Curve su K3-6 (Tor Vergata, 6-2-19)

ULTERIORI COMMENTI SULLE K3 CURVE

Sia (S, L) una superficie K3 polarizzata di genere g, cioè tale che $L^2 = 2g-2$.

Supponiamo che $Pic(S) = \mathbb{Z}[L]$. Il teorema di Lazarsfeld ci dice che la generica curva $C \in |L|$ è Petri generale.

Ciò significa che, dal punto di vista della teoria di Brill-Noether, C si comporta come una curva a moduli generali. In altre parole, esiste un aperto

$$\emptyset \neq U \subset M_g = \begin{pmatrix} \text{spazio dei moduli} \\ \text{delle curve di genere } g \end{pmatrix}$$

t.c. tutte le curve $C' \in U$ si comportano allo stesso modo di C.

È notevole chiedersi se C non si

comporti come una curva a moduli generali anche da ogni altro punto di vista.

La risposta è NO. In altre parole C ha un comportamento speciale rispetto ad altre proprietà, per esempio per quanto riguarda la teoria dei fibrati vettoriali.

Questo fatto solleva molti interessanti problemi, di cui non parleremo per mancanza di tempo.

Voglio però terminare queste lezioni mostrando una proprietà delle K3 curve, osservata da Mukai e studiata da Voisin, rispetto alla quale non particolari nel senso dei moduli; cioè non si comportano come le curve più generali.

§ UN LEMMA

Facciamo una digressione.

LEMMA (Mukai) Sia C una curva proiettiva nonsingolare e connessa, e siano $A, B \in \mathrm{Pic}(C)$. C'è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{P}(\mathrm{coker}(\mu_{A,B}))$, dove $\mu_{A,B}: H^0(A) \otimes H^0(B) \to H^0(AB)$

e l'insieme delle classi di
isomorfismo di estensioni non spezzate
(a meno di fattori costanti)

$$(*) \qquad 0 \to \omega_C A^{-1} \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

tali che il cobordo $\partial : H^0(B) \longrightarrow H^1(\omega_C A^{-1})$
sia zero, cioè tali che

$$h^0(E) = h^0(\omega_C A^{-1}) + h^0(B)$$

DIM. Le estensioni $(*)$ non spezzate,
a meno di isomorfismo, corrispondono
biunivocamente agli elementi

$$0 \neq \eta \in \mathrm{Ext}^1(B, \omega_C A^{-1}) = H^1(\omega_C A^{-1} B^{-1})$$

La trasposta di $\mu_{A,B}$ può interpretarsi
come l'applicazione:

$$\mu_{A,B}^\vee : \mathrm{Ext}^1(B, \omega_C A^{-1}) \longrightarrow H^0(B)^\vee \otimes H^1(\omega_C A^{-1})$$

che associa $\quad \eta \longmapsto$ cobordo di $(*)$
$[\partial_\eta : \sigma \to \sigma \cup \eta]$.

Quindi:

$\mu_{A,B}$ non suriettiva $\iff$ $\mu_{A,B}^\vee$ non iniettiva

$\Updownarrow$

$\exists\, \eta \in \mathrm{Ext}^1(B, \omega_C A^{-1}) \setminus \{0\}$ t.c. $\partial_\eta = 0$.

$\square$

COROLLARIO. Sia $M \in Pic(C)$.

l'applicazione

$$\mu_2 : S^2 H^0(M) \longrightarrow H^0(2M)$$

non è suriettiva $\iff$ $\exists$ successione esatta non spezzata:

$$0 \to \omega_C M^{-1} \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

t.c. $\quad 0 = \partial : H^0(M) \longrightarrow H^1(\omega_C M^{-1})$

cioè tale che

$$h^0(E) = h^0(M) + h^1(M)$$

Dim Prendere $A = B = M$ e applicare il lemma $\square$

§ UN'OSSERVAZIONE DI MUKAI - VOISIN.

Consideriamo una superficie K3 polarizzata (S, L) di genere g e supponiamo che $Pic(S) = \mathbb{Z}[L]$.

Per fissare le idee supponiamo $g = 2s$, $s \geq 5$.

Sia $C \in |L|$ generale. Allora, per il

teorema di Lazarsfeld, C è Petri generale.
Poiché

$$\rho(g,1,s+1) = 0$$

esiste $A \in W^1_{s+1}$

La Petri generalità di C implica che $h^0(A) = 2$ e $|A|$ è senza punti base.

Sia $E_{C,A}$ il fibrato (di rango 2) di Lazarsfeld-Mukai di (C, A).

Abbiamo la successione esatta:

$$0 \to H^0(A)^\vee \otimes \mathcal{O}_S \to E_{C,A} \to \omega_C A^{-1} \to 0$$

la cui restrizione a C è:

$$\eta : 0 \to A \to \mathcal{E} \to \omega_C A^{-1} \to 0$$

con $\mathcal{E} = E_{C,A}|_C$.

La successione esatta

$$0 \to F_{C,A} \to E_{C,A} \to \Sigma \to 0$$
$$F_{C,A} = E_{C,A}(-C)$$

e il fatto che $h^0(F_{C,A}) = h^1(F_{C,A}) = 0$

implicano che

$$h^0(\Sigma) = h^0(E_{C,A}) = h^0(A) + h^1(A).$$

Quindi la successione esatta η ha cobordo $\partial_\eta = 0$.

Inoltre η non è spezzata.

Per assurdo supponiamo che η si spezzi

Allora la situazione $\Sigma \to A$ composta con $E_{C,A} \to \Sigma$ $\Rightarrow$ l'esistenza di un diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & F_{C,A} \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d] & F_{C,A} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & E_{C,A} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \omega_C A^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

dove $G = \ker(\eta)$. Dal diagramma segue che

$$c_1(G) = 0$$

(1ª colonna) $h^0(G) = h^1(A) = s \geq 5$

Scegliendo due sezioni generiche di G otteniamo succ. esatta

$$0 \to \mathcal{O}_S^2 \to G \to \mathcal{T} \to 0,$$ e $\mathcal{T}$ è di torsione

(altrimenti G contiene un fascio invertibile M con ≥ 2 sezioni, e $h^0(M) \geq g$ perché $M = kL$, $k \geq 1$ contraddicendo $h^0(G) = s = \frac{1}{2} g$)

Poiché $c_1(G) = 0$ dev'essere $\mathcal{T} = 0$

Quindi G è banale. Ma $\mathrm{rk}(G) = 2$ e

$h^0(G) = h^1(A) > 2$. $\Rightarrow\Leftarrow$

quindi η non si spezza.

Ma allora, per il corollario applicato a $M = \omega_C A^{-1}$, l'applicazione

$$\mu_A : S^2 H^0(\omega_C A^{-1}) \longrightarrow H^0(\omega_C^2 A^{-2})$$

non è suriettiva.

Ma si può verificare che

se C è una curva a moduli generali di genere $g = 2s \geq 10$ allora per ogni $A \in W^1_{s+1}$ l'applicazione μ_A è suriettiva.

Quindi C non si comporta come una curva generale nel senso dei moduli.

Un calcolo simile può farsi per curve di genere dispari.

Ultima modifica: 10 Feb 2019