UNA BREVE INTRODUZIONE ALLE CURVE ALGEBRICHE

Edoardo Sernesi

1. Le curve sono le varietà algebriche più semplici e meglio conosciute; molti problemi fondamentali sono però ancora non risolti e la teoria è in continuo sviluppo.

Si possono studiare le curve in vari modi (analitico, algebrico-geometrico, topologico, fisico): in queste lezioni ho scelto uno solo dei possibili punti di vista, quello strettamente algebrico-geometrico. Mi riferirò sempre a varietà e schemi definiti sul campo complesso $\mathbb{C}$.

Mi è sembrato preferibile dare una visione globale, anche se sommaria, delle curve algebriche piuttosto che trattare uno o più argomenti specifici, che non sarebbero stati abbastanza rappresentativi; tutti gli aspetti della teoria sono importanti anche per capire lo sviluppo delle altre parti della geometria algebrica.

Diversi risultati, o addirittura intere parti della teoria, sono stati conosciuti molto prima di essere dimostrati; questo perché i geometri classici supplivano talvolta alla mancanza di tecniche adeguate con ragionamenti geometrici intuitivi non sufficientemente rigorosi. Ci sono voluti decenni (e in certi casi fino a un secolo) per sostituire le loro argomentazioni con delle dimostrazioni o per trovare dei controesempi alle loro affermazioni; in molti casi la dimostrazione (o il controesempio) non è stata ancora trovata.

Questo è anche uno dei motivi per cui sono così frequenti, nelle ricerche degli ultimi anni, il riferimento agli autori classici, la loro rilettura critica e gli sforzi di retti a chiarire i punti oscuri del loro lavoro.

In questo lavoro descriverò alcuni di quei ragionamenti geometrici che non sono vere dimostrazioni ma che danno spesso un'idea convincente del perché un certo fatto sia ve ro.

Purtroppo sono stato costretto a dare poco spazio a questioni che certamente ne meritavano di più, e a non parlare affatto di molte altre, anche importanti (quali il problema di Schottky, i problemi numerativi, i fibrati vettoriali sulle curve, le curve algebriche reali, le questioni di mo nodromia, le intersezioni complete insiemistiche, e altre). Ho cercato di dare risalto ai problemi che via via sono sta ti affrontati perché sono la chiave per capire lo sviluppo dei metodi e delle idee.

2. Per schematizzare il discorso sceglierò come punto di partenza il 1851, anno in cui apparve la dissertazione dottorale di Riemann [53], seguita nel 1859 da un'altra sua fondamentale memoria [54].

Riemann riprese le ricerche ed i risultati degli analisti, da Cauchy a Puiseux, sulle funzioni algebriche di una variabile complessa, cioè le funzioni $y(x)$ che sono definite implicitamente da un'equazione

$$f(x,y)=0$$

dove $f \in \mathbb{C}[x,y]$. Adottando un punto di vista geometrico Riemann introdusse le superfici che poi presero il suo nome (costituite da tante copie di $\mathbb{C}$ quant'è il grado di f rispetto ad una delle variabili, e innestate fra loro in modo opportuno in certi punti detti "punti di diramazione") riuscendo ad interpretare geometricamente quei complicati teoremi di analisi. Ad ogni superficie Riemann associò un carattere topologico, il genere, che dimostrò essere uguale al numero di integrali abeliani di prima specie linearmente indipendenti associati ad f, in questo modo ricollegandosi alle ricerche di Legendre, Abel e Jacobi sulle funzioni ellittiche.

Nelle sue ricerche troviamo la sintesi di diversi indirizzi della matematica del tempo, ma anche un modo nuovo di intendere la geometria, come lo studio delle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali. Riemann infatti fu il primo ad adottare questo punto di vista, dimostrando che il genere è un invariante birazionale.

Bisogna tenere presente però che Riemann operava in un ambito analitico; nelle sue ricerche utilizzava la teoria del potenziale e si lasciava guidare da considerazioni che appartenevano alla dinamica dei fluidi.

Le idee di Riemann vennero riprese da Clebsch il quale si propose di ritrovarne i risultati e di svilupparli con metodi puramente algebrici. Egli scoprì tra l'altro che il genere g di una curva piana irriducibile di ordine n dotata di δ nodi eguaglia il numero che manca per averne il massimo, cioè $g=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\delta$.

Questo programma, interrotto dalla morte prematura di Clebsch, venne proseguito in Germania dal suo allievo M. Noether e da Brill.

All'inizio degli anni ottanta la teoria delle curve algebriche piane e sghembe era già sviluppata con metodi puramente algebrici.

3. Per quanto riguarda le curve piane il punto culminante di quel periodo è la memoria di Brill e Noether del 1873 [5], nella quale sono sintetizzate tutte le conoscenze fino ad allora ottenute e che fu il punto di partenza delle ricerche di un'intera generazione di geometri.

In essa veniva introdotto il concetto fondamentale di <u>serie lineare</u>.

Una serie lineare di dimensione r e grado n (una g^r_n) sulla curva irriducibile C è essenzialmente un insieme di ∞^r gruppi di n punti della curva ottenuti intersecandola con una curva variabile in un sistema lineare di dimensione r.

Più precisamente, si chiama <u>divisore</u> sulla curva piana irriducibile C una combinazione lineare formale finita $D= \sum_p n_p\, p$ di punti di C a coefficienti interi, dove si deve avere l'accortezza di considerare ogni punto singolare (che per semplicità suporremo ordinario, cioè a tangenti distinte) come se si trattasse di più punti distinti, uno per ognuna delle direzioni tangenti. Il <u>grado</u> di D è deg(D) = $= \sum n_p$. D si dice <u>effettivo</u>, denotato $D \geqslant 0$, se $n_p \geqslant 0$ per ogni p.

I divisori si sommano e si sottraggono formalmente e cosituiscono un gruppo abeliano Div(C), in cui lo zero è il divisore nullo.

Se $D_1, D_2 \in$ Div(C) si pone $D_1 \geqslant D_2$ se $D_1 - D_2 \geqslant 0$.

Per ogni curva piana di cui C non è componente si può definire in un modo naturale il divisore da essa segato su C, che è effettivo e di grado uguale al prodotto dei gradi delle due curve.

In questo modo si può associare ad un sistema lineare di curve piane un insieme di divisori effettivi che si chiama appunto la serie lineare segata dal sistema. Se tutti i divisori della g^r_n così ottenuta sono $\geqslant$ di uno stesso divisore effettivo E, questo si dice un divisore fisso della serie e sottraendo E da ogni divisore della g^r_n si ottiene una g^r_{n-v} dove v=deg(E).

Ad esempio se C ha un grado n, le rette di un fascio di centro un punto $p \in \mathbb{P}^2$ segano una g^1_n ; se $p \in$ C allora E=p è un divisore fisso (in questo caso p si dice un punto fisso) della serie e, sottraendo p si ottiene una g^1_{n-1} . Se $p \in$ C è s-uplo per C allora si può sottrarre $E=p_1 + \dots + p_s$ (le s direzioni tangenti in p) e si ottiene una g^1_{n-s} .

Due divisori effettivi si dicono linearmente equivalenti se esiste una serie lineare che li contiene entrambi (in particolare hanno lo stesso grado). Più in generale due divisori qualunque D_1 e D_2 si dicono linearmente equivalenti, notazione $D_1 \sim D_2$, se $D_1 - D_2 = D_1' - D_2'$, dove D_1' e D_2' sono effettivi e linearmente equivalenti.

L'insieme di tutti i divisori effettivi linearmente equivalenti ad un dato D costituiscono una serie lineare $|D|$ che ha la proprietà di non essere contenuta in una serie più grande, cioè di essere una serie lineare completa.

Se $D \sim 0$ $|D|$ è una g^0_0 . Ogni serie lineare è contenuta in un'unica serie lineare completa.

Ad esempio la g^2_3 segata dalle rette su una cubica con un nodo è incompleta, perché è contenuta nella g^3_3 segata su C dalle coniche per il nodo e per un altro punto qualsiasi; questa g^3_3 è completa perché non può esistere un g^r_n con $r > n$ (ci sono ∞^n n-uple di punti su una curva e non di più).

L'operazione di somma tra divisori è compatibile con la equivalenza lineare, quindi le serie lineari si sommano e si sottraggono.

Brill e Nöther studiavano le serie lineari usando due strumenti fondamentali.

Il primo, di carattere geometrico, è il teorema che afferma che ogni curva piana irriducibile può essere trasfor mata birazionalmente in una dotata di soli punti multipli ordinari applicando ad essa un numero finito di trasformazioni quadratiche del piano (cioè trasformazioni che a meno di un cambiamento di coordinate omogenee sono del tipo $x_0 = y_1 y_2$, $x_1 = y_0 y_2$, $x_2 = y_0 y_1$) ; questo teorema è dovuto a Noether [47] ed indipendentemente da Kronecker (non pubblicato). La sua utilità deriva dal fatto che in una trasformazione birazionale serie lineari vanno in serie lineari, e quindi permette di ridursi nel loro studio da una curva irriducibile con singolarità comunque complicate ad una con singolarità molto più semplici.

L'altro strumento, di carattere algebrico, è il teorema di Noether che oggi chiamiamo dell' $AF+B\Phi$, e che lui chiamava Fundamentalsatz, dimostrato per la prima volta in [46] e sul quale Noether ritornò più volte per successivi ritocchi e miglioramenti. Questo teorema afferma la possibilità di esprimere l'equazione di una curva f=0, passante in modo opportuno per l'intersezione di due curve F=0 e $\Phi=0$, nella forma $f=AF+B\Phi$.

Con Brill e Nöther gli integrali abeliani e le considerazioni topologiche di Riemann furono sostituiti dallo studio delle serie lineari e delle loro proprietà. Il genere g veniva caratterizzato dalla dimensione della cosiddetta <u>serie canonica</u>, che è la g^{g-1}_{2g-2} completa segata su C fuori dai punti singolari dal sistema lineare delle curve piane di ordine n-3 passanti con molteplicità $\geq s-1$ per ogni punto s-uplo di C, dette <u>curve aggiunte a</u> C. Se g=0 la serie canonica è vuota, cioè non ci sono curve aggiunte di ordine n-3. Per ogni $g \geq 1$ si dimostra che la serie canonica è l'unica g^{g-1}_{2g-2} su C.

Se $|D|$ è una g^r_n completa e se K è un divisore canonico (cioè tale che $|K|$ sia la serie canonica), la serie $|K-D|$ si chiama la <u>residua</u> di D; è una g^{i-1}_{2g-2-n} , dove $i \geq 0$ si chiama l'<u>indice di specialità di D</u>, e D si dice <u>speciale</u> se $i > 0$. Poiché $\dim(|K-D|) \leq \dim(|K|)$ si ha $i \leq g$ e vale l'uguaglianza se e solo se $D \sim 0$.

Nel linguaggio di Brill e Noether il <u>teorema di Riemann-Roch</u>, che permette di calcolare la dimensione di spazi di funzioni meromorfe con singolarità assegnate su una data superficie di Riemann, divenne il legame

$$r-i = n-g$$

tra il genere g ed i caratteri di una g^r_n completa.

Per poter usare il linguaggio moderno dei fasci conviene considerare accanto alla curva piana $\overline{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ il suo modello nonsingolare C e l'applicazione naturale $\nu : C \longrightarrow \overline{C}$, che è la normalizzazione di $\overline{C}$; le considerazioni geometriche fatte su $\overline{C}$ si interpretano su C.

Il gruppo Div($\overline{C}$) si identifica a Div(C); ogni $D \in$ Div(C) definisce un fascio invertibile $\underline{o}(D)$ su C e, se D è effettivo, a meno di un fattore costante non nullo una sezione $s \in \Gamma(C,\underline{o}(D))$ di cui D è il divisore degli zeri. In questo modo una serie lineare di dimensione r contenente D corrisponde ad un sottospazio vettoriale V di dimensione r+1 di $\Gamma(C,\underline{o}(D))$ contenente s. Se $V= \Gamma(C,\underline{o}(D))$ si ottiene una serie completa.

Divisori linearmente equivalenti definiscono fasci invertibili isomorfi. Quindi i fasci invertibili di dato grado modulo isomorfismo corrispondono alle classi di equivalenza lineare di divisori e quelli dotati di sezioni alle serie lineari complete di dato grado; l'operazione di somma tra divisori induce quella di prodotto tensoriale di fasci. La serie nulla e la canonica corrispondono rispettivamente al fascio strutturale $\underline{o}$ e al cosiddetto fascio canonico ω .

In questo linguaggio lo studio delle serie lineari viene trasformato in quello dei fasci invertibili e delle loro sezioni.

Ad esempio consideriamo il teorema di Riemann-Roch. Usando il linguaggio dei fasci la sua dimostrazione si può dividere in due parti. La prima è il

<u>Teorema di dualità di Serre.</u> Per ogni divisore D su C c'è una forma bilineare non degenere

$$H^1(D) \times H^0(K-D) \longrightarrow H^1(K) \cong \mathbb{C}$$

la quale induce quindi un isomorfismo $H^1(D)=H^0(K-D)^*$.
In particolare $g=h^0(K)=h^1(\underline{o})$ e i divisori speciali definiscono fasci invertibili L speciali, cioè con $h^1(L) > 0$ (dove abbiamo denotato con $h^j(-)$ la dimensione di $H^j(-)$).

La seconda parte della dimostrazione consiste nel considerare la successione esatta di fasci su C associata ad ogni divisore effettivo D di grado n:

$$0 \longrightarrow \underline{o} \longrightarrow \underline{o}(D) \longrightarrow \underline{o}_D(D) \longrightarrow 0$$

dalla quale si ottiene $h^0(D)-h^1(D) = 1-h^1(\underline{o})+n$, e, applicando la dualità di Serre,

$$h^0(D)-h^0(K-D) = n-g+1,$$

che è appunto il teorema di Riemann-Roch.

4. Il collegamento tra le serie lineari e la geometria di C è dato dalla loro relazione con le applicazioni di C in $\mathbb{P}^2$, in $\mathbb{P}^3$ o in un $\mathbb{P}^r$ qualsiasi.

Ad esempio la g^2_n segata su $\overline{C}$, e quindi su C, dalle rette di $\mathbb{P}^2$ permette di ricostruire l'applicazione $\nu : C \to \overline{C}$. Infatti supponiamo che la g^2_n corrisponda ad un sottospazio vettoriale $V \subseteq H^0(L)$ di dimensione tre per un certo fascio invertibile L; V si può identificare allo spazio vettoriale delle forme lineari su $\mathbb{P}^2$ e quindi $\mathbb{P}^2$ si identifica allo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V^*)$ dei sottospazi di dimensione 2 di V.

Si ha allora $\nu(p) = \{ s \in V \ / \ s(p)=0 \}$. Geometricamente $\nu(p)$ viene individuato come il centro di un fascio di rette di $\mathbb{P}^2$.

Quest'osservazione si generalizza in modo immediato e permette di interpretare una g^r_n qualunque*) come un'applicazione $C \to \mathbb{P}^r$, nella quale la g^r_n è indotta dall'intersezione dell'immagine con gli iperpiani. Analogamente le sezioni con quadriche, cubiche, ecc., definiscono altrettante serie lineari.

Una stessa curva può essere realizzata in diversi modi in uno spazio proiettivo a seconda delle serie lineari che possiede (tenendo però presente che una g^r_n non definisce necessariamente un'immersione di C in $\mathbb{P}^r$). Quindi studiare le serie lineari su una curva o studiare le curve in uno spazio proiettivo sono due facce dello stesso problema.

Questo punto di vista venne applicato da Noether e da Halphen allo studio delle curve sghembe, cioè contenute in $\mathbb{P}^3$, nelle loro importanti memorie [48] e [25], apparse contemporaneamente e vincitrici ex aequo del premio Steiner del 1882.

Halphen e Noether affrontarono il problema di classificare le curve sghembe secondo il grado ed il genere, ottenendo vari risultati importanti. In particolare Halphen cercò di caratterizzare l'insieme delle coppie (n,g) per le quali esistono curve nonsingolari ed irriducibili di

---

*) priva di punti base

grado n e genere g. Il risultato che lui enunciò, ma del quale diede una dimostrazione incompleta, è stato dimostrato solo recentemente da Gruson e Peskine [24].
Esso afferma che
1) una curva sghemba C, nonsingolare irriducibile e non piana, di grado n ha genere

$$g \leq \pi(3,n) = \begin{cases} \dfrac{(n-2)^2}{4} & \text{se n è pari} \\[2ex] \dfrac{(n-1)(n-3)}{4} & \text{se n è dispari} \end{cases}$$

2) Se

$$1+n(n-3)/6 < g \leq \pi(3,n)$$

allora C sta su una quadrica (e non tutti i valori di g che soddisfano queste disuguaglianze si possono ottenere, ma ci sono delle lacune).
3) Per ogni $0 \leq g \leq 1+n(n-3)/6$ esistono curve nonsingolari irriducibili e non piane di genere g e grado n.

La dimostrazione di Gruson e Peskine consiste nel costruire esplicitamente curve aventi dato grado e genere su una superficie cubica nonsingolare oppure su una superficie quartica con retta doppia.

Lo studio delle curve di $\mathbb{P}^3$ venne portato avanti in quello stesso periodo soprattutto in Italia. Qui si stava sviluppando una nuova scuola geometrica i cui iniziatori furono Cremona (prima a Bologna, poi a Milano e a Roma), Betti (a Pisa) che era stato il primo cultore e divulgatore in Italia delle opere di Riemann, Beltrami (a Bologna), Battaglini (a Napoli) ed altri.

Prima con Veronese e poi con C.Segre si era molto intensificato lo studio della geometria iperspaziale. In questa direzione si ebbero nuovi interessanti sviluppi per le curve algebriche. C.Segre, e poco dopo il suo allievo G.Castelnuovo, riformularono la teoria delle serie lineari sulle curve puramente in termini di geometria proiettiva.

Il tentativo di svincolare la teoria del Fundamentalsatz di Noether condusse Castelnuovo a dare una nuova dimostrazione del teorema di Riemann-Roch basandosi su una formula di geometria numerativa.

Egli trovò anche una formula per il massimo genere $\pi(r,n)$ che può avere una curva di grado n in $\mathbb{P}^r$ (generalizzando l'analoga formula data da Halphen nel caso r=3) e caratterizzò le curve di genere massimo, dette oggi curve di Castelnuovo. Di quel periodo sono importanti i lavori [59], [6], [7]; si veda anche l'interessante [14] di Fano (sua tesi di laurea a cui lavorò sotto la direzione di Castelnuovo) le cui ricerche meriterebbero di essere riprese.

La classificazione delle curve nonsingolari di $\mathbb{P}^r$, $r \geq 4$, rispetto al genere ed al grado, simile a quella di Halphen per $r=3$, non è mai stata fatta. Recentemente Gieseker [20] ed Eisenbud e Harris [27] hanno dato contributi a questo problema.

5. Il metodo di Segre e Castelnuovo consisteva nello studiare le serie lineari sulla curva canonica.

Si dimostra facilmente che se C ha genere $g \geq 3$ e non è iperellittica (cioè non possiede una g^1_2 *)), la serie canonica manda C isomorficamente su una curva di grado 2g-2 in $\mathbb{P}^{g-1}$, la <u>curva canonica</u> di C.

Nel caso iperellittico la serie canonica definisce una applicazione 2-1 di C su una curva razionale di grado g-1 di $\mathbb{P}^{g-1}$.

Lo studio delle serie lineari su una curva iperellittica non è difficile. Se invece C non è iperellittica, e la identifichiamo con la curva canonica, vediamo che un divisore effettivo è speciale se e solo se è contenuto in un iperpiano di $\mathbb{P}^{g-1}$. Più precisamente l'indice di specialità di D è il numero di iperpiani linearmente indipendenti che contengono D. Quindi se $|D|$ è una g^r_n con $n \leq 2g-2$, il sottospazio lineare $\langle D \rangle$ n-secante C che D genera in $\mathbb{P}^{g-1}$ ha dimensione che per il teorema di Riemann-Roch è uguale a

$$\dim(\langle D \rangle) = g-1-i = n-r-1 .$$

Questa interpretazione geometrica del teorema di Riemann-Roch fornisce una notevole proprietà della curva canonica : se C possiede un $\mathbb{P}^{n-r-1}$ n-secante, ne possiede ∞^r.

Ad esempio, se C possiede una retta trisecante allora ne

*) Ogni curva di genere 2 possiede una g^1_2, la serie canonica; se $g \geq 3$ non tutte le curve di genere g sono iperellittiche, ma esistono curve iperellittiche di genere g per ogni g.

possiede ∞^1 , che segano su C gli altrettanti divisori di una g^1_3 completa.

Più in generale ogni proprietà delle serie lineari speciali su C riflette una proprietà proiettiva della curva canonica e viceversa.

Di qui l'interesse di studiare la curva canonica. Noether ne aveva iniziato lo studio dimostrando che è proiettivamente normale.*)

Enriques dimostrò nel 1919, in una breve nota [12], che $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ è intersezione delle quadriche che la contengono , con l'eccezione di due casi : C possiede un g^1_3 (è "trigonale"), oppure C ha genere 6 ed è isomorfa ad una quintica piana nonsingolare. La dimostrazione di Enriques, molto elegante e concisa ma incompleta, fu ripresa e completata da Babbage nel 1939 [3].

Dello stesso argomento si occupò anche Petri in un suo lavoro del 1922 [50] rimasto praticamente sconosciuto fino ad una quindicina di anni fa. Petri dimostrò che le quadriche che contengono la curva canonica ne generano l'ideale tranne che nei casi d'eccezione descritti da Enriques, nei quali l'ideale è generato da quadriche e cubiche. Il metodo di Petri consiste nel descrivere esplicitamente, in un modo molto ingegnoso, una base dello spazio vettoriale delle quadriche contenenti la curva canonica C, e nell'esprimere attraverso di loro ogni polinomio dell'ideale. La sua dimostrazione è stata riscritta e chiarita in linguaggio moderno da Saint Donat [55].

6. In un successivo lavoro [51] Petri si occupò di estendere il risultato precedente a curve proiettive più generali delle curve canoniche. Il problema generale da lui affrontato è quello di trovare un procedimento per descrivere esplicitamente le equazioni che definiscono una curva di $\mathbb{P}^r$ (cioè il suo ideale), o almeno dare informazioni sulle equazioni a partire da informazioni sulla curva, quali il genere, il grado e varie proprietà della serie iperpiana e dei suoi multipli.

Un esempio del genere è il teorema (dovuto a G.Gherar-

---

*) Una curva $C \subset \mathbb{P}^r$ si dice proiettivamente normale se è nonsingolare e se per ogni $d \geqslant 0$ le ipersuperfici di grado d segano su C una serie lineare completa.

delli [18]) che afferma che una curva nonsingolare di $\mathbb{P}^3$ è un'intersezione completa se e solo se è proiettivamente normale e la serie canonica coincide con la serie $|dD|$ per qualche $d \geqslant 0$, dove D è il divisore di una sezione piana (quest'ultima proprietà si esprime dicendo che C è "sottocanonica").

Una classe di curve più ampia delle intersezioni complete e che si descrivono facilmente sono le proiettivamente normali in $\mathbb{P}^3$, studiate da Apery, Gaeta e Dubreil, e successivamente da Peskine e Szpiro [49]. Queste curve sono caratterizzate dal fatto che il loro ideale è generato dai minori di ordine massimo di una opportuna matrice M di dimensione m x (m+1) a elementi polinomi omogenei; ciò è equivalente alla loro proprietà geometrica di essere "di residuale finito" ($C \subset \mathbb{P}^3$ è di residuale finito significa che esiste una successione $C=C_1, \dots, C_k$ di curve tali che $C_i \cup C_{i-1}$ sia un'intersezione completa per $i=2,\dots,k$ e C_k sia un'intersezione completa). Una proprietà importante di queste curve è che si descrivono tutte al variare genericamente della matrice M corrispondente (cioè senza imporre alcuna condizione chiusa ai coefficienti dei polinomi di cui è formata). Purtroppo questa facilità di rappresentarne le equazioni è compensata dal fatto che le curve proiettivamente normali in $\mathbb{P}^3$ sono quasi tutte molto particolari tra quelle del loro genere.

Descrivere esplicitamente curve sufficientemente generali tra quelle di dato genere, in un senso opportuno che chiariremo più avanti, diventa sempre più difficile al crescere di g. Petri dette solo dei risultati parziali in questa direzione, ma alcune sue idee sono state riprese ed estese successivamente dando origine ad un filone di ricerca molto interessante.

Nel 1960 Mumford dimostrò un analogo del teorema di Enriques-Babbage-Petri, il quale afferma che se D è un divisore di grado n sufficientemente alto su una curva nonsingolare C di genere g, la g_n^{n-g} completa $|D|$ immerge C in $\mathbb{P}^{n-g}$ e l'immagine è proiettivamente normale ed il suo ideale è generato da quadriche [41]. La stima di Mumford è $n \geqslant 2g+1$ per la normalità proiettiva ed $n \geqslant 3g+1$ per la generazione quadratica dell'ideale. Quest'ultima è stata poi migliorata ad $n \geqslant 2g+2$ da Saint Donat [56].

Quando n è basso rispetto al genere è molto più difficile dare informazioni anche solo qualitative sull'ideale di una curva proiettiva di grado n. Diverse generalizzazioni parziali dei risultati descritti sopra sono state trovate, ma ancora molto c'è da scoprire in questa direzione.

Recentemente è stato congetturato da M.Green [21] che i vari caratteri numerici di una risoluzione libera minimale dell'ideale di una curva canonica $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ riflettono fedelmente proprietà geometriche di C; ciò generalizzerebbe il fatto che i gradi dei generatori dell'ideale di C dipendono da proprietà geometriche di C. Su questo problema si hanno solo alcuni risultati parziali.

7. Fissiamo una curva irriducibile e nonsingolare C. Denotiamo con Pic(C) il <u>gruppo di Picard</u> di C, cioè il gruppo delle classi di isomorfismo di fasci invertibili su C. Si ha

$$\mathrm{Pic}(C) = \bigoplus_n \mathrm{Pic}^n(C)$$

dove $\mathrm{Pic}^n(C)$ è il sottoinsieme dei fasci invertibili di grado n. $\mathrm{Pic}^\circ(C)$ è un sottogruppo di Pic(C); fissato $M \in \mathrm{Pic}^n(C)$ l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}^\circ(C) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^n(C) \\ L & \longmapsto & L\otimes M \end{array}$$

è una biezione.

Il primo fatto geometricamente importante è che $\mathrm{Pic}^\circ(C)$, e quindi ogni $\mathrm{Pic}^n(C)$, ha una struttura naturale di varietà proiettiva irriducibile e nonsingolare di dimensione g uguale al genere di C; è una varietà abeliana, cioè la struttura di gruppo commutativo è compatibile con la struttura di varietà. Si chiama <u>varietà jacobiana</u> di C, denotata anche J(C).

Nel caso g=0 J(C) si riduce ad un punto e $\mathrm{Pic}(C) \cong \mathbb{Z}$; ciò significa che tutti i fasci invertibili di dato grado n sono isoformi e quindi tutti i divisori di grado n sono linearmente equivalenti tra loro. E' una situazione molto semplice che dipende dal fatto che ogni curva di genere zero è razionale e dal fatto evidente che su $\mathbb{P}^1$ due punti qualsiasi sono linearmente equivalenti.

Se g=1 J(C) è una curva. Fissato un punto $p_0 \in C$ possiamo definire un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^\circ(C) \\ p & \longmapsto & \underline{o}(p-p_0). \end{array}$$

Quest'applicazione (che è un morfismo) non è costante perché altrimenti C sarebbe razionale, perché possiederebbe una g^1_1 ; quindi è suriettiva. E' anche iniettiva per lo stesso motivo, quindi C è isomorfa alla sua jacobiana.

Consideriamo più in generale una curva di genere g qualunque. Per ogni n $\geqslant 1$ l'insieme dei divisori effettivi di grado n su C ha una struttura naturale di varietà algebrica proiettiva e nonsingolare di dimensione n: è ottenuta dal prodotto cartesiano

$$\underbrace{C \times C \ldots \times C}_{n \text{ volte}}$$

facendone il quoziente rispetto all'azione naturale del gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_n$, che permuta i fattori; si denota $C^{(n)}$ e si chiama il prodotto simmetrico n-esimo di C. Per ogni n abbiamo un'applicazione naturale

$$\begin{aligned} \psi_n : C^{(n)} &\longrightarrow \mathrm{Pic}^n(C) \\ D &\longmapsto \underline{o}(D) \end{aligned}$$

che ha per fibre i sistemi lineari di grado n. Dal teorema di Riemann-Roch segue subito che ψ_n è suriettiva se $n \geqslant g$. Fissato $p_0 \in C$, si ottiene

$$\begin{aligned} C^{(n)} &\longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C) \\ D &\longmapsto \underline{o}(D-np_0) \end{aligned}$$

che è la composizione di ψ_n con l'isomorfismo di varietà

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic}^{(n)}(C) &\longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C) \\ L &\longmapsto L(-np_0). \end{aligned}$$

Si osservi che $C^{(1)} = C$ e che per ogni n le fibre di ψ_n sono connesse perché sono spazi proiettivi. In particolare vediamo che ψ_g è un isomorfismo birazionale, cioè la jacobiana di C è birazionalmente isomorfa a $C^{(g)}$, da cui è ottenuta contraendo ad un punto ogni sistema lineare speciale, come segue dal teorema di Riemann-Roch.

Ad esempio se g=2 l'applicazione

$$C^{(2)} \longrightarrow \mathrm{Pic}^2(C)$$

è biiettiva con l'eccezione della fibra di ω la cui fibra è un $\mathbb{P}^1$, la g^1_2 canonica. Quindi J(C) è ottenuta da $C^{(2)}$ contraendo una sua curva (che è eccezionale di 1ª specie).

Supponiamo g=3 e C non iperellittica; la curva canonica di C è una quartica piana nonsingolare. Consideriamo l'applicazione

$$\psi_3 : C^{(3)} \quad \mathrm{Pic}^{(3)}(C)$$

I divisori $D \in C^{(3)}$ speciali sono le ∞^2 terne di punti di $C \subset \mathbb{P}^2$ che sono allineate. L'insieme dei corrispondenti $\underline{o}(D)$ in $\mathrm{Pic}^{(3)}(C)$ si può identificare all'insieme dei "quarti punti" di intersezione di C con le corrispondenti rette. Quindi il luogo in $\mathrm{Pic}^{(3)}(C)$ al di sopra del quale ψ_3 non è un isomorfismo è una curva isomorfa a C e la sua immagine inversa è una superficie di $C^{(3)}$, birazionalmente isomorfa a $C \times \mathbb{P}^1$.

In generale è facile dimostrare che l'immagine $\psi_{g-1}(C^{(g-1)})$ è un divisore di $\mathrm{Pic}^{g-1}(C)$ *), che si chiama il <u>divisore theta</u>, denotato Θ, e consiste di tutti i fasci invertibili speciali di grado g-1. E' un divisore ampio su $\mathrm{Pic}^{g-1}(C)$ e definisce quella che si chiama una polarizzazione principale. Un famoso teorema di Torelli [64] afferma che la coppia $(\mathrm{Pic}^{g-1}(C), \Theta)$ individua C, cioè che se C' è una curva tale che esista un isomorfismo tra $\mathrm{Pic}^{g-1}(C)$ e $\mathrm{Pic}^{g-1}(C')$ che porta i divisori theta uno nell'altro, allora C' è birazionalmente isomorfa a C.

Ad esempio nel caso g=2 il divisore theta è isomorfo a C (in generale $\psi_1(C)=C$ per ogni g).

Se g=3 il divisore theta è isomorfo a $C^{(2)}$ a meno che C non sia iperellittica, nel qual caso la g^1_2 viene contratta ad un punto in $\mathrm{Pic}^{(2)}(C)$, singolare per il divisore theta.

Torniamo al caso generale. Sia

$$W^r_n = \{L \in \mathrm{Pic}^n(C) \;/\; h^0(L) \geq r+1\},$$

cioè l'insieme di tutte le g^s_n complete, con $s \geq r$. Fissiamo un punto $p_0 \in C$ e mediante moltiplicazione per $\underline{o}(-np_0)$ realizziamo ogni W^r_n come sottoinsieme di $\mathrm{Pic}^0(C)=J(C)$. E' possibile dimostrare che W^r_n ha una struttura naturale di sottoschema chiuso J(C).

---

*) Nel caso non iperellittico si può usare la versione geometrica del teorema di Riemann-Roch per dimostrarlo.

Ad esempio $W_n^0 = \psi_n(C^{(n)})$; se $n \leq g$, $\dim(W_n^0)=n$, mentre se $n \geq g$ $W_n^0 = W_n^1 = \ldots = W_n^{n-g}$. Con queste notazioni il divisore theta è W_{g-1}^0. Si ha anche ovviamente $W_n^{r+1} \subseteq W_n^r$.

E' un problema fondamentale studiare la struttura dei vari W_n^r. Innanzitutto: quand'è che $W_n^r \neq \emptyset$?

La risposta dipende da g,r,n ma anche da C. Ad esempio $W_2^1 \neq \emptyset$ se e solo se C è iperellittica.

Brill e Noether dettero un criterio su g,r,n affinché sia $W_n^r \neq \emptyset$ su ogni curva di genere g, basato sul seguente semplice ragionamento.

Supponiamo C non iperellittica (il caso iperellittico si può trattare a parte) canonicamente immersa in $\mathbb{P}^{g-1}$. Possiamo supporre che $g-n+r > 0$, cioè che W_n^r consista di fasci speciali, perché il caso non speciale è banale. E' facile vedere che se $W_n^r \neq \emptyset$ allora $W_n^{r+1} \subsetneq W_n^r$; quindi $W_n^r \neq \emptyset$ equivale all'esistenza di $L \in W_n^r \setminus W_n^{r+1}$. Ragionando sulla curva canonica, l'esistenza di un tale L equivale a quella di un $\mathbb{P}^{n-r-1}$ n-secante C.

I $\mathbb{P}^{n-r-1}$ che contengono almeno un punto di C costituiscono una sottovarietà irriducibile non vuota di codimensione $g-n+r-1$ della Grassmanniana $G(n-r-1,g-1)$. Quindi l'insieme S dei $\mathbb{P}^{n-r-1}$ n-secanti C ha codimensione in $G(n-r-1,g-1)$ non superiore a $n(g-n+r-1)$, <u>se non è vuoto</u>; in tal caso S ha dimensione almeno r, come segue dall'interpretazione geometrica del teorema di Riemann-Roch. Quindi si deve avere

$$r \leq \dim(G(n-r-1,g-1)) - n(g-n+r-1),$$

cioè

$$g-(r+1)(g-n+r) \geq 0.$$

$\rho(g,r,n):=g-(r+1)(g-n+r)$ si chiama <u>numero di Brill-Nöther</u>.

Per loro era implicitamente evidente che $S\neq\emptyset$; ma l'argomento precedente non dimostra affatto che $W_n^r \neq \emptyset$ se $\rho(g,r,n) \geq 0$. Ciò che esso prova è che se la disuguaglianza è soddisfatta e se $W_n^r \neq \emptyset$ allora ogni componente irriducibile di W_n^r ha dimensione $\geq \rho(g,r,n)$.

Una dimostrazione completa del criterio di Brill e Noether, cioè del fatto che su ogni curva di genere g si ha $W_n^r \neq \emptyset$ e $\dim(W_n^r) \geq \rho(g,r,n)$ se $\rho(g,r,n) \geq 0$ è stata data da Kleiman e Laksov [37] e, indipendentemente, da Kempf [35] .

C'è da chiedersi se e quando la stima precedente sia precisa, cioè si abbia proprio $\dim(W_n^r)=\rho(g,r,n)$.

La risposta fu data ancora da Brill e Noether, i quali affermarono (ma senza dare una dimostrazione) che si ha

$$W_n^r = \emptyset \quad \text{se} \quad \rho(g,r,n) < 0,$$

e $$\dim(W_n^r) = \rho(g,r,n) \quad \text{se} \quad \rho(g,r,n) \geq 0$$

su ogni curva "sufficientemente generale".

Il senso preciso della condizione "C è sufficientemente generale" proviene dalla considerazione della varietà dei moduli, della quale parleremo tra poco; per ora accontentiamoci del suo significato intuitivo.

Giustificare l'affermazione, o meglio la congettura, di Brill e Noether è stato a lungo un problema aperto. Di essa Severi ha tentato di dare una dimostrazione [62]. In [36] Kleiman ha fatto vedere che il ragionamento di Severi poteva essere ridotto ad un problema di geometria numerativa. Tale problema è stato poi risolto, e con esso la congettura dimostrata completamente, da Griffiths e Harris in [22]. *) Da questo risultato segue che su una curva sufficientemente generale tutti gli schemi W_n^r sono ridotti.

Un altro problema interessante viene dal fatto, facile a dimostrarsi, che W_n^{r+1} è sempre contenuto nel luogo singolare di W_n^r , per ogni curva C. Anzi, nel caso $r=0$, $n \leq g-1$, W_n^1 è proprio uguale al luogo singolare di W_n^0 ; più precisamente i punti s-upli di W_n^0 , $s \geq 2$, sono gli $L \in W_n^{s-1} \setminus W_n^s$, cioè tali che $h^0(L)=s$. Questo è quanto afferma il cosiddetto teorema di singolarità di Riemann nel caso $n=g-1$, generalizzato da Kempf in [34] agli altri valori $n \leq g-1$.

E' facile dare esempi in cui W_n^{r+1} è diverso da $\mathrm{Sing}(W_n^r)$, ma in tutti questi esempi la curva ha proprietà molto particolari che una curva più generale del suo stesso genere non ha. E' naturale quindi congetturare che se C è sufficientemente generale e $\rho(g,r,n) \geq 0$ allora $W_n^{r+1} = \mathrm{Sing}(W_n^r)$. Questa congettura, formulata da Mayer, è equivalente ad una asserzione di natura coomologica che Petri fece in [51]. Per una discussione di questa equivalenza rimandiamo il let

---

*) Nel caso $r=1$ la dimostrazione era già stata data da Laskov in un'appendice di [36].

tore a [1] , dove la congettura è stata dimostrata nel caso r=2 (per r=1 essa era già nota); nel caso generale è stata dimostrata da Gieseker [19].

Per dimostrare sia la congettura di Brill-Noether che quella di Petri è sufficiente far vedere che sono vere per una sola curva C di dato genere (questo segue da fatti generali piuttosto elementari). Questo però non semplifica affatto il problema: sembra infatti molto difficile trovare una tale curva nonsingolare di dato genere. Paradossalmente avviene che, anche se su quasi tutte le curve sono vere le asserzioni di Brill-Noether e di Petri, praticamente su ogni curva singolare che si riesce a trovare esse sono false. Il metodo usato da Griffiths-Harris e da Gieseker per aggirare questo ostacolo è di cercare particolari curve singolari sulle quali sia possibile verificare il teorema (in un senso generalizzato opportunamente), per poi estenderlo a curve non singolari "deformando" la curva.

Il metodo di ridurre problemi riguardanti le serie lineari su curve nonsingolari a problemi su curve singolari si è andato sempre più estendendo negli ultimi anni. Ma dal punto di vista delle serie lineari le curve singolari non sono ancora ben comprese; sviluppi in questa direzione avranno una grande importanza.

A completare il quadro delle proprietà geometriche dei W_n^r c'è un recente teorema di Fulton e Lazarsfeld [17] il quale afferma che se C è una qualunque curva di genere g e $\rho(g,r,n) > 0$, allora W_n^r è connesso; se inoltre C è sufficientemente generale allora W_n^r è irriducibile.

Per terminare questa breve panoramica sui W_n^r vediamo cosa accade quando la curva C è molto particolare.

Supponiamo $n \leqslant g-1$. Per un motivo piuttosto elementare (il teorema di Clifford) $W_n^r \neq 0$ implica $n \geqslant 2r$, e se vale l'uguaglianza allora C è iperellittica. E' stato dimostrato da H.H.Martens [39] che W_n^r ha dimensione n-2r e che se l'uguaglianza vale per almeno una componente irriducibile allora C è iperellittica.

Il teorema di Martens è stato raffinato da Mumford [43] il quale ha dimostrato che se C non è iperellittica allora $\dim(W_n^r) \leqslant n-2r-1$, e se vale l'uguaglianza allora C soddisfa una delle seguenti condizioni:
a) è trigonale, b) è una quintica piana nonsingolare, c) è un rivestimento doppio di una curva di genere uno.

Esistono ulteriori raffinamenti del teorema di Martens e vari risultati di questo tipo, i quali tutti vanno nella direzione di cercare di caratterizzare esplicitamente quelle curve di dato genere g per le quali qualche W_n^r non ha la dimensione $\rho(g,r,n)$ postulata da Brill e Noether.

8. Un problema fondamentale è quello della classificazione.
Sia $\mathcal{M}_g$ l'insieme delle classi di isomorfismo birazionale di curve di genere g. Il problema è: descrivere $\mathcal{M}_g$.
La soluzione è facile per i primi valori di g.
$\mathcal{M}_0$ possiede un solo elemento.
Ogni curva C di genere uno è isomorfa ad una cubica piana nonsingolare (infatti ogni $D \in C^{(3)}$ definisce una g_3^2 senza punti base che immerge C in $\mathbb{P}^2$) e la cubica può ridursi ad avere equazione affine $y^2=x(x-1)(x-\lambda)$ per qualche $\lambda \neq 0,1$.
E' un teorema classico (dovuto a G.Salmon) che due cubiche siffatte $C(\lambda)$ e $C(\mu)$ sono isomorfe se e solo se esiste una proiettività di $\mathbb{P}^1$ che manda la quaterna non ordinata $\{0,1,\infty,\lambda\}$ nella quaterna non ordinata $\{0,1,\infty,\mu\}$. Per un dato λ esistono sei valori di μ con questa proprietà (in corrispondenza alle sei proiettività che permutano $0,1,\infty$) e sono

$$\mu_1=\lambda \;,\quad \mu_2=1-\lambda \;,\quad \mu_3=\frac{1}{\lambda} \;,\quad \mu_4=\frac{\lambda-1}{\lambda} \;,\quad \mu_5=\frac{\lambda}{\lambda-1} \;,\quad \mu_6=\frac{1}{1-\lambda}$$

L'espressione

$$j(\lambda)=256\,\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}$$

assume lo stesso valore di $j(\mu)$ precisamente se μ è uno dei $\mu_1,\dots,\mu_6$, e quindi $j(\lambda)$ dipende solo da $C(\lambda) \in \mathcal{M}_1$; si chiama <u>l'invariante j</u> della curva $C(\lambda)$ e assume tutti i valori in $\mathbb{C}$. Quindi $\mathcal{M}_1$ si può identificare a $\mathbb{C}$ tramite j.
Descrivere $\mathcal{M}_2$ è già alquanto più complicato, ed è stato fatto da Igusa [33]. Si procede in modo analogo al precedente. Ogni $C \in \mathcal{M}_2$ può essere realizzata come una curva piana di equazione $y^2=g(x)$, dove g(x) è un polinomio di grado sei a radici distinte; due curve piane siffatte, $y^2=g_1(x)$ e $y^2=g_2(x)$, sono birazionalmente equivalenti se e solo se esiste una proiettività di $\mathbb{P}^1$ che porta le sei radici di $g_1(x)$ nelle sei radici di $g_2(x)$. Questo

conduce a descrivere $\mathcal{M}_2$ con i punti di una varietà affine irriducibile di dimensione tre immersa in $\mathbb{C}^8$.

Una descrizione esplicita di $\mathcal{M}_g$ per $g \geqslant 3$ non è nota. Cionondimeno $\mathcal{M}_g$ è stato molto studiato e molte sue proprietà sono conosciute. La più importante è certamente quella di avere una struttura naturale di varietà algebrica quasiproiettiva, come accade nei casi g=0,1,2. Questa struttura esiste per il fatto che esistono famiglie di curve.

Una <u>famiglia di curve</u> si definisce come un morfismo piatto di varietà algebriche $f\colon \mathcal{C} \longrightarrow S$ tale che per ogni $s \in S$ la fibra $f^{-1}(s)$ sia una curva. S si dice la varietà che parametrizza la famiglia f. La piattezza è una proprietà tecnica molto debole ma sufficiente a garantire che il genere aritmetico*) e altri caratteri delle fibre rimangano localmente costanti al variare di $s \in S$. Quindi se le fibre di f sono nonsingolari ed S è connessa, tutte le curve della famiglia hanno lo stesso genere. In modo simile si possono definire famiglie di varietà proiettive.

Ad esempio le curve piane di dato grado n costituiscono una famiglia perché sono parametrizzate dai punti di una varietà algebrica, e precisamente lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^N$, $N=\binom{n+2}{2}-1$, con coordinate omogenee i coefficienti di un polinomio omogeneo di grado n. In questo caso $\mathcal{C}$ è la sottovarietà di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^N$ definita dall'equazione $P(x_0, x_1, x_2)=0$ dove P è il polinomio omogeneo di grado n in x_0, x_1, x_2 a coefficienti indeterminate, $S=\mathbb{P}^N$ ed $f\colon \mathcal{C} \longrightarrow S$ il morfismo definito dalla proiezione di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^N$ sul secondo fattore.

In generale una famiglia $f\colon \mathcal{C} \longrightarrow S$ si dice una famiglia di curve di $\mathbb{P}^2$ se $\mathcal{C}$ è un chiuso di $\mathbb{P}^2 \times S$ ed f è il morfismo indotto dalla proiezione $\mathbb{P}^2 \times S \longrightarrow S$. La piattezza in questo caso equivale a che tutte le fibre abbiano lo stesso polinomio di Hilbert.

Se $f\colon \mathcal{C} \longrightarrow S$ è una famiglia di curve nonsingolari di genere g, è definita un'applicazione

$$S \longrightarrow \mathcal{M}_g$$

mandando $s \longmapsto f^{-1}(s)$.

---

*) Il genere aritmetico di una curva C (singolare o no) è $p\ (C)=1-h^0(\underline{o})+h^1(\underline{o})$.

La struttura di varietà algebrica su $\mathfrak{M}_g$ è definita richiedendo che tutte le applicazioni ottenute in questo modo da famiglie di curve siano dei morfismi di varietà algebriche. Con questa struttura $\mathfrak{M}_g$ si chiama la <u>varietà dei moduli delle curve di genere g</u>.

Dimostrarne l'esistenza è alquanto difficile; per farlo sono necessari gli strumenti più sofisticati della geometria algebrica (si veda la dimostrazione di Mumford in [42] e [44]). Sarebbe interessante vedere quanta parte ha avuto il problema della costruzione della varietà dei moduli delle curve e di altre classi di varietà algebriche nel condizionare l'evoluzione della geometria algebrica negli ultimi 40 anni. Purtroppo sono costretto a sorvolare su questo punto che mi porterebbe troppo lontano dal nostro tema.

Una volta accertato che $\mathfrak{M}_g$ è una varietà, la condizione "C è sufficientemente generale tra le curve di genere g" (o, come si dice, "C è a moduli generali") significa che C può essere scelta in un aperto di Zariski di $\mathfrak{M}_g$, cioè che a C non si è imposta alcuna condizione chiusa. In caso contrario si dice che C è "a moduli particolari".

Il fatto che le curve, e più in generale le varietà algebriche, si presentano in natura distribuite in famiglie è un fenomeno molto importante ed è essenzialmente il motivo per cui esiste $\mathfrak{M}_g$ (come varietà algebrica). E' per questo che l'esistenza di $\mathfrak{M}_g$ è sempre stata data per scontata dai geometri, anche quando dimostrarla era fuori della portata delle tecniche a loro disposizione. La parola "moduli" risale a Riemann, il quale indicava con questo termine i parametri continui dai quali dipende localmente in $\mathfrak{M}_g$ una curva di genere g. Egli trovò che il loro numero (cioè la dimensione di $\mathfrak{M}_g$) è uguale a 3g-3 se $g \geqslant 2$, e 0, risp. 1, se g=0, risp. 1.

Un calcolo euristico può farsi facilmente nel modo seguente.

Supponiamo $g \geqslant 2$ e fissiamo $n \geqslant 2g+1$. Un teorema classico (il teorema di esistenza di Riemann) afferma che assegnati comunque $\delta = 2(g+n-1)$ punti distinti $p_1, \dots, p_\delta$ di $\mathbb{P}^1$ è possibile costruire in un numero finito di modi una curva C di genere g ed una g^1_n priva di punti base su C che definisce un morfismo $q: C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ di grado n i cui punti di diramazione sono precisamente $p_1, \dots, p_\delta$.

Il numero di parametri da cui dipende questa costruzione è

$\delta-3=2g+2n-5$, perché ogni δ-upla viene trasformata dalle proiettività di $\mathbb{P}^1$ in ∞^3 altre che danno luogo alla stessa curva con la stessa g^1_n. Ogni curva di genere g si ottiene in questo modo; infatti essendo n sufficientemente grande, ogni $C \in \mathcal{M}_g$ possiede ∞^g g^{n-g}_n complete prive di punti base, ognuna delle quali contiene $\infty^{2(n-g-1)}$ g^1_n che definiscono un'applicazione di C in $\mathbb{P}^1$ di grado n con δ punti di diramazione distinti. Ne segue che le curve birazionalmente distinte ottenute con la costruzione di Riemann dipendono da

$$2n+2g-5-(g+2n-2g-2) = 3g-3$$

parametri.

Per mezzo di una semplice argomentazione topologica è possibile completare il ragionamento precedente e dimostrare che $\mathcal{M}_g$ è irriducibile. Ciò fu fatto da Klein in [38] utilizzando un modo canonico di rappresentare un rivestimento n-uplo di $\mathbb{P}^1$ dovuto a Lüroth e Clebsch. Per una descrizione molto leggibile di questo metodo si consulti [13].

Il metodo di Klein fu esteso da Hurwitz [32], che studiò le varietà dei moduli dei rivestimenti n-upli di genere g di $\mathbb{P}^1$, $H_{n,g}$ per ogni n e g (i cui elementi sono le coppie ($C \in \mathcal{M}_g$, g^1_n su C)), ne calcolò la dimensione e ne dimostrò l'irriducibilità. In particolare Hurwitz dimostrò che il luogo $\mathcal{M}^1_{g,n} \subseteq \mathcal{M}_g$ che consiste di tutte le curve di genere g che possiedono almeno una g^1_n (ed è l'immagine dell'applicazione naturale $H_{n,g} \longrightarrow \mathcal{M}_g$) è un chiuso irriducibile di dimensione uguale a

$$\min(3g-3, 3g-3+\rho(g,1,n)) = \min(3g-3, 2g+2n-5)^{*)}$$

Ad esempio il luogo $\mathcal{M}^1_{g,2}$ ha dimensione $2g-1 < 3g-3$ se $g \geqslant 3$ e quindi le curve iperellittiche di genere $g \geqslant 3$ sono a moduli particolari. Analogamente sono a moduli particolari le curve trigonali di genere $g \geqslant 5$, perché $\dim(\mathcal{M}^1_{g,3}) = 2g+1 < 3g-3$ se $g \geqslant 5$; ecc.

Rimaneva il problema di dare una dimostrazione puramente algebrico-geometrica (alla Clebsch-Noether) dell'irriducibilità di $\mathcal{M}_g$. Enriques nel 1912 si occupò marginal-

---

*) Una lacuna nella dimostrazione di Hurwitz venne segnalata da Severi e colmata da B.Segre in [58].

mente della questione, mentre Severi vi si dedicò in modo sistematico. Entrambi pensarono di poter ricondurre il problema a quello di dimostrare l'irriducibilità della famiglia delle curve piane di dato genere g e grado n dotate di soli nodi. Questa famiglia è parametrizzata da un sottoinsieme localmente chiuso $V_{n,g}$ di $\mathbb{P}^N$, $N=\binom{n+2}{2}-1$, lo spazio che parametrizza tutte le curve piane di grado n. Ogni componente irriducibile di $V_{n,g}$ ha dimensione $N-\delta = 3n+g-1$, dove $\delta=\binom{n-1}{2}-g$ è il numero di nodi posseduti da una qualunque curva della famiglia. Poiché se $n \gg 0$ ogni curva di genere g è birazionalmente isomorfa ad una curva piana irriducibile di grado n con δ nodi, dall'irriducibilità di $V_{n,g}$ seguirebbe quella di $\mathcal{M}_g$, perché per definizione di $\mathcal{M}_g$ si ha un morfismo suriettivo $V_{n,g} \longrightarrow \mathcal{M}_g$.

Sfortunatamente sia la dimostrazione di Enriques che quella di Severi ([62] , Anhang F) sono incomplete. Entrambe sono di natura induttiva e si basano sulla possibilità di fare degenerare una qualunque curva piana irriducibile con δ nodi in una con $\delta+1$ nodi; che ciò sia possibile non fu da loro dimostrato ed ancora non è noto.

Fino ad oggi il problema di decidere se $V_{n,g}$ sia irriducibile per ogni n,g oppure no, detto "problema di Severi", è rimasto senza una completa soluzione. Vari risultati parziali sono stati trovati, il più generale dei quali è dovuto ad Arbarello e Cornalba [2] ; esso afferma che $V_{n,g}$ è irriducibile per tutti gli n,g tali che il numero di Brill-Noether $\rho(g,2,n)=g-3(g-n+2)$ sia positivo, cioè in quasi tutti i casi in cui il morfismo $V_{n,g} \longrightarrow \mathcal{M}_g$ ha immagine densa (resta fuori solo il caso $\rho=0$). La loro dimostrazione però utilizza l'irriducibilità di $\mathcal{M}_g$ e quindi il risultato non può essere usato per dimostrarla.

Nel 1969 Deligne e Mumford dimostrarono l'irriducibilità di $\mathcal{M}_g$ per curve definite su un campo algebricamente chiuso di caratteristica qualunque, utilizzando il risultato classico dimostrato topologicamente. Una dimostrazione puramente algebrico-geometrica dell'irriducibilità di $\mathcal{M}_g$ è stata trovata solo nel 1982 da Fulton [15]; essa fa uso della compattificazione $\bar{H}_{n,g}$, costruita da Harris e Mumford, della varietà dei moduli $H_{n,g}$ dei rivestimenti n-upli di $\mathbb{P}^1$ di genere g. Per altre notizie sul problema di Severi si veda l'articolo [16] di Fulton.

Severi sollevò in [63] un'importante questione riguardante la varietà dei moduli, congetturando che $\mathcal{M}_g$ sia razionale o almeno unirazionale.

Ricordo al lettore che mentre la prima condizione significa che esiste un isomorfismo birazionale tra $\mathcal{M}_g$ e $\mathbb{P}^{3g-3}$, unirazionale vuol dire che per qualche N esiste un'applicazione razionale $\mathbb{P}^N \longrightarrow \mathcal{M}_g$ con immagine densa. Quindi la unirazionalità di $\mathcal{M}_g$ coincide essenzialemnte con la possibilità di trovare una famiglia di curve di genere g a moduli generali parametrizzata dai punti di uno spazio affine o proiettivo, variabili liberamente senza alcuna condizione chiusa. La razionalità è invece ovviamente una condizione molto più forte.

Nel formulare la sua congettura Severi si basò sulla evidente razionalità di $\mathcal{M}_1 \cong \mathbb{C}$ e sull'unirazionalità di $\mathcal{M}_g$ per $g \leq 10$, di cui diede una semplicissima dimostrazione, utilizzando famiglie di curve piane irriducibili con nodi.

Ecco qual è la sua argomentazione. Supponiamo per il momento, come faceva Severi, che le varietà $V_{n,g}$ siano irriducibili. Sappiamo che se $\rho(g,2,n) \geq 0$, o equivalentemente se $n \geq 2g/3 + 2$, $V_{n,g}$ parametrizza una famiglia di curve a moduli generali.

L'idea è di far vedere che se per ogni $g \leq 10$ si prende il minimo n che soddisfa la disuguaglianza precedente, allora i δ nodi della curva variabile variano genericamente in $\mathbb{P}^2$, cioè descrivono un sottoinsieme denso di $(\mathbb{P}^2)^{(\delta)}$, il prodotto simmetrico δ-uplo di $\mathbb{P}^2$.

Ciò è quanto dire (lo si può facilmente vedere) che scelti genericamente δ punti di $\mathbb{P}^2$ esistono curve di grado n singolari in quei punti; poiché ogni punto impone tre condizioni alle curve di dato grado che devono averlo come punto singolare, l'asserzione precedente segue dal fatto che $3\delta \leq \binom{n+2}{2}-1$ in tutti quei casi, come si calcola immediatamente.

Dalla genericità dei nodi e dalla razionalità di $(\mathbb{P}^2)^{(\delta)}$ segue subito che $V_{n,g}$ è razionale, perché l'applicazione

$$
\begin{aligned}
V_{n,g} &\longrightarrow (\mathbb{P}^2)^{(\delta)} \\
p &\longmapsto \left(\begin{matrix}\delta\text{-upla dei nodi della}\\ \text{curva param. da } p\end{matrix}\right)
\end{aligned}
$$

ha immagine densa e ha per fibre dei sistemi lineari, cioè spazi proiettivi. Poiché $V_{n,g}$ parametrizza curve a moduli generali, l'applicazione naturale $V_{n,g} \longrightarrow \mathcal{M}_g$ ha immagine densa e quindi $\mathcal{M}_g$ è unirazionale. Non è difficile vedere che l'ipotesi di irriducibilità di $V_{n,g}$ è soddisfatta in tutti i casi considerati; ad esempio possiamo usare il risultato di Arbarello e Cornalba citato prima nei casi $\rho(g,2,n) > 0$, e quindi in tutti ad eccezione di g=3,6,9, nei quali può essere dimostrato direttamente (per g=3,6 anzi è banalmente vero).

Quando $g \geqslant 11$ ed $n \geqslant 2g/3 +2$, i nodi delle curve parametrizzate da $V_{n,g}$ non variano genericamente in $\mathbb{P}^2$, ma descrivono un sottoinsieme localmente chiuso di $(\mathbb{P}^2)^{(\delta)}$, delle cui proprietà nulla si sa.

Questa è un'ulteriore prova della difficoltà che presenta lo studio delle famiglie di curve piane. Per una interessante discussione di questo tema si veda [57].

Per molto tempo la congettura di Severi è rimasta senza conferme né smentite, se si eccettua la costruzione di $\mathcal{M}_2$ da parte di Igusa dalla quale segue che $\mathcal{M}_2$ è razionale.

Di recente la situazione è radicalmente cambiata. Harris e Mumford nel 1982 [28] hanno dimostrato che per infiniti valori g (precisamente per tutti i g dispari $\geqslant 23$) $\mathcal{M}_g$ non è unirazionale. Il loro risultato è stato poi esteso a tutti i $g \geqslant 23$ da Harris [26] e da Eisenbud-Harris [10] con metodi simili. Per valori bassi di g (g=11,12,13) è stato invece dimostrato che $\mathcal{M}_g$ è unirazionale [8], [60]. Niente ancora si sa nei casi $14 \leqslant g \leqslant 22$.

Le tecniche e le idee nuove introdotte da Harris e da Mumford per dimostrare il loro spettacolare risultato sono troppe e troppo difficili per poter essere anche solo accennate qui. L'idea fondamentale è di far vedere che qualche multiplo positivo $K^{\otimes h}$ del fibrato canonico K di $\mathcal{M}_g$ ha delle sezioni, cosa che non si verificherebbe se $\mathcal{M}_g$ fosse unirazionale.

Se $g \geqslant 24$ si riesce a dire molto di più. Si mostra infatti in [28] , [26] e [10] che al crescere di h la $\dim(H^0(\mathcal{M}_g, K^{\otimes h})$ cresce come un polinomio di grado 3g-3; questo significa che $\mathcal{M}_g$ è una varietà "di tipo generale", cioè in un certo senso l'opposto di una varietà unirazionale.

Per una esposizione del lavoro di Harris e Mumford rimando il lettore a [9]; per avere un'idea delle prospettive e dei possibili sviluppi si consulti [45].

9. Oggi si sa molto di più delle varietà dei moduli $\mathcal{M}_g$, cioè essenzialmente di tutte le possibili famiglie di curve simultaneamente, che non delle famiglie di curve proiettive. Abbiamo già visto ad esempio che le varietà $V_{n,g}$ che parametrizzano le curve piane irriducibili con nodi non sono ben conosciute.

Classicamente furono molto studiate le curve in $\mathbb{P}^3$. Sia Noether che Halphen avevano scoperto che le curve di dato grado n in $\mathbb{P}^3$ sono distribuite in diverse famiglie irriducibili ognuna delle quali ha dimensione $\geqslant$ 4n; le componenti di dimensione 4n erano chiaramente regolari, le altre irregolari. La classificazione di queste famiglie e lo studio delle loro proprietà si presentò subito come un problema difficile; Halphen cercò senza successo di trovare invarianti numerici atti a distinguere le varie famiglie irriducibili.

Qualche tentativo fu fatto anche da Severi cercando dei tipi standard di curve singolari (curve poligonali, cioè unioni di rette) a cui far degenerare ogni curva nonsingolare di $\mathbb{P}^3$ e più in generale di $\mathbb{P}^r$ e ai quali ricondurre la classificazione delle famiglie. L'idea era molto suggestiva ma i risultati annunciati in [62] e [63] furono ottenuti con metodi che non sembra facile tradurre in dimostrazioni rigorose. Il più interessante dei risultati che Severi enunciò afferma che le curve nonsingolari di grado n e di genere g in $\mathbb{P}^r$ formano una sola famiglia irriducibile se $\rho(g,r,n) \geqslant 0$. Se sia effettivamente così non è noto ed è un importante problema aperto.

Le Vorlesungen di Severi rappresentano l'ultimo tentativo sistematico di affrontare le questioni più importanti della teoria delle curve algebriche con i metodi della geometria classica. Si può dire che esse sono il coronamento del programma iniziato da Clebsch e Noether, o almeno di una sua prima fase. Da quel momento i geometri dovettero prendere coscienza della inadeguatezza del linguaggio geometrico di Severi e dei suoi predecessori. Gli sforzi principali furono perciò diretti per molto tempo alla rifondazione della geometria algebrica, e molti problemi classici rimasero un po' in ombra; per questo motivo lo studio delle famiglie di curve proiettive è rimasto sostanzialmente fermo fino all'inizio degli anni '60.

Nel 1961 Grothendieck propose un nuovo approccio, che utilizza il linguaggio degli schemi e metodi funtoriali

[23] . Per ogni fissato polinomio numerico $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ (cioè tale che $p(d) \in \mathbb{Z}$ per ogni $d \in \mathbb{Z}$) definì in modo funtoriale uno schema proiettivo $\underline{\mathrm{Hilb}}^{r}_{p(X)}$, detto <u>schema di Hilbert</u>, che parametrizza la famiglia di tutti i sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^r$ aventi $p(X)$ come polinomio di Hilbert (la <u>famiglia universale</u>). Questi schemi sono generalizzazioni delle Grassmanniane, a cui si riducono per opportuna scelta di $p(X)$ ($p(X)=\binom{X+k}{k}$) per la Grassmanniana $G(k,r)$ dei sottospazi di dimensione proiettiva k di $\mathbb{P}^r$).

Le proprietà locali di $\underline{\mathrm{Hilb}}^{r}_{p(X)}$ (che per brevità denoterò $\underline{\mathrm{Hilb}}$ quando non mi interessi specificare r e $p(X)$) in un suo punto chiuso z corrispondono a proprietà dello schema $X(z) \subseteq \mathbb{P}^r$ parametrizzato da z. Lo spazio tangente di Zariski di $\underline{\mathrm{Hilb}}$ in z è canonicamente isomorfo ad $H^0(X(z),N)$, dove N è il fascio normale ad $X(z)$ in $\mathbb{P}^r$, definito come $N=\underline{\mathrm{Hom}}(I/I^2 , \underline{O}_{X(z)})$, dove $I \subseteq \underline{O}_{\mathbb{P}^r}$ è il fascio di ideali di $X(z)$ in $\mathbb{P}^r$. Ad esempio se X è una retta di $\mathbb{P}^r$ il suo fascio normale è isomorfo a $\underline{O}(1)^{r-1}$ ed $H^0(N)$ ha dimensione $2(r-1)$, in accordo con il fatto che $G(1,r)$ è nonsingolare di dimensione $2(r-1)$.

$\underline{\mathrm{Hilb}}$ può essere singolare e anche non ridotto, persino in punti che parametrizzano curve o varietà irriducibili e nonsingolari; molti esempi del genere sono noti, il primo dei quali è stato trovato da Mumford [40]. Un criterio sufficiente affinché $\underline{\mathrm{Hilb}}$ sia nonsingolare in z è che $H^1(X(z),N)=0$, ma questa condizione non è necessaria come mostrano esempi molto semplici (intersezioni complete di tipo (a,b) in $\mathbb{P}^3$, con $a+b \geqslant 6$).

In generale $H^1(X(z),N)$ contiene le "ostruzioni" alla nonsingolarità di $\underline{\mathrm{Hilb}}$ in z (in un senso tecnico che è possibile precisare), ma non tutti i suoi elementi sono necessariamente ostruzioni: $X(z)$ si dice <u>ostruito</u> se $H^1(X(z),N)$ contiene ostruzioni non nulle, cioè se $\underline{\mathrm{Hilb}}$ è singolare in z.

Si sa molto poco della struttura locale di $\underline{\mathrm{Hilb}}$; ad esempio non si conosce una condizione necessaria e sufficiente affinché una curva di $\mathbb{P}^r$ (o semplicemente di $\mathbb{P}^3$) sia ostruita. Un problema interessante è anche quello di dare condizioni sufficienti su una curva proiettiva affinché $\underline{\mathrm{Hilb}}$ sia ridotto (oppure analiticamente irriducibile, o normale) nel punto corrispondente.

La nostra ignoranza della struttura locale di $\underline{\mathrm{Hilb}}$ contribuisce a rendere difficile lo studio delle sue proprietà globali, delle quali attualmente si sa poco o niente.

Un risultato molto generale di Hartshorne [29] afferma che, per ogni r e p(X), $\underline{\mathrm{Hilb}}^r_{p(X)}$ è connesso. La descrizione esplicita delle sue componenti irriducibili è difficile fin dai primi casi. Ad esempio solo recentemente è stato iniziato uno studio dettagliato di $\underline{\mathrm{Hilb}}^3_{3X+1}$ [52].

Le componenti irriducibili più facili da studiare dovrebbero essere quelle costituite genericamente da intersezioni complete; eppure la semplice domanda seguente non ha ancora una risposta: esistono curve irriducibili e nonsingolari che non sono intersezioni complete ma che sono specializzazioni di intersezioni complete (cioè che appartengono ad una famiglia di curve nonsingolari che parametrizza genericamente intersezioni complete)?

Gli schemi di Hilbert più interessanti dal punto di vista delle curve sono quelli relativi a $\mathbb{P}^r$ e ai polinomi $p(X)=nX+1-g$ tali che $n \geqslant (r/r+1)g+r$, cioè che parametrizzano curve di ordine n e genere aritmetico g con $\rho(g,r,n) \geqslant 0$. Un raffinamento del teorema di Kleiman-Laskov [37] e di Kempf [35] afferma che su ogni curva sufficientemente generale $C \in \mathcal{M}_g$ esiste un $L \in W^r_n$ che ne definisce un'immersione in $\mathbb{P}^r$ se $\rho(g,r,n) \geqslant 0$ (cfr. [11] e [61]). Da ciò segue facilmente che in questo caso esiste una componente irriducibile $I^r_{n,g}$ di $\underline{\mathrm{Hilb}}^r_{p(X)}$ che parametrizza una famiglia di curve genericamente nonsingolari e a moduli generali. La questione lasciata insoluta da Severi si traduce nel problema di vedere se esiste un'altra componente irriducibile di $\underline{\mathrm{Hilb}}^r_{p(X)}$, oltre ad $I^r_{n,g}$, che parametrizza genericamente curve nonsingolari ed irriducibili. E' noto che $I^r_{n,g}$ è l'unica componente che consiste di curve a moduli generali; nel caso $\rho(g,r,n) > 0$ ciò segue da un teorema di Fulton e Lazarsfeld [17] combinato con uno di Gieseker [19], e nel caso $\rho(g,r,n)=0$ è stato annunciato recentemente da Eisenbud e Harris.

Si sa anche che un'altra componente non può esistere se n è abbastanza grande rispetto a g, precisamente se $n \geqslant 2g-1$ (ciò segue facilmente dall'irriducibilità di $\mathcal{M}_g$ e dal fatto che la serie iperpiana di ogni curva della famiglia è necessariamente non speciale); questa condizione è stata migliorata da Harris [27] portandola a $n > (2r-1)g/(r+1)+1$. Anche in questi casi in cui l'irriducibilità è nota resta il problema di dimostrarla senza utilizzare quella di $\mathcal{M}_g$. Se $\rho(g,r,n) < 0$ ci sono molti esempi che mostrano che $\underline{\mathrm{Hilb}}^r_{p(X)}$, $p(X)=nX+1-g$, può avere diverse componenti irriducibili e di diverse dimensioni, che parametrizzano genericamente curve irriducibili e nonsingolari. Non si conoscono stime, neanche congetturali, del numero e della dimensione delle componenti. Si sa solo, per motivi generali, che ognuna di esse ha dimensione almeno $n(r+1)-(g-1)(r-3)$.

Rimane non priva di interesse la questione di cui si era occupato Severi, se ogni curva irriducibile e nonsingolare di $\mathbb{P}^r$ si possa far degenerare ad una poligonale, cioè se ogni componente irriducibile di Hilb che parametrizza genericamente curve nonsingolari contenga punti che parametrizzano curve che sono unioni di rette. In questa direzione praticamente nulla è stato scoperto in tempi recenti.

In generale è più facile decidere se una curva singolare possa deformarsi in $\mathbb{P}^r$ e diventare nonsingolare (cioè se sia "smussabile") che non il viceversa; tuttavia sono noti solo pochi particolari criteri di smussabilità di curve proiettive [30].

Un altro problema molto bello riguardante la componente $I^r_{n,g}$ di $\underline{\mathrm{Hilb}}^r_{p(X)}$ nel caso $\rho(g,r,n) \geqslant 0$ è la <u>congettura del rango massimo</u> (essenzialmente dovuta a Noether). Essa afferma che per tutte le curve $C(z)$ parametrizzate da un punto sufficientemente generale $z \in I^r_{n,g}$ e per ogni d l'applicazione di restrizione

$$H^0(\mathbb{P}^r, \underline{o}(d)) \longrightarrow H^0(C(z), \underline{o}(d))$$

ha rango massimo (cioè è iniettiva e suriettiva). In altre parole ciò che si afferma è che una curva la quale sia contenuta in una ipersuperficie di grado d e simultaneamente abbia incompleta la serie segata dalle ipersuperfici di grado d è una curva particolare nella famiglia. Ad esempio una curva di tipo (2,4) su una quadrica, entrambe nonsingolari, non è di rango massimo perché le quadriche segano una serie incompleta; ma facendola muovere in Hilb la si può fare uscire dalla quadrica e farla diventare di rango massimo. Questa congettura si può formulare per qualunque componente di Hilb, non necessariamente a moduli generali, ma ci sono esempi abbastanza semplici che mostrano che è falsa in questa forma generale. In alcuni casi la congettura è stata dimostrata (curve razionali [31], certe curve di $\mathbb{P}^3$ [4], e altri).

Per una interessante discussione dei problemi riguardanti lo schema di Hilbert si veda [27]. Molti degli argomenti di cui ho parlato sono trattati esaurientemente ed in modo sistematico in un libro di prossima pubblicazione di Arbarello-Cornalba-Griffiths-Harris.

BIBLIOGRAFIA

[1] Arbarello, E. e M. Cornalba (1981). Su una congettura di Petri. Comment Math.Helv., 56, 1-38.

[2] Arbarello, E. e M. Cornalba (1983). A few remarks about the variety of irreducible plane curves of given degree and genus. Ann.E.N.S. 16, 467-488.

[3] Babbage, D.W. (1939). A note on the quadrics through a canonical curve. J.London Math. Soc. 14, 310-315.

[4] Ballico, E. e Ph. Ellia (1983). Generic curves of small genus in $\mathbb{P}^3$ are of maximal rank. Math.Ann.264, 211-225.

[5] Brill, A. e M.Noether (1873). Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie. Math. Ann. 7, 269-310.

[6] Castelnuovo, G. (1889). Ricerche di geometria sulle curve algebriche. Atti R.Acc.d.Sc. di Torino 24.

[7] Castelnuovo, G. (1893). Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica. Rend.Circ.Matem. di Palermo 7.

[8] Chang, M.C. e Z.Ran. Unirationality of the moduli spaces of curves of genus 11, (12) and 13. Preprint.

[9] Cornalba, M. (1983). Systemes pluricanoniques sur l'espace des modules des courbes et diviseurs de courbes k-gonales (d'apres Harris et Mumford. Seminaire Bourbaki, exp. 615.

[10] Eisenbud, D. and J.Harris. M_g is of general type for $g \geqslant 24$. Lavoro in preparazione.

[11] Eisenbud, D. and J.Harris (1983). Divisors on general curves and cuspidal rational curves. Invent.Math. 74, 371-418.

[12]. Enriques, F. (1919). Sulle curve canoniche di genere p dello spazio a p-1 dimensioni. Rend.Acc.Sc.Ist. di Bologna 23, 80-82.

[13] Enriques, F. e O.Chisini (1924). Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. Vol.3°

Zanichelli, Bologna.

[14] Fano, G. Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualùnque.

[15] Fulton, W. (1982). On the irreducibility of the moduli space of curves. Appendix to the paper of Harris and Mumford. Invent.Math. 67, 87-88.

[16] Fulton, W. (1982). On nodal curves. Algebraic Geometry-Open Problems; Proceedings, Ravello 1982, Springer L.N. vol. 997.

[17] Fulton W. e R.Lazarsfeld (1981). On the connectedness of degeneracy loci and special divisors. Acta Math. 146, 271-283.

[18] Gherardelli, G. (1942). Sulle curve sghembe algebriche intersezioni complete di due superficie.Rend. Reale Acc.d'Italia, s.VII, vol.4, 128-132.

[19] Gieseker D. (1982). Stable curves and special divisors: Petri's conjecture. Invent.Math. 66, 251-275.

[20] Gieseker, D. (1981). A construction of special space curves. Algebraic Geometry-Ann Arbor, Springer L.N. 1008.

[21] Green, M. Koszul cohomology and the geometry of projective varieties. Preprint.

[22] Griffiths, P. e J.Harris (1980). On the variety of special linear systems on a general algebraic curve. Duke Math. J.,47, 233-272.

[23] Grothendieck, A. (1961). Les schemas de Hilbert. Seminaire Bourbaki, exp. 221.

[24] Gruson, L. e C. Peskine (1978). Genre des courbes de l'espace projectif. Springer L.N. 687.

[25] Halphen, G. (1882). Memoire sur la classification des corbes gauches algebriques. J.Ec.Polyt. 52, 1-200.

[26] Harris, J. On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, II: the even genus case. Preprint.

[27] Harris, J. (1982). Curves in projective space. Univ. de Montreal.

[28] Harris, J. e D.Mumford (1982). On the Kodaira dimension of the moduli space of curves. Invent. Math. 67, 23-86.

[29] Hartshorne, R. (1966). Connectedness of the Hilbert scheme. Publ. IHES 29, 261-304.

[30] Hartshorne, R. e A.Hirschowitz. Lavoro in preparazione.

[31] Hirschowitz, A. (1981). Sur la postulation generique des courbes rationelles. Acta Math. 146, 209-230.

[32] Hurwitz, A. (1891). Uber Riemann'sche Flachen mit gegebenen Verzweigungspunkten. Math. Ann. 39, 1-61.

[33] Igusa, J. (1960). Arithmetic varieties of moduli of genus two. Ann. of Math. 72, 612-649.

[34] Kempf, G.(1973). On the geometry of a theorem of Riemann. Ann. of Math. 98, 178-185.

[35] Kempf, G. (1971). Schubert methods with an application to algebraic curves. Public. of Math. Centrum, Amsterdam.

[36] Kleiman, S. (1976). r-special subschemes and an argument of Severi's. Adv. in Math. 22, 1-31.

[37] Kleiman, S. e D.Laskov (1972). On the existence of special divisors. Amer.J. of Math. 94, 431-436.

[38] Klein, F. (1882). Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen. Leipzig, Teubner.

[39] Martens, H.H.. (1967). On the varieties of special divisors on a curve. J.Reine Angew.Math. 227, 111-120.

[40] Mumford, D. (1962). Further pathologies in algebraic geometry. Amer.J. of Math. 84, 642-648.

[41] Mumford, D (1970). Varieties defined by quadratic equations. Corso CIME 1969 (Questions on algebric varieties). Ed. Cremonese, Roma.

[42] Mumford, D. (1965). Geometric Invariant Theory. Springer.

[43] Mumford, D. (1974). Prym varieties I. Contributions to Analysis, a collection of papers dedicated to L. Bers, 325-350.

[44] Mumford, D. (1977). Stability of projective varieties. Ens. Math. 23, 39-110.

[45] Mumford, D. (1983). Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves. Shafarevich volume, Birkhauser.

[46] Noether, M.(1872).Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen. Math. Ann. 6, 351-365.

[47] Noether, M. (1871). Über die algebraischen Functionen, note II. Gottingen Nachr. 7.

[48] Noether, M. (1882). Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven. Abhand. der preussischen Ak. der Wiss.,1-120.

[49] Peskine, C. e L.Szpiro(1974). Liaison des varietés algebriques I. Invent.Math. 26, 271-302.

[50] Petri, K. (1922). Uber die invariante Darstellung der algebraischen Functionen einer Veranderliche . Math. Ann. 88, 242-289.

[51] Petri, K. (1924). Uber Spezialkurven I. Math.Ann. 93, 182-209.

[52] Piene, R. Degenerations of complete twisted cubics. Progr. in Math. 24, Birkhauser.

[53] Riemann, B. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veranderlichen complexen Grosse.

[54] Riemann, B. (1859). Theorie der Abel'schen Functionen. J.Reine Angew. Math. 54.

[55] Saint Donat, B. (1973). On Petri's analysis of the linear system of quadric through a canonical curve. Math. Ann. 206, 157-175.

[56] Saint Donat, B. (1972). Sur les equations definissant une courbe algebrique. CRAS Paris 274, 324-327.

[57] Segre, B. (1930). Sui moduli delle curve algebriche. Ann. di Mat. Pura e Appl. (4)7, 71-102.

[58] Segre, B. (1928). Sui moduli delle curve poligonali, e sopra un complemento al teorema di esistenza di Riemann. Math. Ann. 100, 537-551.

[59] Segre, C. (1887). Recherches generales sur les courbes et les surfaces reglées algébriques. Math. Ann. 30, 203-226.

[60] Sernesi, E. (1981). L'unirazionalità della varietà dei moduli delle curve di genere dodici. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa (4), 8, 405-439.

[61] Sernesi, E. (1984). On the existence of certain families of curves. Invent. Math. 75, 25-57.

[62] Severi, F. (1921). Vorlesungen uber algebraische Geometrie. Leipzig, Teubner.

[63] Severi, F. (1915). Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann. Rend.R.Acc.Naz.dei Lincei (5), 241.

[64] Torelli, R. (1913). Sulle varietà di Jacobi. Rend.R. Accad.Lincei. (5), 22, 98-103.