rr, mapsto, "m"] \arrow[dr, mapsto] & & {[C]} \\
& \varphi_A(C) \subset \mathbb{P}^2 \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}
$$

quindi $\delta_C \circ d\beta_{(C,A)}$ si fattorizza così:

$$
\begin{tikzcd}
T_{(C,A)} \mathcal{W}^2_d(\mathcal{C}/U) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^1(T_C) \\
& H^0(N_{C/\mathbb{P}^2}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Ma allora dal diagramma (*) e dalla suriettività di $d\beta_{(C,A)}$ segue che

$$\mu_{1,A} \circ \delta_C = 0$$

e quindi anche $\mu = 0$. Ma μ è iniettiva. Dunque

$$\ker(\mu_{0,A}) = 0 \qquad \square$$

Ultima modifica: 19:01