UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

LA REGOLARITÀ SECONDO CASTELNUOVO-MUMFORD

Relatore:
Prof. EDOARDO SERNESI

Candidato:
ALESSANDRO BIGAZZI

ANNO ACCADEMICO 2015/2016

Classificazione AMS: 13D02, 14B15, 14C20, 14F05
Parole chiave: regolarità, curva proiettiva, sizigie, coomologia locale

Indice

Introduzione.

“Questa non è Matematica; è Teologia!”
(Gordan in risposta ad un articolo di Hilbert)

In questa tesi illustreremo un metodo coomologico per lo studio delle curve algebriche proiettive, utilizzando un importante invariante algebrico noto come *regolarità di Castelnuovo-Mumford*. In particolare, mostreremo nel dettaglio un risultato che fornisce una stima per la regolarità delle curve proiettive lisce, presentando alcuni esempi che ne mostrano l'utilità.

La regolarità di Castelnuovo-Mumford è un invariante fondamentale in algebra commutativa ed in geometria algebrica. In effetti, le sue prime tracce risalgono alla fine del XIX secolo, molto tempo prima che fosse definito propriamente.

La prima apparizione nascosta della regolarità può essere trovata nel lavoro di Guido Castelnuovo ($1865 - 1952$), precisamente nel celebre articolo [5], dedicato allo studio della dimensione di certe serie lineari su curve algebriche nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^3$. L'interesse principale è rivolto alle serie lineari su una curva algebrica X di dato grado d ottenute intersecando X con superficie di grado f: una simile intersezione risulta formata da df punti, ma è ben più complesso sapere qual è la dimensione della serie lineare generata. Geometricamente, questo è equivalente a chiedersi quante siano le condizioni lineari che una curva X impone ad una superficie S che la contenga (problema della *postulazione*). In realtà, ai geometri italiani era già noto, grazie ai risultati della scuola tedesca, che la dimensione cercata, *quando f è abbastanza grande*, è necessariamente

$$r_f = df - g(X)$$

se X è una curva algebrica liscia in $\mathbf{P}^3$. In altre parole, la serie lineare segata dalle superficie di grado f è completa e non speciale. Castelnuovo si occupa, in particolare, di determinare un limite inferiore φ che renda valida la formula precedente per $f \geq \varphi$ e, parallelamente, un limite superiore per l'errore $fd - g(X) - r_f$ che si commette applicando la formula quando $f < \varphi$. Il primo risultato è quello che ha fornito lo spunto per la definizione del concetto di regolarità: infatti, la completezza e la non specialità di tali serie lineari possono essere tradotti, in linguaggio moderno, con la suriettività di certe mappe tra moduli di coomologia. Come vedremo in seguito, il fatto che la formula sia valida *definitivamente* ha una perfetta analogia con la definizione moderna che utilizza i fasci algebrici.

Un'altra precoce apparizione, sebbene anch'essa in sordina, si può trovare nel rivoluzionario articolo [16] di David Hilbert (1862 – 1943), in cui si gettano le basi per la teoria delle risoluzioni libere di ideali; in particolare il teorema delle sizigie garantisce la finitezza della risoluzione libera minimale di un ideale generato da un numero finito di polinomi omogenei. Il lavoro di Hilbert cambiò radicalmente il mondo della matematica, favorendo un progressivo abbandono dei vecchi metodi "costruttivi", spesso risultando in accese discussioni. A tal proposito, un articolo leggermente precedente di Hilbert è oggetto di un curioso aneddoto. In esso viene risolto in modo non costruttivo un annoso problema di teoria degli invarianti, campo molto praticato nella seconda metà dell'Ottocento; il professor Paul Gordan di Erlangen, eminente algebrista dell'epoca, lesse l'articolo di Hilbert e, trovatavi letteralmente la propria carriera liquidata in un teorema, scrisse a Hilbert lamentando "questa non è matematica; è teologia!" ([21]).

In realtà, il lavoro di Hilbert sulle sizigie è di natura costruttiva: il teorema che prova la finitezza della risoluzione libera esibisce anche un metodo esplicito per determinarla (si veda il capitolo quinto di questa tesi per i dettagli della questione). La questione che però negli anni successivi diede luogo ad una lunga controversia fu la seguente: *è possibile controllare dall'alto il numero di passi necessari per costruire la risoluzione libera minimale di un ideale omogeneo arbitrario?* In particolare, ci si chiede se tale numero sia controllabile mediante dei caratteri numerici associati all'ideale e non possa, invece, essere arbitrariamente grande. La domanda ebbe risposta affermativa nel 1926, grazie al lavoro di Grete Hermann (1901 – 1984) che in [15] dimostrò che la risoluzione libera minimale di un ideale generato da un numero finito di polinomi può essere *calcolata* in al più un numero (finito) di operazioni, dipendente soltanto dal numero delle indeterminate nell'anello ambiente e dal grado massimo dei generatori. È sorprendente scoprire che la regolarità di Castelnuovo-Mumford fornisce proprio tale limite dall'alto; più in dettaglio, la regolarità di un modulo M stabilisce esattamente da quale indice in avanti la funzione di Hilbert ed il polinomio di Hilbert di M coincidono. Il lavoro della Hermann è stato a lungo ignorato, certamente per l'impossibilità di eseguire calcoli di grande portata; con l'avvento dell'informatica e lo sviluppo di sistemi computazionali sempre più raffinati, argomenti di questa natura hanno assunto sempre più importanza, fornendo a tutti gli effetti stime di complessità algoritmica.

Fu solamente nel 1966 che David Mumford diede la prima definizione precisa di *regolarità*; infatti, riprendendo le idee di Castelnuovo, egli definì il concetto di *fascio m-regolare nel senso di Castelnuovo*, per fasci coerenti di ideali sullo spazio proiettivo: un tale fascio $\mathscr{I}$ su $\mathbf{P}^r_k$ è m-regolare se $H^i(\mathbf{P}^r_k, \mathscr{I}(m-i)) = 0$ per ogni $i > 0$ e la regolarità di $\mathscr{I}$ è il minimo, se esiste, degli interi m che rendono $\mathscr{I}$ un fascio m-regolare. Mumford riuscì a provare un primo limite superiore per la regolarità di un fascio coerente, il che permise di introdurre in molti degli argomenti classici della geometria algebrica un novello “approccio algoritmico”. Infatti, sebbene definita in termini di coomologia dei fasci, la regolarità si esprime facilmente anche attraverso le sizigie di un ideale ed è quindi un invariante di grande importanza nella geometria algebrica “classica”, in cui le varietà sono definite concretamente tramite equazioni esplicite.

Il concetto di regolarità ha grande importanza anche nel campo dell'algebra commutativa. Nel 1982, Akira Ooishi ha definito la regolarità di un modulo graduato e finitamente generato in termini di certi moduli di coomologia locale, introdotta estensivamente da Alexander Grothendieck $(1928-2014)$ negli anni Sessanta. Pochi anni dopo, David Eisenbud e Shiro Goto hanno reso esplicito il legame fra questa definizione algebrica della regolarità di un modulo graduato su un anello di polinomi e la sua risoluzione libera minimale.

Nel medesimo articolo, Eisenbud e Goto hanno formulato la congettura seguente: *sotto quali condizioni è verificata la disuguaglianza* $\operatorname{reg}(X) \leq \deg(X) - \operatorname{codim}(X) + 1$ *per una varietà proiettiva* X*?* Castelnuovo, nel suo articolo, dimostrò precisamente che la disuguaglianza è valida se X è una curva proiettiva non singolare in $\mathbf{P}^3$; nel 1983 Gruson, Lazarsfeld e Peskine hanno provato in [17] che la disuguaglianza vale per curve proiettive irriducibili e non degeneri sopra un campo algebricamente chiuso. Per superficie proiettive lisce sopra un campo di caratteristica 0 la disuguaglianza è stata provata da Lazarsfeld nel 1987. La validità della congettura per altri casi è tutt'ora argomento di fervente ricerca.

Passiamo adesso in rassegna i contenuti della tesi; il lavoro è stato suddiviso in due parti, in cui la prima è dedicata ai preliminari algebrici e geometrici necessari per comprendere la seconda, in cui si affrontano gli argomenti centrali.

Il primo capitolo è un breve *excursus* delle tematiche salienti di algebra omologica utili nel seguito; in particolare vengono richiamati i concetti di profondità, lunghezza e proprietà di Cohen-Macaulay, assieme ai risultati più importanti.

Il secondo capitolo introduce la terminologia di teoria dei fasci algebrici, con particolare riguardo ai fasci localmente liberi, ai divisori di Weil e Cartier e la loro espressione tramite fasci invertibili. Viene dato anche un breve cenno alla teoria dei sistemi lineari. Nell'ultima sezione del capitolo viene introdotto anche il linguaggio dei fibrati vettoriali, mostrandone la sostanziale equivalenza con quello dei fasci localmente liberi.

Il seguente capitolo terzo entra maggiormente nel dettaglio della teoria dei fasci algebrici, analizzando dettagliatamente il concetto di *calcolo differenziale* sulle varietà algebriche. La trattazione spazia da argomenti puramente algebrici come i moduli dei differenziali di Kähler e la loro applicazione al caso di estensioni di campi, fino all'introduzione dei fasci di differenziali, utilizzando la terminologia del capitolo secondo. Particolare enfasi è data, a questo livello, alle proprietà omologiche di moduli e fasci di differenziali, derivando in particolare la *successione di Eulero* 3.2. L'ultima sezione ha una nota più geometrica e utilizza gli strumenti definiti nel capitolo per definire i concetti di *fascio canonico* e di *genere*.

Nel quarto capitolo si studiano brevemente alcune proprietà fondamentali delle curve algebriche, con riguardo particolare ai risultati classici come il *Teorema di Riemann-Roch* per curve lisce e le varie proprietà del *grado*.

L'ultimo capitolo della prima parte introduce finalmente il contesto di algebra commutativa necessario per il seguito. Le prime sezioni sono dedicate all'approfondimento della teoria delle sizigie e delle risoluzioni libere, con accentuato interesse nel caso graduato; la terza sezione contiene invece uno scorcio della teoria degli *ideali determinantali*, coronata dal *Teorema di Hilbert-Burch*. Infine, le ultime due sezioni forniscono delle semplici applicazioni geometriche dei concetti esposti, presentando un semplice metodo per determinare le risoluzioni libere di insiemi di punti sul piano proiettivo.

La seconda parte inizia con due capitoli particolarmente tecnici. Il capitolo sesto è dedicato allo studio sistematico della coomologia locale e dei suoi legami con la coomologia dei fasci. Nelle varie sezioni vengono proposte varie definizioni e diversi metodi di calcolo, utilizzando i funtori di estensione, il complesso di Koszul o la coomologia di Čech. Nell'ultima sezione si raccolgono altri risultati notevoli, tra i quali un teorema di annullamento che coinvolge profondità e dimensione. Il settimo capitolo contiene brevemente la costruzione del complesso di Eagon-Northcott, corredata da un compendio sull'algebra simmetrica e da alcuni risultati notevoli, senza dimostrazione.

Il capitolo ottavo è una delle parti centrali della tesi e contiene una discussione approfondita della teoria moderna della *regolarità*. In particolare, la prima sezione è dedicata alla dimostrazione di una caratterizzazione della regolarità che fa uso estensivo di coomologia locale; la sezione successiva interpola i risultati ottenuti con peculiari particolarità dei moduli di coomologia locale per ottenere una semplificata definizione nel caso artiniano. La terza sezione è di carattere geometrico e dimostra una prima stima per la regolarità nel caso Cohen-Macaulay aritmetico; le ipotesi verranno poi rilassate nel capitolo seguente. L'ultima sezione ripercorre le tematiche del capitolo nel linguaggio della teoria dei fasci, seguendo l'approccio originale di Mumford. Di notevole importanza è il risultato che collega regolarità di moduli a regolarità di fasci coerenti.

L'ultimo capitolo è dedicato alla dimostrazione completa del *Teorema di Gruson-Lazarsfeld-Peskine*, che fornisce un limite dall'alto alla regolarità nel caso di curve proiettive non degeneri. La dimostrazione è presentata per curve lisce e viene riassunta nella sesta sezione, mentre le sezioni precedenti concorrono alla riduzione del problema, facendo uso di strumenti come i complessi di Koszul e di Eagon-Northcott. Infine, nell'ultima sezione il risultato del teorema viene verificato in alcuni casi di notevole rilevanza geometrica.

Parte 1

PRELIMINARI

CAPITOLO 1

Algebra omologica.

In questo capitolo, di natura esclusivamente algebrica, vogliamo richiamare alcune importanti concetti di algebra omologica che saranno utilizzati diffusamente in tutta la trattazione successiva.

1.1. Profondità.

Sia A un anello noetheriano e sia M un A-modulo finitamente generato. Una successione $a_1, \dots, a_n \in A$ si dice *M-regolare* se

- a_1 non è un divisore dello zero per M;
- per ogni $i > 1$, a_i non è un divisore dello zero in $M/(a_1, \dots, a_{i-1})M$.

Le successioni regolari di particolare interesse sono quelle contenute in un ideale $I \subseteq A$ tale che $IM \neq M$. Si osservi che la noetherianità garantisce la finitezza delle successioni regolari. Il prossimo risultato che presentiamo caratterizza l'esistenza di successioni regolari in termini dei funtori d'estensione.

Ricordiamo che il *supporto* di un A-modulo M finitamente generato è definito come

$$\mathrm{supp}(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\} = V(\mathrm{Ann}_A(M))$$

Ricordiamo inoltre che un ideale primo $\mathfrak{p}$ si dice *associato* a M se esiste una immersione $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$. L'insieme dei primi associati ad M si indica con $\mathrm{Ass}_A(M)$.

Teorema 1.1. (Grothendieck) *Siano A un anello noetheriano e M un A-modulo finitamente generato. Sia $I \subseteq A$ un ideale tale che $IM \neq M$ e sia $n > 0$ un intero. Allora sono equivalenti:*

1. $\mathrm{Ext}^k_A(N, M) = 0$ *per ogni $k < n$ e per ogni A-modulo N finitamente generato tale che* $\mathrm{supp}(N) \subseteq V(I)$*;*
2. $\mathrm{Ext}^k_A(A/I, M) = 0$ *per ogni $k < n$;*
3. *esiste un A-modulo N finitamente generato con* $\mathrm{supp}(N) = V(I)$ *tale che* $\mathrm{Ext}^k_A(N, M) = 0$ *per ogni $k < n$;*
4. *esiste una successione M-regolare finita $a_1, \dots, a_n$ in I.*

Dimostrazione. Si vedano [9, 20]. □

In particolare, il Teorema rende ben posta la seguente definizione.

Definizione 1.1. La *profondità* $\mathrm{depth}(I, M)$ di un A-modulo M rispetto ad un ideale $I \subseteq A$ è definita come segue:

- se $IM \neq M$, allora $\operatorname{depth}(I, M)$ è la lunghezza massimale di una successione M-regolare contenuta in I;
- se $IM = M$ si pone $\operatorname{depth}(I, M) = \infty$.

Nel caso in cui A è locale, indichiamo semplicemente con $\operatorname{depth}(M)$ il numero $\operatorname{depth}(\mathfrak{m}, M)$, dove $\mathfrak{m}$ è l'ideale massimale. Ne menzioniamo di seguito alcune proprietà significative.

PROPOSIZIONE 1.1. *Sia A un anello noetheriano:*
(1) *se $I \subseteq A$ è un ideale e $M = 0$, allora* $\operatorname{depth}(I, M) = 0$*;*
(2) *se A è locale,* $\operatorname{depth}(M) = 0$ *se e solo se* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}_A(M)$*;*
(3) *se* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$*, allora* $\operatorname{depth}(M_\mathfrak{p}) = 0$ *se e solo se* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$*;*
(4) *se* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$*, allora* $\operatorname{depth}(\mathfrak{p}, M) = 0$*;*
(5) $\operatorname{depth}(M_\mathfrak{p}) \geq \operatorname{depth}(\mathfrak{p}, M)$ *per ogni primo* $\mathfrak{p} \subseteq A$*.*

DIMOSTRAZIONE. (Omessa) □

Esistono relazioni che legano profondità, dimensione proiettiva e dimensione di Krull.

PROPOSIZIONE 1.2. *Sia A locale e sia M un A-modulo finitamente generato. Allora*

$$\operatorname{depth}(M) \leq \dim(A/\mathfrak{p})$$

per ogni primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Si veda [20]. □

La relazione più importante è tuttavia la seguente formula.

TEOREMA 1.2. (FORMULA DI AUSLANDER-BUCHSBAUM) *Siano A un anello locale, M un A-modulo finitamente generato e di dimensione proiettiva finita. Allora*

$$\operatorname{depth}(A) = \operatorname{depth}(M) + \dim^{(\mathrm{proj})}(M)$$

DIMOSTRAZIONE. Si vedano [2, 9, 20]. □

La maggior parte delle considerazioni fatte per la profondità di anelli locali vale anche per moduli graduati su anelli graduati. Sia $S = \bigoplus S_j$ un anello graduato tale che S_0 sia un campo e tale che S sia una S_0-algebra finitamente generata. Denotiamo con

$$\mathfrak{m} := \bigoplus_{j \geq 1} S_j$$

l'ideale *irrilevante*. Si tratta di un ideale massimale che conserva molte delle proprietà dell'ideale massimale in un anello locale. Vale in particolare il seguente risultato.

COROLLARIO 1.1. *Sia M un S-modulo graduato, con le notazioni precedenti. Se M ha dimensione proiettiva finita, allora*

$$\operatorname{depth}(\mathfrak{m}, S) = \operatorname{depth}(\mathfrak{m}, M) + \dim^{(\mathrm{proj})}(M)$$

Per una trattazione dettagliata sull'applicazione dei metodi omologici al contesto di anelli e moduli graduati, si possono consultare i volumi [13].

Definizione 1.2. Un anello noetheriano locale $(A, \mathfrak{m})$ si dice *regolare* se $\mathfrak{m}$ può essere generato con esattamente $\dim(A)$ generatori.

Una formulazione equivalente si può ottenere considerando lo spazio vettoriale $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ sul campo residuo $k = A/\mathfrak{m}$. Per il Lemma di Nakayama, A è regolare se $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim(A)$.

1.2. Anelli di Cohen-Macaulay.

Sia A un anello e sia $I \subseteq A$ un ideale. La *dimensione* di I è definita come

$$\dim(I) := \dim(A/I)$$

Se M è un A-modulo, poniamo anche

$$\dim_A(M) := \dim(A/\mathrm{Ann}_A(M))$$

dove $\mathrm{Ann}_A(M) := \{a \in A \mid am = 0 \text{ per qualche } m \in M\}$ è l'annullatore.

Osservazione 1.1. Se $M = I$, ossia se riguardiamo I come un A-modulo, occorre precisare rispetto a quale struttura si intende prendere la dimensione. Se infatti A è un dominio, allora $\mathrm{Ann}_A(I) = (0)$, quindi $\dim_A(I) = \dim(A)$ come A-modulo, mentre $\dim(I) = \dim(A/I)$, che in generale differisce da $\dim(A)$. Per questo motivo, qualora il contesto suggerisca qualche ambiguità, indicheremo sempre con $\dim(I)$ la dimensione di I *come ideale* di A e con $\dim_A(I)$ la dimensione di I *come A-modulo*.

Quando A è un dominio che si atteggia a k-algebra finitamente generata su un campo k, allora per ogni ideale $I \subseteq A$ sussiste la formula $\dim(R/I) = \dim(R) - \dim(I)$.

Come visto nella sezione precedente, se A è un anello locale è noto che

$$\mathrm{depth}(M) \leq \dim(A_\mathfrak{m})$$

Quindi nel caso in cui A sia locale regolare, sappiamo che ogni insieme di generatori per $\mathfrak{m}$ forma una successione $\mathfrak{m}$-regolare massimale, ossia $\mathrm{depth}(A) = \dim(A_\mathfrak{m})$. Questa proprietà vale, però, anche in contesti più generali.

Lemma 1.1. *Sia A un anello tale che* $\mathrm{depth}(A) = \dim(A_\mathfrak{m})$ *per ogni ideale massimale $\mathfrak{m} \subseteq A$. Allora, per ogni ideale proprio $I \subseteq A$, vale* $\mathrm{depth}(I, A) = \min\{\dim(A_\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A/I)\}$.

Dimostrazione. Si veda [9]. □

Definizione 1.3. Un anello A tale che $\mathrm{depth}(\mathfrak{m}, A) = \dim(A_\mathfrak{m})$ per ogni ideale massimale $\mathfrak{m} \subseteq A$ è detto *anello di Cohen-Macaulay*.

Tra gli anelli di Cohen-Macaulay occupano un ruolo importante gli anelli locali regolari. Presentiamo qui di seguito alcune delle proprietà più importanti degli anelli di Cohen-Macaulay.

Proposizione 1.3. *Sia A un anello. Sono equivalenti:*

(1) *A è di Coehn-Macaulay;*
(2) *$A_{\mathfrak{p}}$ è di Cohen-Macaulay per ogni ideale primo $\mathfrak{p} \subseteq A$;*
(3) *$A_{\mathfrak{m}}$ è di Cohen-Macaulay per ogni ideale massimale $\mathfrak{m} \subseteq A$.*

Dimostrazione. Sia A di Cohen-Macaulay e sia $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideale primo. Allora, detto $m_{\mathfrak{p}}$ l'ideale massimale di $A_{\mathfrak{p}}$,

$$\dim((A_{\mathfrak{p}})_{m_{\mathfrak{p}}}) = \dim(A_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{depth}(\mathfrak{p}, A) \leq \operatorname{depth}(m_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}) \leq \dim((A_{\mathfrak{p}})_{m_{\mathfrak{p}}})$$

Quindi $A_{\mathfrak{p}}$ è di Cohen-Macaulay. La (3) segue automaticamente. Supponiamo infine che le localizzazioni $A_{\mathfrak{m}}$ siano di Cohen-Macaulay per ogni idelae massimale $\mathfrak{m} \subseteq A$. Allora

$$\operatorname{depth}(m_{\mathfrak{m}}, A_{\mathfrak{m}}) = \operatorname{depth}(\mathfrak{m}, A)$$

Essendo anche $\dim((A_{\mathfrak{m}})_{m_{\mathfrak{m}}}) = \dim(A_{\mathfrak{m}})$, si è dimostrato che A è di Cohen-Macaulay. □

Il seguente risultato fornisce una particolare caratterizzazione degli anelli di Cohen-Macaulay; la dimostrazione non è banale e si può trovare in [9], assieme ad ulteriori dettagli sull'argomento.

Proposizione 1.4. *Un anello A è di Cohen-Macaulay se e solo se $A[x]$ è di Cohen-Macaulay.*

1.3. Lunghezza di moduli.

Siano A un anello e e M un A-modulo. Una catena di sottomoduli di M della forma

$$N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots \subsetneq N_r$$

è detta avere *lunghezza r*.

Definizione 1.4. Sia A un anello e sia M un A-modulo. La *lunghezza* di M è definita come l'estremo superiore $\operatorname{lungh}(M)$ delle lunghezze delle catene di sottomoduli in M.

La lunghezza è una misura della dimensione di M analoga alla dimensione di Krull per gli anelli. Tuttavia, non è equivalente alla dimensione di Krull di un modulo introdotta nella sezione precedente. Infatti, se $M = k^n$ è uno spazio vettoriale, allora

$$\dim_k(M) = \dim(k/\operatorname{Ann}_k(M)) = \dim(k) = 0$$

che è in generale diversa da $\operatorname{lungh}(M) = n$.

I seguenti risultati caratterizzano anelli e moduli di lunghezza finita. Si osservi che ogni anello artiniano è noetheriano, ma esistono moduli artiniani che non sono noetheriani.

Proposizione 1.5. *Sia A un anello. Allora sono equivalenti:*

(1) *A è noetheriano e tutti i primi di A sono massimali;*
(2) *A ha lunghezza finita come A-modulo;*

(3) *A è artiniano.*

Se inoltre una delle precedenti condizioni è soddisfatta, A è semilocale (cioè ha un numero finito di ideali massimali).

Questa proposizione permette di ottenere anche un interessante risultato geometrico che caratterizza le varietà zero-dimensionali.

COROLLARIO 1.2. *Sia X un insieme algebrico su un campo algebricamente chiuso k. Allora sono equivalenti:*

(1) *X è finito;*
(2) *l'anello delle coordinate $A(X)$ è un k-spazio vettoriale di dimensione finita, esattamente pari alla cardinalità di X;*
(3) *$A(X)$ è artiniano.*

Il risultato seguente, oltre a caratterizzare i moduli di lunghezza finita su anelli noetheriani, stabilisce anche un importante legame fra lunghezza e dimensione di Krull.

TEOREMA 1.3. *Sia A un anello noetheriano e sia M un A-modulo finitamente generato. Allora sono equivalenti:*

(1) *M ha lunghezza finita;*
(2) $\dim_A(M) = 0$*;*
(3) *ogni primo che contiene* $\mathrm{Ann}_A(M)$ *è massimale;*
(4) $A/\mathrm{Ann}_A(M)$ *è un anello artiniano.*

I dettagli delle considerazioni fatte in questa sezione e le dimostrazioni dei relativi risultati si possono trovare consultando [9].

CAPITOLO 2

Fasci, divisori e fibrati vettoriali.

In questo capitolo richiamiamo alcuni fatti base di geometria algebrica, con il principale scopo di fissare le notazioni e la terminologia da utilizzare nei capitoli successivi.

Ricordiamo che uno schema X si dice *noetheriano* se esiste un ricoprimento affine finito $\{\mathrm{Spec}(A_i)\}_{i=1}^n$ tale che gli A_i siano anelli noetheriani. Per evitare casi patologici, a meno di indicare diversamente, assumeremo sempre che ogni schema studiato X sia *separato*, vale a dire tale che la mappa diagonale $X \longrightarrow X \times X$ sia un'immersione chiusa. Per maggiori dettagli sulla teoria degli schemi, si vedano [11, 12, 18].

2.1. Fasci localmente liberi.

Sia $X = (X, \mathscr{O}_X)$ uno schema e sia $\mathscr{F}$ un fascio algebrico su X. Ricordiamo le seguenti definizioni.

(F1) $\mathscr{F}$ si dice *quasi-coerente* se esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di X tale che gli U_i siano aperti affini in X e $\mathscr{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M_i}$ per qualche $\mathscr{O}_X(U_i)$-modulo M_i;

(F2) se X è uno schema noetheriano, $\mathscr{F}$ si dice *coerente* se è quasi-coerente e gli M_i sono finitamente generati.

Le definizioni **(F1)** e **(F2)** possono essere espresse in una forma equivalente che non richieda la noetherianità di X; poiché noi prenderemo in considerazione esclusivamente fasci su schemi noetheriani, non avremo bisogno di tale generalità.

Nella vasta teoria dei fasci algebrici coerenti, spicca per importanza il seguente risultato.

Teorema 2.1. (Serre) *Siano k un campo, X un k-schema proiettivo e $\mathscr{F}$ un fascio algebrico coerente su X. Allora*

(1) *$H^p(X, \mathscr{F})$ è un k-spazio vettoriale finitamente generato per ogni $p \geq 0$;*
(2) *esiste un intero $n_0 > 0$ tale che $H^p(X, \mathscr{F}(n)) = 0$ per ogni $p > 0$ e per ogni $n \geq n_0$.*

Dimostrazione. Si vedano [11, 12, 18]. □

Ricordiamo la seguente definizione.

Definizione 2.1. Siano X uno schema (noetheriano) e $\mathscr{F}$ un fascio algebrico su X. Si dice che $\mathscr{F}$ è *localmente libero* se esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ di X tale che

$$\mathscr{F}|_{U_i} \simeq \bigoplus_{i\in\Lambda} \mathscr{O}_{U_i}$$

Osservazione 2.1. I fasci localmente liberi sono automaticamente quasi-coerenti; se in più Λ è un insieme finito, allora sono anche coerenti. Se X è connesso come spazio topologico e Λ è un insieme finito, ha senso parlare di *rango* di un fascio localmente libero: si tratta dell'intero $r > 0$ tale che $\mathscr{F}|_{U_i} \simeq \mathscr{O}_{U_i}^r$. Nel caso coerente, dunque, i fasci localmente liberi hanno un rango ben definito.

Proposizione 2.1. *Un fascio algebrico coerente $\mathscr{F}$ su uno schema X è localmente libero se e solo se $\mathscr{F}_p$ è un $\mathscr{O}_{X,p}$-modulo libero per ogni $p \in X$.*

Dimostrazione. Se $\mathscr{F}$ è localmente libero, allora esiste un opportuno ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I}$ di X che induce isomorfismi $\mathscr{F}|_{U_i} \simeq \mathscr{O}_{U_i}^r$. Ma allora sono naturalmente indotti degli isomorfismi $\mathscr{F}_p \simeq (\mathscr{O}_{X,p})^r$.

Viceversa, supponiamo che $\mathscr{F}$ abbia spighe libere. Limitiamoci ad un aperto affine $U = \operatorname{Spec}(A) \subseteq X$, con A anello noetheriano, in cui $\mathscr{F}|_U \simeq \widetilde{M}$. Ora, $\widetilde{M}$ è localmente libero se e solo se M è un A-modulo proiettivo, il che vale se e solo se $M_\mathfrak{p}$ è un $A_\mathfrak{p}$-modulo libero per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Se $p \in \operatorname{Spec}(A)$ è il punto corrispondente al primo $\mathfrak{p}$, allora $\mathscr{O}_{X,p} \simeq A_\mathfrak{p}$ e $\mathscr{F}_p \simeq M_\mathfrak{p}$ e questo conclude la dimostrazione. □

Tra i fasci localmente liberi di rango finito, rivestono importanza particolare quell di rango unitario.

Definizione 2.2. Un fascio algebrico $\mathscr{F}$ su X si dice *invertibile* se è localmente libero di rango 1.

È possibile riunire le classi d'isomorfismo di fasci invertibili in un gruppo abeliano $\operatorname{Pic}(X)$, detto *gruppo di Picard*, con l'operazione di prodotto tensoriale. Nel caso particolare di k-schemi integri di tipo finito (cioè, essenzialmente, varietà algebriche su un campo k), una descrizione equivalente del gruppo di Picard e dei fasci invertibili si può ricavare a partire dalla teoria dei divisori di Cartier.

2.2. Divisori e sistemi lineari.

Sia X uno schema noetheriano, integro e regolare in codimensione 1.

Definizione 2.3. Un *divisore primo* di X è un sottoschema chiuso e integro di codimensione 1 in X. Un *divisore di Weil* è un elemento del gruppo abeliano libero $\mathbb{Z}$-generato dall'insieme dei divisori primi su X. Chiamiamo $\operatorname{Div}(X)$ il gruppo dei divisori di Weil.

Più esplicitamente, un divisore di Weil $D \in \mathrm{Div}(X)$ si rappresenta come

$$D := \sum_j n_j Y_j$$

dove $n_j \in \mathbb{Z}$, gli Y_j sono divisori primi di X e la somma è finita. Quando $n_j \geq 0$ per ogni j, il divisore D si dice *effettivo*.

Sia ora $K := \mathrm{Quot}(\mathscr{O}_{X,\eta})$ il campo delle funzioni razionali di X. Si può dimostrare che, per ogni funzione razionale non nulla $f \in K^* := K \backslash \{0\}$, è ben posto il divisore

$$(f) := \sum_Y \nu_Y(f) Y$$

dove $\nu_Y : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ è la valutazione discreta associata a $\mathscr{O}_{Y,\eta}$ (che è un dominio di valutazione discreta per via delle ipotesi fatte su X) e Y varia fra tutti i divisori primi. I divisori di questa forma si chiamano *divisori principali* e si raccolgono in un sottogruppo $\mathrm{Prin}(X)$.

Definizione 2.4. Due divisori D, D' si dicono *linearmente equivalenti* se $D - D' \in \mathrm{Prin}(X)$. Il gruppo quoziente $\mathrm{Cl(X)} := \mathrm{Div}(X)/\mathrm{Prin}(X)$ è detto *gruppo delle classi* di X.

Il seguente risultato introduce il concetto di *grado*.

Teorema 2.2. *Siano k un campo e $\mathbf{P}^r := \mathbf{P}^r_k$ lo spazio proiettivo (schematico). Sia $D = \sum n_j Y_j \in \mathrm{Div}(\mathbf{P}^r)$ un generico divisore, dove $Y_j = V(f_j^{m_j})$ è una ipersuperficie proiettiva di grado m_j e poniamo*

$$\deg(D) := \sum_j n_j m_j$$

Sia H un iperpiano di $\mathbf{P}^r$.

(1) *Se D ha grado d, allora D è linearmente equivalente a $d \cdot H$.*
(2) *Per ogni $f \in K^*$ si ha $\deg(f) = 0$.*
(3) *Il morfismo $\deg : \mathrm{Div}(\mathbf{P}^r) \longrightarrow \mathbb{Z}$ induce un isomorfismo $\mathrm{Cl}(\mathbf{P}^r) \simeq \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. [18, 24]. □

Le considerazioni fatte fino ad ora valgono, tuttavia, sotto ipotesi molto restrittive; esiste però un modo per estendere la nozione di divisore a schemi generici.

Ricordiamo la costruzione del *fascio delle funzioni razionali*. Sia X uno schema e sia $U = \mathrm{Spec}(A_U)$ un suo aperto affine. Sia S_U la parte moltiplicativa degli elementi di A_U che non sono divisori dello zero e sia $K_U := S_U^{-1} A_U$ l'anello totale delle frazioni di A_U. Allora, per ogni aperto affine $U = \mathrm{Spec}(A_U)$, l'assegnazione

$$U \mapsto S_U^{-1} A_U$$

definisce un prefascio di anelli su X, il cui fascio associato $\mathscr{K}$ è appunto il fascio delle funzioni razionali di X. Si osservi che quando X è integro,

$\mathscr{K}$ è il fascio costante che ad ogni aperto U associa il campo delle funzioni razionali $K = \mathrm{Quot}(\mathscr{O}_{X,\eta})$, dove $\eta \in X$ è il punto generico.

Osservazione 2.2. Chiameremo $\mathscr{K}^*$ e $\mathscr{O}_X^*$ rispettivamente i fasci delle funzioni razionali e regolari che non sono nulle su X; è evidente osservare che $\mathscr{O}_X^*$ si include in $\mathscr{K}^*$ come fascio.

Definizione 2.5. Un *divisore di Cartier* su X è una sezione globale del fascio $\mathscr{K}^*/\mathscr{O}_X^*$.

Per esplicitare la definizione, si consideri la seguente successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X^* \longrightarrow \mathscr{K}^* \longrightarrow \mathscr{K}^*/\mathscr{O}_X^* \longrightarrow 0 \tag{2.2.1}$$

Una sezione globale $D \in \Gamma(X, \mathscr{K}^*/\mathscr{O}_X^*)$ è rappresentata dunque dal dato di un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di X e da una collezione di funzioni razionali $f_i \in \mathscr{K}^*(U_i)$ per ogni $i \in I$, in maniera che $f_i f_j^{-1} \in \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ per ogni coppia di indici $i, j \in I$. Per brevità, scriveremo $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ per indicare una tale rappresentazione di un divisore di Cartier.

Definizione 2.6. Un divisore di Cartier D si dice *principale* se appartiene all'immagine della mappa naturale $\mathscr{K}^*(X) \longrightarrow \mathscr{K}^*/\mathscr{O}_X^*(X)$, ovvero se esiste $f \in \mathscr{K}^*(X)$ tale che D sia rappresentato dal sistema $\{(X, f)\} =: (X, f)$.

Chiamiamo $\mathrm{Cart}(X)$ il gruppo dei divisori di Cartier: si osservi che, nonostante $\Gamma(X, \mathscr{K}^*/\mathscr{O}_X^*)$ sia un gruppo moltiplicativo, scriveremo i divisori in notazione additiva per similitudine con i divisori di Weil. Il gruppo dei divisori principali è un sottogruppo di $\mathrm{Cart}(X)$ che denoteremo con $\mathrm{Pr}(X)$.

Definizione 2.7. Due divisori D_1, D_2 si dicono *linearmente equivalenti* se $D_1 - D_2 \in \mathrm{Pr}(X)$.

Il seguente teorema stabilisce il legame fra divisori di Cartier e divisori di Weil.

Teorema 2.3. *Sia X uno schema integro, separato, noetheriano e localmente fattoriale (ossia, tutti gli anelli locali di X sono domini a fattorizzazione unica). Allora* $\mathrm{Div}(X) \simeq \mathrm{Cart}(X)$*. Inoltre, tale isomorfismo manda divisori principali in divisori principali.*

Dimostrazione. Si veda [18]. □

Nelle ipotesi del Teorema 2.3, l'isomorfismo passa al quoziente ed induce quindi $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathrm{Cart}(X)/\mathrm{Pr}(X)$. Quest'ultimo gruppo quoziente contiene i divisori di Cartier a meno di equivalenza lineare, ma si può interpretare anche come gruppo di classi d'isomorfismo di fasci invertibili. Si può dimostrare, infatti, che

$$\mathrm{Pic}(X) \simeq H^1(X, \mathscr{O}_X)$$

e quindi dalla successione esatta (2.2.1) si trova $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathrm{Cart}(X)/\mathrm{Pr}(X)$. L'isomorfismo può essere reso esplicitamente, almeno nel caso integro. Supponiamo che $D = \{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$ sia un divisore di Cartier su uno schema integro X. Allora esso definisce un sistema di funzioni di transizione, ponendo

$$\varphi_{ij} = f_i f_j^{-1}$$

(ossia, la moltiplicazione per tale elemento di $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathscr{O}_X^*)$). Infatti si può vedere che $\varphi_{ii} = 1$ e

$$\varphi_{ik} = f_i f_k^{-1} = f_i f_j^{-1} f_j f_k^{-1} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}$$

nell'aperto $U_i \cap U_j \cap U_k$. Viene quindi definito un unico fascio $\mathscr{O}_X(D)$ che è invertibile: per ogni $i \in I$ l'isomorfismo φ_i è la moltiplicazione per f_i e si può scrivere esplicitamente

$$\Gamma(U_i, \mathscr{O}_X(D)) = f_i^{-1} \cdot \Gamma(U_i, \mathscr{O}_X)$$

infatti se $\sigma_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{O}_X(D))$ e $\sigma_j \in \Gamma(U_j, \mathscr{O}_X(D))$, allora $\varphi_i(\sigma_i) = f_i \sigma_i$ e $\varphi_j(\sigma_j) = f_j \sigma_j$. In particolare $\sigma_j = f_i f_j^{-1} \sigma_i = \varphi_{ij}(\sigma_i)$. Alla luce di quanto dimostrato, adotteremo spesso il linguaggio dei divisori anche quando sono coinvolti fasci invertibli.

Direttamente dalla geometria algebrica classica provengono i concetti di *divisore effettivo* e di *sistema* (o *serie*) *lineare.*

Definizione 2.8. Un divisore di Cartier D su un k-schema X è detto *effettivo* se esiste un rappresentante $\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$ tale che $f_i \in \mathscr{O}_X^*(U_i)$.

Si può dimostrare che l'insieme dei divisori effettivi appartenenti alla medesima classe di equivalenza lineare $[\mathscr{L}]$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\Gamma(X, \mathscr{L})^*/k^*$ ed ha quindi la struttura di uno spazio proiettivo. Questo fatto motiva la seguente definizione.

Definizione 2.9. Un *sistema lineare* (detto anche *serie lineare*) *completo* $\mathfrak{L}$ su X è l'insieme di tutti i divisori associati alle sezioni in $\Gamma(X, \mathscr{L}) \setminus \{0\}$, per qualche fascio invertibile $\mathscr{L}$ su X. Un *sistema lineare* $|V|$ è in generale un sottospazio vettoriale di un sistema lineare completo.

Ad un divisore effettivo $D = \{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$ su X è possibile associare un sottoschema chiuso di X, detto *sottoschema associato a* D, definito a partire dal suo fascio di ideali $\mathscr{I}_D$: basta infatti porre

$$\Gamma(U_i, \mathscr{I}_D) := f_i \cdot \Gamma(U_i, \mathscr{O}_X)$$

In altre parole, è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra divisori effettivi di Cartier e fasci di ideali su X che siano localmente principali (cioè localmente generati da un solo elemento). In senso più geometrico, un divisore effettivo è dunque in corrispondenza con un sottoschema chiuso di codimensione 1 e localmente principale, cioè localmente definito da una singola equazione.

Definizione 2.10. Un fascio $\mathscr{F}$ di $\mathscr{O}_X$-moduli si dice *generato* in un punto $x \in X$ se esiste una famiglia di sezioni $\{s_i\}_{i\in I} \subseteq \Gamma(X, \mathscr{F})$ tali che i germi $(s_i)_x$ generano la spiga $\mathscr{F}_x$. Si dice che $\mathscr{F}$ è *globalmente generato* se è generato in ogni punto di X.

Nel caso speciale in cui $\mathscr{F}$ è un fascio invertibile, la definizione è equivalente a chiedere che esista una sezione $\sigma \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ tale che $\sigma(x) \neq 0$. In generale, ogni fascio quasi-coerente è globalmente generato.

In particolare, il fascio $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r_k}(1)$ delle *forme lineari* su $\mathbf{P}^r_k$ è globalmente generato: basta considerare coordinate omogenee $X_0, \dots, X_r$ come sezioni globali di $\Gamma(X, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1)) = k[X_0, \dots, X_r]_{\mathrm{h},1}$. Chiaramente, per ogni $x \in \mathbf{P}^r_k$ esiste un $j \in \{0, \dots, r\}$ tale che $X_j(x) \neq 0$.

La generazione globale del fascio delle forme lineari permette di esprimere in modo molto conveniente la classe dei morfismi $f : X \longrightarrow \mathbf{P}^r_k$, con X una k-varietà su campo algebricamente chiuso. Sia $\mathscr{L} := f^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ e siano $\sigma_i := f^*X_i$ per $i = 0, \dots, r$. Allora $\mathscr{L}$ è globalmente generato dalle sezioni $\sigma_0, \dots, \sigma_r$: infatti per ogni $x \in X$ esiste $j \in \{0, \dots, r\}$ tale che $X_j(f(x)) \neq 0$, cioè $\sigma_j(x) = f^*X_j(x) \neq 0$. Affermiamo che il morfismo f è univocamente determinato dalla coppia $(\mathscr{L}, \{\sigma_0, \dots, \sigma_r\})$. Se infatti $\mathscr{L}$ è un fascio invertibile globalmente generato dalle sezioni globali $s_0, \dots, s_r$ su X, allora l'assegnazione

$$f(x) := [s_0(x) : \ldots : s_r(x)]$$

definisce un morfismo $f : X \longrightarrow \mathbf{P}^r_k$. Si osservi che f è *non degenere* (cioè $f(X)$ non è contenuta in un iperpiano) se e solo se le s_j sono linearmente indipendenti.

Il linguaggio dei sistemi lineari permette di esprimere questi concetti in modo intrinseco, senza far uso di coordinate proiettive. Sia $f : X \longrightarrow \mathbf{P}^r$ un morfismo con immagine non degenere; allora sappiamo che esso è univocamente determinato dal fascio invertibile $\mathscr{L} = f^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1)$ e dalle sezioni globali $\sigma_i = f^*X_i$ per $i = 0, \dots, r$. La mappa lineare f^* sulle sezioni globali porta ogni polinomio omogeneo $H = a_0X_0 + \ldots + a_rX_r$ nella sezione $f^*H = a_0\sigma_0 + \ldots + a_r\sigma_r$; in altre parole, f^* stabilisce una mappa dal sistema lineare $|\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1)|$ in $|V|$, dove $V = \mathrm{im}(f^*)$. Il sottospazio V si identifica a $\Gamma(\mathbf{P}^r, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1))$, quindi $\mathbf{P}^r$ si identifica con lo spazio proiettivo duale $\mathbf{P}(V^\vee) = \Gamma(\mathbf{P}^r, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1))^\vee$. Ci si aspetta allora di poter interpretare f come morfismo a valori in $\mathbf{P}(V^\vee)$: infatti, basta porre

$$f(x) := H_x = \{\sigma \in V \mid \sigma(x) = 0\}$$

e si capisce che H_x è un iperpiano, cioè un elemento di $\mathbf{P}(V^\vee)$. Infatti basta osservare che il morfismo $V \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{L} \otimes \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x)$ che opera assegnando $\sigma \mapsto \sigma \otimes \sigma(x)$ ha per nucleo H_x. L'importanza di questa formulazione risiede nell'aver perso ogni dipendenza estrinseca nella descrizione di f.

2.3. Fibrati vettoriali.

Il linguaggio dei fasci localmente liberi ha un corrispondente oggetto geometrico nella struttura di *fibrato vettoriale*. Sia X un k-schema, con k campo fissato. Nel seguito ogni prodotto fibrato è da indendersi preso su $\mathrm{Spec}(k)$. In tal modo, si pone

$$\mathbf{A}^r_X := X \times \mathbf{A}^r_k$$

e si chiamano $\mathrm{pr}_X : \mathbf{A}^r_X \longrightarrow X$ e $\mathrm{pr}_{\mathbf{A}^r_k} : \mathbf{A}^r_X \longrightarrow \mathbf{A}^r_k$ le due proiezioni.

Definizione 2.11. Una coppia (E, p) formata da un k-schema E ed un morfismo $p : E \longrightarrow X$ è detta *fibrato vettoriale* di rango r se esiste un ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X tale che gli U_i siano aperti affini e

(1) per ogni $U_i \in \mathfrak{U}$ esiste un isomorfismo $\psi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow \mathbf{A}^r_{U_i}$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}^r_{U_i} \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{U_i}"'] & p^{-1}(U_i) \arrow[l, "\psi_i"'] \arrow[d] & E \arrow[l] \arrow[d, "p"] \\
& U_i & X \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

cioè $\mathrm{pr}_{U_i} \circ \psi_i = p|_{p^{-1}(U_i)}$;

(2) per ogni $i, j \in I$, la mappa $\psi_{ij} = \psi_i \circ \psi_j^{-1} : \mathbf{A}^r_{U_i \cap U_j} \longrightarrow \mathbf{A}^r_{U_i \cap U_j}$ è lineare sulle fibre. Ossia, scrivendo $\mathbf{A}^r_{U_i \cap U_j} = \mathrm{Spec}(A[x_1, \ldots, x_n])$, il morfismo ψ_{ij} è definito da un automorfismo A-lineare di $A[x_1, \ldots, x_n]$.

Gli aperti del ricoprimento $\mathfrak{U}$ si chiamano *aperti banalizzanti*.

Definizione 2.12. Siano (E, p) e (F, q) due fibrati vettoriali. Un *isomorfismo* di fibrati è il dato di un isomorfismo di schemi $g : E \longrightarrow F$ tale che $p = q \circ g$.

Per ogni morfismo di schemi $f : X \longrightarrow Y$, una *sezione* di f sopra un aperto $U \subseteq Y$ è un morfismo $s : U \longrightarrow X$ con la proprietà che $f \circ s = 1_U$. Non è difficile immaginare che assegnando per ogni $U \subseteq Y$ l'insieme $\mathscr{S}_f(U)$ formato dalle sezioni di f sopra U si definisce un prefascio di insiemi su Y. Inoltre, se $\{U_j\}_{j \in I}$ è un ricoprimento aperto di Y e $s_j \in \mathscr{S}_f(U_j)$ per ogni $j \in I$ sono sezioni con la proprietà

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$$

allora si può definire $s : Y \longrightarrow X$ mediante $s(p) = s_i(p)$ se $p \in U_i$. Il morfismo è ben definito grazie alla proprietà di incollamento ed è una sezione di f sopra Y: infatti se $p \in U_i$ per qualche $i \in I$ si ha

$$f(s(p)) = f(s_i(p)) = p$$

che è la tesi. Quindi $\mathscr{S}_f$ è un fascio d'insiemi su Y.

In particolare, se (E, p) è un fibrato vettoriale su X di rango n, chiamiamo $\mathscr{S}_E$ il fascio delle sezioni di p sopra gli aperti di X. Si dimostra che $\mathscr{S}_E$ ha una naturale struttura di $\mathscr{O}_X$-modulo e, in più, che è un fascio localmente libero di rango n. Ricordiamo, per provare quanto affermato, il seguente risultato generale:

TEOREMA 2.4. *Siano* $(X, \mathscr{O}_X)$ *uno schema e* $Y = \mathrm{Spec}(A)$ *uno schema affine. Allora l'applicazione naturale*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{AComm}}(A, \mathscr{O}_X(X)) \\ (f, f^\sharp) &\mapsto f^\sharp_Y \end{aligned}$$

è biiettiva.

DIMOSTRAZIONE. Si veda [12]. □

Ora, osserviamo che per definire la struttura di modulo di $\mathscr{S}_E$ è sufficiente definirlo su un aperto affine $U \subseteq X$ banalizzante, cioè tale che $p^{-1}(U) \simeq \mathbf{A}^r_U$. Supponiamo dunque che $X = \mathrm{Spec}(A)$ e $E = \mathbf{A}^r_Y$. Allora una sezione $E \longrightarrow A$, per il Teorema 2.4, corrisponde ad un morfismo di A-algebre $A[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \mathscr{O}_X(X) = A$. In altre parole,

$$\mathscr{S}_E(\mathrm{Spec}(A)) = \mathrm{Hom}_A(A[x_1, \dots, x_1], A)$$

che ha una naturale struttura di A-modulo. In generale, la struttura di $\mathscr{S}_E$ come $\mathscr{O}_X$-modulo si può ricostruire da un ricoprimento affine fatto da aperti banalizzanti. Inoltre, si osservi che $\mathscr{S}_E$ è localmente libero e di rango n: preso il medesimo ricoprimento affine fatto da aperti banalizzandi $\{U_j\}_{j\in I}$, sia $j \in I$ fissato e si considerino le seguenti sezioni

$$\begin{aligned} \varepsilon_i : U_j &\longrightarrow \mathbf{A}^n_{U_j} \\ p &\mapsto (p, e_i) \end{aligned}$$

dove e_i è il punto corrispondente alla coordinata i-esima. È evidente che ogni altra sezione $s : U_j \longrightarrow \mathbf{A}^n_{U_j}$ si può decomporre come

$$s = a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n$$

Si determina quindi un isomorfismo $\mathscr{S}_E(U_j) \simeq \mathscr{O}_X(U_j)^n$ mediante $s \mapsto (a_1, \dots, a_n)$.

TEOREMA 2.5. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra fibrati vettoriali e fasci localmente liberi.*

DIMOSTRAZIONE. Si consideri un fibrato vettoriale (E, p); allora esiste un ricoprimento affine $\{U_i\}_{i\in I}$ di X tale che $p^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbf{A}^r_k \simeq U_i \times k^n$ in modo che il diagramma

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_{ij}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "="] & U_j \times k^n \\ p^{-1}(U_{ij}) \arrow[r, "\simeq"] & U_j \times k^n \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

sia completato da un isomorfismo ψ lineare sulla fibra (cioè su k^n). Quindi assegnare un fibrato (E, p) equivale ad assegnare un sistema $\{(U_i)_{i\in I}, (\psi_{ij})\}$ formato da un ricoprimento aperto di X e da isomorfismi lineari ψ_{ij}. Ma allora questa assegnazione definisce un fascio localmente libero di rango n. Viceversa, è evidente la corrispondenza. $\square$

Nel seguito, non faremo alcuna distinzione fra la nozione di fibrato e quella di fascio localmente libero; anche quando utilizzeremo il termine "fibrato", che storicamente è il primo ad essere stato introdotto, i metodi richiameranno essenzialmente la struttura di fascio localmente libero.

I dettagli delle costruzioni fatte in questa sezione si possono trovare in [23], assieme ad una trattazione molto approfondita delle proprietà algebriche e topologiche dei fibrati vettoriali.

CAPITOLO 3

Differenziali.

In questo capitolo introduciamo gli strumenti del calcolo differenziale, formalizzato su anelli e moduli e su fasci. Per una trattazione più esaustiva, si vedano [18, 19]; le dimostrazioni dei risultati citati sono in [20].

3.1. Differenziali di Kähler.

Siano A un anello (commutativo ed unitario) e siano B una A-algebra e M un B-modulo.

Definizione 3.1. Una *A-derivazione* di B in M è una mappa additiva $d : B \longrightarrow M$ tale che

$$d(\beta_1\beta_2) = \beta_1 d(\beta_2) + \beta_2 d(\beta_1), \quad d(a\beta) = ad(\beta)$$

per ogni $\beta, \beta_1, \beta_2 \in B$ e $a \in A$.

Le A-derivazioni formano un B-modulo $\mathrm{Der}_A(B, M)$.

Definizione 3.2. Definiamo il *modulo delle forme differenziali relative* di B su A come il B-modulo $\Omega_{B/A}$ dotato di una A-derivazione $d : B \longrightarrow \Omega_{B/A}$ in modo che sia soddisfatta la seguente proprietà universale: per ogni B-modulo M e per ogni A-derivazione $\delta : B \longrightarrow M$ esiste un'unico morfismo di B-moduli $f : \Omega_{B/A} \longrightarrow M$ tale che $\delta = f \circ d$.

In termini categorici, la proprietà universale mostra che

$$\mathrm{Der}_A(B, M) \simeq \hom_A(\Omega_{B/A}, M)$$

cioè che il funtore $\mathrm{Der}_A(B, -) : \mathbf{Mod}_B \longrightarrow \mathbf{Mod}_B$ è rappresentato dall'oggetto $\Omega_{B/A}$,

Un modo esplicito per costruire $\Omega_{B/A}$ è quello di considerare il B-modulo libero F generato dall'insieme dei simboli $\{\mathrm{d}\beta \mid \beta \in B\}$ e quozientarlo sul sottomodulo generato dagli elementi della forma

$$\begin{gathered} \mathrm{d}(\beta_1 + \beta_2) - \mathrm{d}\beta_1 - \mathrm{d}\beta_2, \\ \mathrm{d}(\beta_1\beta_2) - \beta_1\mathrm{d}(\beta_2) - \beta_1\mathrm{d}(\beta_1), \\ \mathrm{d}(a\beta) - a\,\mathrm{d}(\beta) \end{gathered}$$

al variare di $\beta, \beta_1, \beta_2 \in B$ e $a \in A$. In questo modo la derivazione $d : B \longrightarrow \Omega_{B/A}$ è ottenuta ponendo $b \mapsto \mathrm{d}b$ per ogni $b \in B$. Inoltre, si vede che in questa costruzione $\Omega_{B/A}$ è generato dall'insieme $\{\mathrm{d}\beta \mid \beta \in B\}$ come B-modulo.

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia B una A-algebra, sia $f : B \otimes_A B \longrightarrow B$ il morfismo diagonale $\beta \otimes \beta' \mapsto \beta\beta'$ e sia $I = \ker f$. Consideriamo $B \otimes_A B$ dotato della struttura di B-modulo indotta dalla moltiplicazione a sinistra. Allora I/I^2 ha una struttura naturale di B-modulo. Definiamo la mappa $D : B \longrightarrow I/I^2$ mediante*

$$D\beta := (\beta \otimes 1 - 1 \otimes \beta) + I^2$$

Allora la coppia $(I/I^2, D)$ è un modulo di forme differenziali relative per B su A.

PROPOSIZIONE 3.2. *Se A' e B sono due A-algebre, sia $C = B \otimes_A A'$. Allora $\Omega_{C/A'} \simeq \Omega_{B/A} \otimes_B C$. Inoltre, se $S \subseteq B$ è un sistema moltiplicativamente chiuso, allora $\Omega_{S^{-1}B/A} \simeq S^{-1}\Omega_{B/A}$.*

ESEMPIO 3.1. Sia $B = A[X_1, \ldots, X_n]$ un anello di polinomi. Allora $\Omega_{B/A}$ è il gruppo libero di rango n che ha per base i $\{\mathrm{d}X_1, \ldots, \mathrm{d}X_n\}$. Infatti, siano $P_1, \ldots, P_n \in B$ tali che

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \,\mathrm{d}X_i = 0$$

e sia $\partial_j \in \mathrm{Der}_A(B, B)$ la canonica derivata formale per un arbitrario j. Allora poiché $\mathrm{Der}_A(B, B) \simeq \hom_A(\Omega_{B/A}, B)$ esiste un morfismo di B-moduli $f : \Omega_{B/A} \longrightarrow B$ tale che $f(\mathrm{d}X_j) = \partial_j$. Ma allora

$$0 = f\left(\sum_{i=1}^{n} P_i \mathrm{d}X_i\right) = P_j$$

Data l'arbtrarietà di j segue che i $\mathrm{d}X_i$ sono una base per $\Omega_{B/A}$.

PROPOSIZIONE 3.3. (PRIMA SUCCESSIONE ESATTA) *Siano $A \longrightarrow B$ e $B \longrightarrow C$ due morfismi di anelli. Allora esiste una successione esatta naturale di C-moduli*

$$\Omega_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega_{C/A} \longrightarrow \Omega_{C/B} \longrightarrow 0$$

PROPOSIZIONE 3.4. (SECONDA SUCCESSIONE ESATTA) *Siano B una A-algebra, I un ideale di B e $C = B/I$. Allora esiste una successione esatta naturale di C-moduli*

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega_{C/A} \longrightarrow 0$$

dove per ogni $b \in I$ si pone $\delta(b + I^2) = (\mathrm{d}b) \otimes 1$.

COROLLARIO 3.1. *Se B è una A-algebra finitamente generata, oppure è localizzazione di una A-algebra finitamente generata, anche $\Omega_{B/A}$ è un B-modulo finitamnte generato.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $B = A[X_1, \ldots, X_n]/I$. Allora la seconda successione fondamentale mostra che, detto $P = A[X_1, \ldots, X_n]$ si ha

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{P/A} \otimes_P B \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0$$

Ma $\Omega_{P/A}$ è finitamente generato e B ugualmente, quindi ogni quoziente di $\Omega_{P/A} \otimes_P B$ è ancora finitamente B-generato. In particolare, $\Omega_{B/A} \simeq \Omega_{P/A} \otimes_P B/\mathrm{im}(\delta)$ è finitamente B-generato. □

3.2. Differenziali su estensioni di campi.

Limitiamoci adesso a considerare i moduli di differenziali che provengono da estensioni di campi e anelli locali. Ricordiamo che un'estensione di campo K/k si dice *separabilmente generata* se esiste una base di trascendenza $\{x_i\}$ per K su k in modo che K sia un'estensione separabile di $k(\{x_i\})$. Ricordiamo che un'estensione trascendente K/k ammette una base di trascendenza $\{x_i\}$ se e solo se gli x_i sono algebricamente indipendenti su k e K è un'estensione algebrica di $k(\{x_i\})$. Si può dimostrare che ogni estensione ammette basi di trascendenza, tutte della medesima cardinalità $\mathrm{trdeg}(K/k)$, che prende il nome di *grado di trascendenza*.

TEOREMA 3.1. *Sia K/k un'estensione di campi finitamente generata. Allora $\Omega_{:K/k}$ è uno spazio vettoriale finitamente generato e*

$$\dim_K \Omega_{K/k} \geq \mathrm{trdeg}(K/k)$$

L'uguaglianza sussiste se e solo se K/k è separabilmente generata.

DIMOSTRAZIONE. Si veda [20]. Si osservi in particolare che se K/k è un'estensione algebrica finita, allora $\Omega_{K/k} = 0$ se e solo se K/k è un'estensione separabile (vale a dire che ogni polinomio su k ha radici distinte in K). □

LEMMA 3.1. *Siano A un anello noetheriano locale, k il suo campo residuo e K il suo campo dei quozienti. Se M è un A-modulo finitamente generato e se $\dim_k(M \otimes_A k) = \dim_K(M \otimes_A K) = r$, allora M è libero di rango r.*

PROPOSIZIONE 3.5. *Sia B un anello locale contenente un campo k isomorfo al suo campo residuo $B/\mathfrak{m}$. Allora la mappa $\delta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \Omega_{B/k} \otimes_B k$ definita da $\beta + \mathfrak{m}^2 \mapsto (\mathrm{d}\beta) \otimes 1$ è un isomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Usando la seconda successione esatta, il conucleo di δ è dato da $\Omega_{k/k} = 0$, quindi δ è suriettiva. Per mostrare che è iniettiva, sarà sufficiente dimostrare che la mappa duale

$$\delta^\vee : \hom_k(\Omega_{B/k} \otimes_B k, k) \longrightarrow \hom_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$$

è suriettiva. Ma sappiamo che

$$\hom_k(\Omega_{B/k} \otimes_B k, k) \simeq \hom_B(\Omega_{B/k}, k) \simeq \mathrm{Der}_k(B, k)$$

Dunque, se $d : B \longrightarrow k$ è una k-derivazione, $\delta^\vee(d)$ è il morfismo ottenuto restringendo d a $\mathfrak{m}$ ed osservando che $d(\mathfrak{m}^2) = 0$: infatti se $x, y \in \mathfrak{m}$ allora $d(xy) = xd(y) + yd(x) \in \mathfrak{m}$, quindi $d(xy) = 0 \in k \simeq B/\mathfrak{m}$. Proviamo che $\delta^\vee$ è suriettiva. Sia $h \in \hom_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$ e sia, per ogni $b \in B$, la decomposizione $b = \lambda + c$ con $\lambda \in k$ e $c \in \mathfrak{m}$. Definiamo $d : B \longrightarrow k$ come $d(b) := h(c + \mathfrak{m}^2)$. Allora d è una k-derivazione su B e $\delta^\vee(d) = h$. □

PROPOSIZIONE 3.6. *Sia B un anello locale contenente un campo k isomorfo al suo campo residuo $B/\mathfrak{m}$. Assumiamo inoltre che k sia un campo perfetto e che B sia la localizzazione di una k-algebra finitamente generata. Allora $\Omega_{B/k}$ è un B-modulo libero di rango* $\dim(B)$ *se e solo se B è un anello locale regolare.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\Omega_{B/k} \simeq B^{\dim(B)}$. Allora $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim(B)$ per la Proposizione precedente. Questo, per definizione, significa che B è un anello locale regolare. Supponiamo, viceversa, che B sia un anello locale regolare di dimensione r. Per la Proposizione 3.1 sappiamo che $\Omega_{B/k}$ è finitamente generato. Inoltre per la regolarità di B sappiamo anche che $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = r$ e per la Proposizione precedente abbiamo che $\dim_k(\Omega_{B/k} \otimes_B k) = r$. D'altra parte, sia K il campo dei quozienti di B. Allora per la formula descritta nella Proposizione 3.2 si ha che

$$\Omega_{B/k} \otimes_B K \simeq \Omega_{K/k}$$

Ma k è perfetto, quindi K/k è un'estensione separabilmente generata ([9]). Allora per il Teorema 3.1 si ha che $\dim_K(\Omega_{K/k}) = \mathrm{trdeg}(K/k) = r$ (perché la dimensione di un'algebra finitamente generata è il grado di trascendenza del suo campo dei quozienti sul campo base). Ne consegue che, essendo $\dim_k(\Omega_{B/k} \otimes_B k) = r = \dim_K(\Omega_{K/k} \otimes_B k)$, per il Lemma 3.1 si conclude dicendo che $\Omega_{B/k}$ è libero di rango r. $\square$

3.3. Fasci di differenziali.

Siano ora X, Y due schemi separati e sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo di schemi. Supponiamo che $\mathrm{Spec}(A) = U \subseteq Y$ e $\mathrm{Spec}(B) = V \subseteq X$ siano aperti affini tali che $f(V) \subseteq U$. Allora definiamo il *fascio dei differenziali relativi* di V su U come

$$\Omega_{V/U} := \widetilde{\Omega_{B/A}}$$

cioè il fascio algebrico associato al modulo dei differenziali relativi di B su A. Se chiamiamo I il nucleo del morfismo diagonale $B \otimes_A B \longrightarrow B$ allora il fascio di ideali $\mathscr{I}$ di I è il fascio di ideali della diagonale $\Delta(X)$ in $X \otimes_Y X$. In altri termini, $\Omega_{B/A} \simeq I/I^2$ e $\Omega_{V/U}$ non è altro che l'immagine inversa del fascio $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$. Diamo quindi la seguente definizione.

DEFINIZIONE 3.3. Siano X, Y schemi e $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo di schemi. Supponiamo che $\{V_i\}_{i \in I}$ e $\{U_{j(i)}\}_{i \in I}$ siano due ricoprimenti affini di X ed Y, rispettivamente, tali che $f(V_i) \subseteq U_{j(i)}$ per ogni $i \in I$. Definiamo allora il *fascio dei differenziali relativi* di X su Y come il fascio $\Omega_{X/Y}$ su X, ottenuto incollando gli schemi $\Omega_{V_i/U_{j(i)}}$ per ogni $i \in I$ lungo

$$\Omega_{V_{i_1} \cap V_{j_2}/U_{j(i_1)}} \simeq \Omega_{V_{i_1} \cap V_{i_2}/U_{j(i_2)}}$$

OSSERVAZIONE 3.1. La definzione rigorosa è tuttavia la seguente: sia $\Delta : X \longrightarrow X \times_Y X$ la diagonale; essa è un'immersione chiusa. Se chiamiamo

$\mathscr{I}$ il suo fascio di ideali, allora si definisce

$$\Omega_{X/Y} := \Delta^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)$$

Si osservi che $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ ha una struttura evidente di $\mathscr{O}_{\Delta(X)}$-modulo. Poiché Δ induce un isomorfismo su X, possiamo affermare che $\Omega_{X/Y}$ eredita una struttura di $\mathscr{O}_X$-modulo. Inoltre, $\Omega_{X/Y}$ è quasi coerente per costruzione e se Y è noetheriano e f è di tipo finito, allora $\Omega_{X/Y}$ è anche coerente.

I due risultati seguenti sono conseguenza immediate delle due successioni esatte per i moduli di differenziali.

PROPOSIZIONE 3.7. *Siano $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ due morfismi di schemi. Allora esiste una successione esatta di fasci su X*

$$f^*\Omega_{Y/Z} \longrightarrow \Omega_{X/Z} \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0$$

PROPOSIZIONE 3.8. *Siano $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo di schemi e Z un sottoschema chiuso di X con fascio di ideali $\mathscr{I}$. Allora esiste una successione esatta di fasci su Z*

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \longrightarrow \Omega_{X/Y} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z \longrightarrow \Omega_{Z/Y} \longrightarrow 0$$

ESEMPIO 3.2. Sia $X = \mathbf{A}^n_Y = \mathbf{A}^n_k \times Y$. Allora $\Omega_{X/Y}$ è semplicemente il fascio libero $\mathscr{O}^n_X$ globalmente generato dalle sezioni globali $\mathrm{d}X_1, \dots, \mathrm{d}X_n$ per $X_1, \dots, X_n$ coordinate affini di $\mathbf{A}^n_Y$.

Di particolare importanza è il seguente risultato algebrico.

TEOREMA 3.2. (SUCCESSIONE DI EULERO) *Siano A un anello, $Y = \mathrm{Spec}(A)$ e $X = \mathbf{P}^r_A$. Allora esiste una successione esatta di fasci*

$$0 \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow \mathscr{O}_X(-1)^{r+1} \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow 0$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $S = A[X_0, \dots, X_n]$ l'anello delle coordinate omogenee di X ed $E = S(-1)^{n+1}$, l'S-modulo graduato avente base $e_0, \dots, e_n$ in grado 1. Definiamo un morfismo $E \longrightarrow S$ ponendo $e_i \mapsto X_i$ e sia M il suo nucleo. Allora la successione

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow S$$

è esatta. Fascificando la successione si ottiene

$$0 \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \mathscr{O}_X(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow 0$$

Osserviamo che $E \longrightarrow S$ non è suriettiva, ma è suriettiva in grado positivo, quindi dà luogo ad un morfismo di fasci suriettivo. Rimane da provare che $\widetilde{M} \simeq \Omega_{X/Y}$. Ora, localizzando in X_i si ottiene un S-modulo M_{X_i} che surietta su S_{X_i} mediante la solita applicazione; quindi M è libero di rango n ed è generato dall'insieme $\{e_j - (X_j/X_i)e_i \mid j \neq i\}$. Ne consegue, allora, che sul ricoprimento canonico $\{U_0, \dots, U_n\}$ di X è stabilito che $\widetilde{M}(U_i)$ sia un $\mathscr{O}_X(U_i)$-modulo generato dalle sezioni $\{e_j/X_i - (X_j/X_i^2)e_i \mid j \neq i\}$.

Ricordiamo ora che $U_i \simeq \mathrm{Spec}(A[X_0/X_i, \dots, X_n/X_i])$, quindi

$$\Omega_{X/Y}(U_i) = \langle \mathrm{d}(X_0/X_i), \dots, \mathrm{d}(X_n/X_i) \rangle_{\mathscr{O}_X(U_i)}$$

poiché X non è singolare. Definiamo un morfismo $\varphi_i : \Omega_{X/Y}(U_i) \longrightarrow M^{\sim}(U_i)$ mediante

$$\varphi_i(\mathrm{d}(X_j/X_i)) = \frac{X_i e_j - X_j e_i}{X_i^2}$$

Si capisce che φ_i è un isomorfismo (manda basi in basi); inoltre, si può dimostrare che al variare di i i morfismi φ_i si incollano e danno luogo ad un isomorfismo di fasci $\varphi : \Omega_{X/Y} \longrightarrow \widetilde{M}$. Per ogni coppia di indici i, j tali che $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ si ha $X_k/X_i = (X_k/X_j)(X_j/X_i)$ per ogni k. Quindi in $\Omega_{X/Y}(U_i \cap U_j)$ avremo

$$\mathrm{d}(X_k/X_i) = (X_k/X_j)\,\mathrm{d}(X_j/X_i) + (X_j/X_i)\,\mathrm{d}(X_k/X_j)$$

Ma allora

$$\varphi_i\left(\mathrm{d}(X_k/X_i) - (X_k/X_j)\,\mathrm{d}(X_j/X_i)\right) = \frac{X_j e_k - X_k e_j}{X_i X_j}$$

e del resto

$$\varphi_j((X_j/X_i)\mathrm{d}(X_k/X_j)) = \frac{X_j}{X_i} \cdot \frac{X_j e_k - X_k e_j}{X_j^2} = \frac{X_j e_k - X_k e_j}{X_i X_j}$$

quindi $\varphi_j = \varphi_i$ su $U_i \cap U_j$. Questo prova che gli isomorfismi si incollano, concludendo la dimostrazione. $\square$

Si osservi che nel caso di k-varietà è assegnato un morfismo di schemi $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$. Il fascio dei differenziali relativi di X è quindi definito come il fascio $\Omega_{X/k} := \Omega_{X/\mathrm{Spec}(k)}$.

PROPOSIZIONE 3.9. *Sia X una k-varietà su un campo algebricamente chiuso. Allora $\Omega_{X/k}$ è localmente libero di rango $n = \dim X$ se e solo se X è non singolare.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in X$ un punto chiuso. Allora $B = \mathscr{O}_{X,x}$ ha dimensione n ed è localizzazione di una k-algebra ridotta e di tipo finito. Inoltre $(\Omega_{X/k})_x = \Omega_{B/k}$. Allora per la Proposizione 3.6 $\Omega_{B/k}$ è libero di rango n se e solo se B è un anello locale regolare, cioè se e solo se X è non singolare. Ma per la Proposizione 2.1 sappiamo che $\Omega_{X/k}$ è libero di rango n se e solo se tutte le sue spighe sono libere di rango n. Segue la tesi. $\square$

In generale, rimuovendo l'ipotesi di chiusura algebrica, si ottiene un risultato più debole.

COROLLARIO 3.2. *Se X è una k-varietà, allora esiste un aperto $U \subseteq X$ che sia non singolare.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\eta \in X$ è il punto generico, allora $K = \mathrm{Quot}(\mathscr{O}_{X,\eta})$ è un campo avente grado di trascendenza $n = \dim X$ su k ed è un'estensione finitamente generata di k. Ma allora K/k è separabilmente generata. Ne consegue, sempre per 3.6, che $\Omega_{K/k}$ è un K-spazio vettoriale di dimensione n: ma $\Omega_{K/k} = (\Omega_{X/k})_\eta$ quindi esiste un intorno aperto U di η in cui $\Omega_{X/k}|_U$

è libero di rango n per la 3.9, cioè U è non singolare. Ovviamente ogni intorno di η è denso in X. □

TEOREMA 3.3. *Sia X una k-varietà non singolare e sia Y un sottoschema chiuso ed irriducibile di X, con fascio di ideali $\mathscr{I}$. Allora Y è non singolare se e solo se*

(1) *$\Omega_{Y/k}$ è localmente libero;*
(2) *la successione*

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \longrightarrow \Omega_{X/k} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y \longrightarrow \Omega_{Y/k} \longrightarrow 0 \tag{3.3.1}$$

è esatta.

In tale situazione, $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ è localmente libero di rango $r = \dim X - \dim Y$.

DIMOSTRAZIONE. Si veda [18]. □

3.4. Fascio canonico.

Ricordiamo che, dato un A-modulo M, possiamo definire la n-esima *potenza esterna* di M nel modo seguente. Sia $T^n(M) = M \otimes_A \ldots \otimes_A M$ per n volte e sia J l'ideale di $T(M)$ formato dagli elementi $m_1 \otimes \ldots \otimes m_n$ tali che $m_i = m_j$ per qualche $1 \leq i < j \leq n$. Definiamo dunque l'A-modulo della potenza esterna come

$$\bigwedge^n M := T^n(M)/J_n$$

Ogni classe d'equivalenza di un tensore puro $m_1 \otimes \ldots \otimes m_n$ si denota come $m_1 \wedge \ldots \wedge m_n$. Per completezza si pone $\bigwedge^0 M = A$ e $\bigwedge^1 M = M$. Si vede che, se M è un modulo finitamente generato di rango m, allora $\bigwedge^n M$ è finitamente generato ed ha rango $\binom{m}{n}$. In generale, se $\mathscr{F}$ è un fascio di $\mathscr{O}_X$-moduli, si definisce $\bigwedge^n \mathscr{F}$ come il fascio associato al prefascio definito da, per ogni U,

$$\left(\bigwedge^n \mathscr{F}\right)(U) := \bigwedge^n \mathscr{F}(U)$$

Se n è il rango di $\mathscr{F}$, allora $\bigwedge^n \mathscr{F}$ è detto *determinante* di $\mathscr{F}$.

Ricordiamo la seguente importante proprietà di esattezza a destra delle potenze esterne.

PROPOSIZIONE 3.10. *Sia $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una successione di moduli liberi finitamente generati, con A di rango 1. Allora esiste una successione esatta*

$$0 \longrightarrow A \otimes \bigwedge^{p-1} C \longrightarrow \bigwedge^p B \longrightarrow \bigwedge^p C \longrightarrow 0$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo anzitutto che, detto r il rango di C, allora B ha rango $r+1$. Inoltre se $\{b_1, \ldots, b_{r+1}\}$ è una base per B, sappiamo che $b_{i_1} \wedge \ldots \wedge b_{i_p}$ generano $\bigwedge^p B$; quindi c'è una mappa naturale $\bigwedge^p B \longrightarrow \bigwedge^p C$ definita da

$$b_{i_1} \wedge \ldots \wedge b_{i_p} \mapsto f(b_{i_1}) \wedge \ldots \wedge f(b_{i_p})$$

che è chiaramente suriettiva. Si può definire, allora, una mappa $A\otimes\bigwedge^{p-1} B \longrightarrow \bigwedge^p B$ mediante $a \otimes (b_{i_1} \wedge \ldots \wedge b_{i_{p-1}}) \mapsto a \wedge b_{i_1} \wedge \ldots \wedge b_{i_{p-1}}$, essendo a un generatore di A. Quest'ultima mappa è nulla sul nucleo del morfismo $A \otimes \bigwedge^{p-1} B \longrightarrow A \otimes \bigwedge^{p-1} C$ che si ottiene ponendo

$$a \otimes (b_{i_1} \wedge \ldots \wedge b_{i_{p-1}}) \mapsto a \otimes (f(b_{i_1}) \wedge \ldots \wedge f(b_{i_{p-1}}))$$

Quindi è indotta una mappa $A \otimes \bigwedge^{p-1} C \longrightarrow \bigwedge^p B$. Inoltre si capisce che $A \otimes \bigwedge^{p-1} C$ è contenuto nel nucleo di $\bigwedge^p B \longrightarrow \bigwedge^p C$ poiché $A = \ker(g)$. Ma passando ai ranghi, dalla relazione di Stiefel, sappiamo che

$$\binom{r}{p-1} + \binom{r}{p} = \binom{r+1}{p}$$

Poiché tutti i moduli sono liberi, $A \otimes \bigwedge^{p-1} C$ è il nucleo cercato. $\square$

Osservazione 3.2. La Proposizione si può enunciare anche in un'altra forma, supponendo di disporre di una successione esatta $0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ di moduli liberi, con G di rango 1. Allora è definita una successione esatta

$$0 \longrightarrow \bigwedge^p E \longrightarrow \bigwedge^p F \longrightarrow G \otimes \bigwedge^{p-1} E \longrightarrow 0$$

Risultati perfettamente analoghi valgono sostituendo i moduli liberi con fibrati vettoriali.

Definizione 3.4. Sia X una k-varietà non singolare. Definiamo il *fascio tangente* come il fascio su X definito da

$$\mathscr{T}_X := \mathscr{H}om(\Omega_{X/k}, \mathscr{O}_X)$$

Se $Y \subseteq X$ è una sottovarietà non singolare, definiamo anche il *fascio normale* di Y in X come

$$\mathscr{N}_{Y/X} := \mathscr{H}om(\mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Y^2, \mathscr{O}_X)$$

Inoltre, definiamo il *fascio canonico* su X come

$$\omega_X := \bigwedge^{\dim X} \Omega_{X/k}$$

Si osservi che $\mathscr{T}_X$ è un fascio localmente libero di rango $\dim X$. Infatti, nelle ipotesi di X non singolare, $\Omega_{X/k}$ è localmente libero di rango $\dim X$, così anche $\mathscr{H}om(\Omega_{X/k}, \mathscr{O}_X)$. Inoltre, $\bigwedge^{\dim X} \Omega_{X/k}$ è invertibile: infatti, per la non singolarità, $\Omega_{X/k}$ è localmente libero di rango $\dim X$. In particolare, ω_X è coerente.

Sia $\mathbf{P}^r := \mathbf{P}^r_k$ lo spazio proiettivo schematico e si consideri la successione di Eulero come nel Teorema 3.2, ma dualizzata con le notazioni correnti:

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbf{P}^r} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(-1)^{r+1} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r} \longrightarrow 0$$

Operiamo il prodotto tensoriale per $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1)$ e otteniamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbf{P}^r}(1) \longrightarrow \mathscr{O}^{r+1}_{\mathbf{P}^r} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1) \longrightarrow 0$$

Sia $\Omega^p_{\mathbf{P}^r} = \bigwedge^p \Omega_{\mathbf{P}^r/k}$ il fascio delle p-forme differenziali su $\mathbf{P}^r$; ricordiamo che $\Omega^r_{\mathbf{P}^r} = \omega_{\mathbf{P}^r}$. Prendendo la potenza esterna p-esima, in virtù della Proposizione 3.10 si trova una successione

$$0 \longrightarrow \bigwedge^p \Omega^1_{\mathbf{P}^r}(1) \longrightarrow \bigwedge^p \mathscr{O}^{r+1}_{\mathbf{P}^r} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1) \otimes \bigwedge^p \Omega^1_{\mathbf{P}^r}(1) \longrightarrow 0$$

Osserviamo che $\bigwedge^p \Omega^1_{\mathbf{P}^r}(1) = \Omega^p_{\mathbf{P}^r}(p)$. Allora per $p = r+1$ si ha $\Omega^{r+1}_{\mathbf{P}^r} = 0$ poiché $\Omega^1_{\mathbf{P}^r} \simeq (\mathscr{T}_{\mathbf{P}^r})^\vee$ è di rango r e quindi abbiamo l'isomorfismo

$$\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r} = \bigwedge^{r+1} \mathscr{O}^{r+1}_{\mathbf{P}^{r+1}} \simeq \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1) \otimes \omega_{\mathbf{P}^r}(r)$$

Segue allora che $\omega_{\mathbf{P}^r} \simeq \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(-r-1)$.

DEFINIZIONE 3.5. Il *genere geometrico* di una varietà proiettiva X è l'intero $p_g(X) := \dim_k(\Gamma(X, \omega_X))$.

La definizione è ben posta: infatti, se X è una varietà proiettiva, per il teorema di Serre ogni modulo $H^p(X, \omega_X)$ è un k-spazio vettoriale di dimensione finita. Ricordiamo che (si veda [18]), per uno schema proiettivo X su un campo k è definito il *genere aritmetico* come

$$\begin{aligned} p_a(X) : &= (-1)^{\dim X+1}(1 - \chi(X, \mathscr{O}_X)) = \\ &= (-1)^{\dim X+1}\left(1 - \sum_{j=0}^{\dim X} (-1)^j \dim_k H^j(X, \mathscr{O}_X)\right) \end{aligned}$$

Ricordiamo, infine, i seguenti risultati notevoli.

TEOREMA 3.4. (DUALITÀ DI SERRE) *Sia X un k-schema di dimensione n e sia $\mathscr{F}$ un fibrato vettoriale su X. Allora*

$$H^p(X, \mathscr{F})^\vee \simeq H^{n-p}(X, \mathscr{F}^\vee \otimes \omega_X)$$

dove $\mathscr{F}^\vee := \mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)$.

DIMOSTRAZIONE. Si veda [18]. □

TEOREMA 3.5. (FORMULA D'AGGIUNZIONE) *Sia Y una sottovarietà non singolare di codimensione r in una varietà non singolare X su un campo k. Allora $\omega_Y \simeq \omega_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \bigwedge^r \mathscr{N}_{Y/X}$. Nel caso in cui $r = 1$, consideriamo Y come un divisore e sia $\mathscr{L}$ il fascio invertibile su X ad esso associato. Allora $\omega_Y \simeq \omega_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$.*

DIMOSTRAZIONE. Si veda [18]. □

OSSERVAZIONE 3.3. Si osservi che il fascio dei differenziali ed il fascio canonico sono oggetti definiti *implicitamente* sulla varietà X. Ne consegue che sia essi, sia gli invarianti numerici che ne possiamo derivare, sono invarianti per isomorfismo di varietà. In generale, non sono invarianti birazionali, ma si può dimostrare che il genere geometrico lo è. Si possono approfondire questi argomenti anche in, tra gli altri, [1, 11, 24].

CAPITOLO 4

Curve.

Nella nostra trattazione, una *curva* è un k-schema X, con k campo fissato, con le proprietà seguenti:

(C1) X è integro (cioè $\mathscr{O}_{X,p}$ sono anelli ridotti e X è uno spazio topologico irriducibile);

(C2) X è di dimensione 1 (cioè la dimensione di Krull di ogni $\mathscr{O}_{X,p}$ è 1);

(C3) X è una varietà proiettiva (cioè esiste un'immersione chiusa $X \subseteq \mathbf{P}^r_k$ per qualche $r > 0$).

Spesso faremo l'ulteriore ipotesi

(C4) X è liscia (cioè $\mathscr{O}_{X,p}$ è un anello locale regolare).

Osservazione 4.1. Con le ipotesi **(C1)**$-$**(C4)**, se X è una curva sappiamo che

$$p_a(X) = 1 - \dim_k H^0(X, \mathscr{O}_X) + \dim_k H^1(X, \mathscr{O}_X) = \dim_k H^1(X, \mathscr{O}_X)$$

Inoltre $\omega_X = \Omega_{X/k}$ è un fascio invertibile. Allora $H^1(X, \mathscr{O}_X)$ e $H^0(X, \Omega_{X/k})$ sono in dualità; questo significa che, per una curva proiettiva non singolare, vale $p_a = p_g$. Sapendo, dunque, che genere aritmetico e genere geometrico coincidono, in seguito parleremo semplicemente di *genere di una curva*.

Per una trattazione completa sulle curve algebriche, si può consultare [18].

4.1. Teorema di Riemann-Roch.

Nelle nostre ipotesi, i divisori di Weil e i divisori di Cartier coincidono sulle curve lisce. Un divisore si può dunque vedere come somma formale finita di punti sulla curva, ad ognuno dei quali è associato un coefficiente intero. In particolare, sussiste un isomorfismo fra il gruppo $\mathrm{Cl}(X)$ dei divisori a meno di equivalenza lineare e $\mathrm{Pic}(X)$, gruppo delle classi di isomorfismo di fasci invertibili su X. Chiameremo $\mathscr{O}_X(D)$ un fascio invertibile associato al divisore D su X (determinato a meno di isomorfismo).

L'insieme dei divisori effettivi linearmente equivalenti ad un dato divisore D è il sistema lineare completo $|\mathscr{O}_X(D)|$, che scriveremo $|D|$. La sua dimensione è $l(D) = \dim_k \Gamma(X, \mathscr{O}_X(D))$.

Lemma 4.1. *Sia D un divisore su una curva X. Allora, se $l(D) \neq 0$, necessariamente* $\deg(D) \geq 0$. *Inoltre, se $l(D) \neq 0$ e* $\deg(D) = 0$ *allora D è necessariamente equivalente al divisore nullo, cioè $\mathscr{O}_X(D) \simeq \mathscr{O}_X$.*

Dimostrazione. Se $l(D) \neq 0$, il sistema lineare $|D|$ è non vuoto, quindi D è linearmente equivalente a qualche divisore effettivo, che ha necessariamente grado non negativo. Poiché il grado è indipendente dalla classe d'equivalenza lineare, possiamo concludere che $\deg(D) \geq 0$. Supponiamo altresì che $\deg(D) = 0$. Allora D è equivalente ad un divisore effettivo di grado nullo. Ma l'unico divisore effettivo di grado nullo è proprio il divisore nullo. $\square$

Sia $\Omega_{X/k}$ il fascio dei differenziali relativi su X. Poiché X è unidimensionale, $\Omega_{X/k}$ è invertibile ed è isomorfo al fascio canonico ω_X di X. Ogni divisore appartenente alla classe d'equivalenza lineare di ω_X (cioè ogni D tale che $\mathscr{O}_X(D) \simeq \omega_X$) è chiamato *divisore canonico* di X e si denota con K_X, a meno di ambiguità.

Teorema 4.1. (Riemann, Roch) Sia D un divisore su una curva X di genere g. Allora

$$l(D) - l(K_X - D) = \deg(D) + 1 - g$$

Dimostrazione. Sappiamo che $K_X - D$ corrisponde al fascio invertibile $\omega_X \otimes \mathscr{O}_X(D)^{-1}$. Per la dualità di Serre, sappiamo anche che

$$H^0(X, \omega_X \otimes \mathscr{O}_X(D)^{-1}) \simeq H^1(X, \mathscr{O}(D))^\vee$$

In virtù di ciò, scopriamo che

$$\begin{aligned} \chi(X, \mathscr{O}_X(D)) &= \dim_k H^0(X, \mathscr{O}_X(D)) - \dim_k H^1(X, \mathscr{O}_X(D)) = \\ &= \dim_k H^0(X, \mathscr{O}_X(D)) - \dim_k H^0(X, \omega_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(D)^{-1}) = \\ &= l(D) - l(K_X - D) \end{aligned}$$

e ciò che rimane da provare è che

$$\chi(X, \mathscr{O}_X(D)) = \deg(D) + 1 - g$$

Occorre distinguere due casi distinti.

(1) Supponiamo che $D = 0$. In tal caso è ovvio che

$$\chi(X, \mathscr{O}_X(D)) = \chi(X, \mathscr{O}_X) = \dim_k H^0(X, \mathscr{O}_X) - \dim_k H^1(X, \mathscr{O}_X) = 1 - g$$

come volevamo, essendo $H^0(X, \mathscr{O}_X) \simeq k$ per ogni varietà proiettiva X.

(2) Sia ora D un divisore arbitrario e sia p un punto. Allora p è un divisore, così come $D + p$. Mostriamo che il teorema vale per D se e solo se vale per $D + p$. In questo modo, si giunge alla tesi usando il punto precedente, poiché ogni divisore D può essere ottenuto da 0 sommando o sottraendo un punto ad ogni passo. Consideriamo $P = \{p\}$ come sottoschema chiuso di X: il suo fascio strutturale è il fascio grattacielo in p, cioè

$$k(P) := \mathscr{O}_P(U) = \begin{cases} \kappa & \text{se } p \in U \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre il fascio di ideali è $\mathscr{I} = \mathscr{O}_X(-p)$. Segue dunque la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(-p) \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow k(P) \longrightarrow 0$$

Facendo il prodotto tensoriale con $\mathscr{O}_X(D+p)$, che è invertibile e quindi preserva l'esattezza senza influire su $k(P)$, si ottiene

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(D) \longrightarrow \mathscr{O}_X(D+p) \longrightarrow \kappa(P) \longrightarrow 0$$

Passando alla caratteristica di Eulero-Poincaré si trova

$$\chi(X, \mathscr{O}_X(D+p)) = \chi(X, \mathscr{O}_X(D)) + \chi(\kappa(P)) = \chi(X, \mathscr{O}_X(D)) + 1$$

D'altra parte, $\deg(D+p) = \deg(D) + 1$, quindi la formula è valida per D se e solo se è valida per $D+p$.

$\square$

Osservazione 4.2. Sia X una curva di genere g. Allora il divisore canonico ha grado $2g-2$. Infatti, applicando il Teorema di Riemann-Roch per $D = K_X$, dato che

$$l(K_X) = \dim_k H^0(X, \omega_X) = p_g(X) = g$$

e $l(0) = 1$, abbiamo

$$g - 1 = \deg K_X + 1 - g$$

da cui $\deg K_X = 2g - 2$.

4.2. Grado di varietà proiettive.

In questa sezione introdurremo la nozione di *grado* di una varietà algebrica, come naturale generalizzazione del grado di una ipersuperficie.

Sia $X \subseteq \mathbf{P}^r := \mathbf{P}^r_k$ una varietà proiettiva, sia $I_X \subseteq k[X_0, \ldots, X_r]$ il suo ideale omogeneo e sia $S_X = k[X_0, \ldots, X_r]/I_X$ l'anello delle coordinate omogenee di X. Allora la funzione di Hilbert di S_X ed il suo polinomio di Hilbert si dicono rispettivamente *funzione di Hilbert* $\mathrm{Hilb}_X(t)$ di X e *polinomio di Hilbert* $P_X(t)$ di X. Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione della dimensione di una varietà proiettiva.

Teorema 4.2. *Il polinomio di Hilbert di una varietà proiettiva $X \subseteq \mathbf{P}^r$ ha grado* $\dim(X)$.

Dimostrazione. Sappiamo che

$$P_{\mathbf{P}^r}(t) = \binom{t+r}{r}$$

che ha grado r, quindi il teorema vale per $X = \mathbf{P}^r$. Se X è un punto, allora P_X è costante ed ha grado nullo. Se X è una varietà proiettiva, esiste una catena di sottovarietà

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X_{r-1} \subseteq X_r = \mathbf{P}^r$$

in modo che $\dim(X_i) = i$ e $X_d = X$ per qualche $d = \dim(X)$. Basta allora dimostrare che per ogni inclusione propria di varietà $Y \subset X$ si ha $\deg(P_Y) < \deg(P_X)$. Non è restrittivo supporre che $Y \subseteq X \cap H$, dove H è una ipersuperficie proiettiva di grado s, cioè $H = V(h)$ per qualche polinomio omogeneo h di grado s. Sia $R = S_X$ l'algebra di X. Allora abbiamo una successione esatta

$$0 \longrightarrow R(-s) \longrightarrow R \longrightarrow R/(h) \longrightarrow 0$$

di moduli graduati, in cui la prima freccia è la moltiplicazione per h. Supponiamo che

$$P_R(t) = a_0\binom{t}{d} + a_1\binom{t}{d-1} + \ldots + a_d$$

Essendo che $P_{R(-s)}(t) = P_R(t-s)$, si ha

$$\begin{aligned} P_{R/(h)}(t) &= P_R(t) - P_R(t-s) = a_0\left[\binom{t}{d} - \binom{t-s}{d}\right] + \ldots = \\ &= sa_0\binom{t}{d} + \ldots \end{aligned}$$

dove i punti indicano termini di grado minore di d. D'altra parte $\mathrm{Hilb}_{R/(h)}(t) \geq \mathrm{Hilb}_Y(t)$, dato che S_Y è un quoziente di $R/(h)$, quindi

$$\deg(P_Y) \leq \deg(P_{R/(h)}) < \deg(P_X)$$

concludendo la dimostrazione. □

Supponiamo che $d = \dim(X)$. Allora possiamo scrivere P_X nella forma

$$P_X(t) = \frac{\deg(X)}{d!}t^d + \ldots$$

dove $\deg(X)$ è un intero, detto *grado* di X. In altre parole, $\deg(X)$ è il coefficiente direttore di P_X moltiplicato per $\dim(X)!$

Il seguente teorema mostra alcune importanti proprietà del grado.

TEOREMA 4.3. *Il grado ha le seguenti proprietà:*
(1) $\deg(X) > 0$ *per ogni varietà* $X \neq \varnothing$*;*
(2) *un sottospazio lineare di* $\mathbf{P}^r$ *ha grado* 1*;*
(3) *una ipersuperficie di* $\mathbf{P}^r$ *di grado* m *ha grado* m *come varietà;*
(4) *se* $X \subseteq \mathbf{P}^r$ *è una varietà proiettiva di dimensione* $d \geq 2$ *e* H *è un iperpiano di equazione* $h = 0$*, tale che* (h) *sia un ideale primo in* S_X*, allora* $Y = X \cap H$ *è una varietà proiettiva di dimensione* $d-1$ *e* $\deg(Y) = \deg(X)$*.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Ovvio, poiché $P_X(n) > 0$ per ogni n molto maggiore di 0.

(2) Se $L \subseteq \mathbf{P}^r$ è un sottospazio lineare, allora $S_L = k[X_0, \ldots, X_{\dim(L)}]$, quindi $P_L(t) = \binom{t+\dim(L)}{\dim(L)}$ e quindi $\mu(X) = 1$.

(3) Supponiamo che l'ipersuperficie X sia della forma $V(f)$, con $f \in k[X_0, \dots, X_r]$ omogeneo di grado m. Posto $S = k[X_0, \dots, X_r]$, abbiamo una successione esatta

$$0 \longrightarrow S(-m) \longrightarrow S \longrightarrow S_X = S/(f) \longrightarrow 0$$

dove la prima freccia è la moltiplicazione per f. Allora si ha

$$\begin{aligned} P_X(t) &= P_S(t) - P_S(t-m) = \binom{t+r}{r} - \binom{t+r-m}{r} = \\ &= m\binom{t+r-1}{r-1} + \dots \end{aligned}$$

quindi

$$\deg(X) = \frac{m}{(r-1)!}\dim(X)! = m$$

(4) Secondo le ipotesi, $Y \subseteq H$ una varietà proiettiva di dimensione $d-1$ avente per anello delle coordinate $S_Y = S_X/(h)$. Si ha allora una successione esatta

$$0 \longrightarrow S_X(-1) \longrightarrow S_X \longrightarrow S_Y \longrightarrow 0$$

dato che h è un polinomio lineare omogeneo. Si deduce allora che

$$\begin{aligned} P_Y(t) &= P_X(t) - P_X(t-1) = \mu(X)\left[\binom{t+d}{d} - \binom{t+d-1}{d}\right] + \dots = \\ &= \deg(X)\binom{t+d-1}{d-1} + \dots \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Osservazione 4.3. Un iperpiano H che soddisfi le ipotesi del punto (4) è spesso chiamato *iperpiano generico* e l'intersezione $X \cap H$ prende quindi il nome di *sezione iperpiana generica*.

Abbiamo inoltre la seguente disuguaglianza.

Corollario 4.1. *Sia $X \subseteq \mathbf{P}^r$ una curva proiettiva irriducibile e non degenere su un campo algebricamente chiuso. Allora* $\deg(X) \geq r$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che X abbia grado strettamente minore di r. Allora, scelti comunque punti $p_1, \dots, p_r \in X$, esiste un iperpiano $H \simeq \mathbf{P}^{r-1}$ che li contiene; però essendo $\deg(X) < r$, la sezione iperpiana $X \cap H$ contiene almeno r punti e non può essere generica, cioè $\dim(H \cap X) = 1$; questo porterebbe a dire che $X \subseteq H$ e questo è assurdo. □

Presentiamo, in ultima analisi, un importante risultato che ci servirà in seguito; una forma più generale si può trovare in [10]. Poniamo $h^i(X, -) = \dim(H^i(X, -))$ per ogni $i \geq 0$ e ricordiamo la notazione seguente: per ogni fascio invertibile $\mathscr{L}$ su X e per ogni punto $p \in X$ denotiamo con $\mathscr{L}(p)$ il fascio invertibile $\mathscr{L} \otimes \mathscr{O}_X(p)$, corrispondente al divisore $\mathscr{L}$ a cui è stato aggiunto il punto p.

DEFINIZIONE 4.1. Un fibrato lineare $\mathscr{L}$ su X è detto *generico* se $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X(p_1 + \ldots + p_m - q_1 - \ldots - q_n)$ per certi $p_i, q_j \in X$ punti generici.

Le proprietà che ci interessano sono raccolte nei prossimi due risultati.

LEMMA 4.2. *Sia $\mathscr{L}$ un fibrato lineare tale che $h^0(X, \mathscr{L}) \geq n$, per qualche $n \in \mathbb{N}$. Allora, arbitrariamente scelti punti generici $p_1, \ldots, p_n \in X$, abbiamo $h^0(\mathscr{L}(-p_1 - \ldots - p_n)) = h^0(\mathscr{L}) - n$.*

DIMOSTRAZIONE. Proviamo per induzione su n. Se $n = 0$, non c'è nulla da dimostrare; supponiamo dunque che l'asserto valga per $n-1$ e proviamo per n. Dato che $h^0(\mathscr{L}) > 0$, allora $h^0(\mathscr{L}(-p_n)) = h^0(\mathscr{L}) - 1$. Ma allora per ipotesi induttiva

$$h^0(\mathscr{L}(-p_1 - \ldots - p_n)) = h^0(\mathscr{L}(-p_n)) - (n-1) = h^0(\mathscr{L}) - n$$

$\square$

TEOREMA 4.4. *Sia X una curva liscia di genere g su un campo algebricamente chiuso k. Se $\mathscr{L}$ è un fibrato lineare generico di grado $d \geq g-1$, allora $\mathscr{L}$ è non-speciale, cioè $h^1(X, \mathscr{L}) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che la tesi è equivalente a dimostrare che, per ogni fibrato lineare generico $\mathscr{L}$ di grado $d \geq g-1$, sia $h^0(\mathscr{L}) = d-g+1$. Inoltre, se $d \geq 2g-1$, allora $\deg(\omega_X \otimes \mathscr{L}^{-1}) = 2g-2-2g+1 = -1 < 0$, quindi

$$h^1(\mathscr{L}) = h^0(\omega_X \otimes \mathscr{L}^{-1}) = 0$$

ed il risultato vale. Fissiamo ora $g-1 \leq d < 2g-1$ e consideriamo un fibrato lineare generico $\mathscr{M}$ di grado $2g-1$; scelti $p_1, \ldots, p_{2g-1-d} \in X$ punti generici, si può scrivere

$$\mathscr{L} = \mathscr{M}(-p_1 - \ldots - p_{2g-1-d})$$

Allora $h^0(\mathscr{M}) = h^1(\mathscr{M}) + 2g-1+1-g = 2g-1+1-g = g$. In particolare, vale $h^0(\mathscr{M}) \geq 2g-1-d > 0$ quindi per il Lemma

$$h^0(\mathscr{L}) = h^0(\mathscr{M}(-p_1 - \ldots - p_{2g-1-d})) = h^0(\mathscr{M}) - (2g-1-d) = g-(d-1)$$

che per quanto detto è la tesi. $\square$

Esiste un'altra definizione di grado che utilizza i fasci invertibili. Poiché X è una varietà proiettiva, allora è fissata un'immersione chiusa $i : X \hookrightarrow \mathbf{P}^r_k$, che dipende unicamente dal fascio $i^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1)$ e dalle sezioni da cui è generato, precisamente

$$s_i := i^* X_i$$

essendo X_i delle coordinate omogenee per $\mathbf{P}^r_k$. Allora si pone

$$\deg(X) := \deg(i^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1))$$

Si osservi che la definizione è ben posta, poiché $i^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1)$ è un fascio invertibile. Maggiori dettagli possono essere trovati in [1].

CAPITOLO 5

Risoluzioni libere.

In questo e nei successivi capitoli assumeremo che k sia una campo fissato e studieremo lo spazio proiettivo $\mathbf{P}_k^r$ come varietà algebrica classica. Ricordiamo, a tale scopo, che l'anello delle coordinate omogenee di $\mathbf{P}_k^r$ è $S = k[x_0, \ldots, x_r]$. Esso ha una naturale graduazione definita dal grado dei polinomi, assegnando ad ogni variabile il grado 1.

Ricordiamo che un morfismo di moduli graduati è un morfismo di moduli che preserva il grado. In generale, se il morfismo modifica il grado di un intero p, allora esso è detto *di grado p*.

5.1. Sizigie.

Sia M un S-modulo finitamente generato, dotato di una graduazione $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$. Dato che M è finitamente generato, ogni M_d è un k-spazio vettoriale di dimensione finita ed è noto che

$$\mathrm{Hilb}_M(d) := \dim_k M_d$$

definisce la *funzione di Hilbert* di M. L'idea di Hilbert fu quella di calcolare $\mathrm{Hilb}_M(d)$ mettendo a confronto M con dei moduli liberi, utilizzando una *risoluzione libera.* Per ogni modulo graduato M, sia $M(a)$ il modulo di twist, avente componenti omogenee

$$M(a)_d := M_{d+a}$$

Dati elementi omogenei $m_i \in M$, di grado a_i ciascuno, che generano M come S-modulo, possiamo definire un morfismo dal modulo libero $F_0 = \bigoplus S(-a_i)$ in M, mandando il generatore i-esimo in m_i. Il twist in F_0 è necessario per far sì che il morfismo preservi il grado. Sia $M_1 \subseteq F_0$ il nucleo di tale morfismo; per il teorema della Base di Hilbert, M_1 è ancora finitamente generato ed i suoi elementi si chiamao *sizigie* sui generatori m_i, o anche *sizigie su M*.

Scegliendo un numero finito di generatori omogenei per M_1 è possibile definire una mappa da un modulo libero graduato F_1 a F_0, avente immagine M_1. Proseguendo in questo modo, si costruisce una successione di morfismi e moduli liberi graduati, chiamata *risoluzione graduata libera* di M:

$$\cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

Essa costituisce una successione esatta di morfismi di grado zero tra moduli liberi graduati, con la proprietà che $M = \mathrm{coker}(\varphi_1)$. Dato che ogni φ_i

conserva il grado, otteniamo anche delle successioni esatte di k-spazi vettoriali finitamente generati, prendendo ogni parte omogenea di grado d con le rispettive restrizioni. Ecco allora che determiniamo

$$\mathrm{Hilb}_M(d) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathrm{Hilb}_{F_i}(d)$$

Teorema 5.1. (delle sizigie di Hilbert) *Ogni S-modulo graduato e finitamente generato M ha una risoluzione graduata libera finita di lunghezza $m \leq r+1$.*

Dimostrazione. Si vedano [9, 10, 16]. $\square$

In realtà è possibile calcolare esplicitamente la funzione di Hilbert a partire dai *gradi* di una risoluzione libera.

Corollario 5.1. *Sia $S = k[x_0, \dots, x_r]$ un anello di polinomi. Se l'S-modulo graduato M ha risoluzione libera finita*

$$0 \longrightarrow F_m \xrightarrow{\varphi_m} F_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

in modo che ogni F_i sia un S-modulo finitamente generato della forma $F_i = \bigoplus_j S(-a_{i,j})$, allora

$$\mathrm{Hilb}_M(d) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \sum_j \binom{r+d-a_{i,j}}{r}$$

Dimostrazione. Per quanto visto prima, basta ed occorre dimostrare che

$$\mathrm{Hilb}_{F_i}(d) = \sum_j \binom{r+d-a_{i,j}}{r}$$

In particolare, avendo decomposto F_i come somma diretta, è sufficiente dimostrare che $\mathrm{Hilb}_{S(-a)}(d) = \binom{r+d-a}{r}$, ossia a meno di twist basta dimostrare che $\mathrm{Hilb}_S(d) = \binom{r+d}{r}$. Questo è un fatto elementare: un monomio di grado d è determinato dalla successione degli esponenti di ogni suo fattore di grado 1, che possono essere ordinati in modo che formino una successione crescente di d interi, ognuno fra 0 e r. Aggiungendo i all'elemento i-esimo di tale successione, un tale monomio va allora identificato con un insieme di d elementi in $\{1, 3, \dots, r+d\}$, quindi se ne contano

$$\binom{r+d}{d} = \frac{(r+d)!}{d!r!} = \binom{r+d}{r}$$

$\square$

Corollario 5.2. *Nelle ipotesi precedenti, esiste un polinomio $P_M(d)$, detto* polinomio di Hilbert *di M, tale che $P_M(d) = \mathrm{Hilb}_M(d)$ per $d \geq \max\{a_{i,j} - r\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Si osservi che, quando $d+r-a \geq 0$, abbiamo

$$\binom{d+r-a}{r} = \frac{(d+r-a)(d+r-a-1)\cdots(d+1-a)}{r!}$$

che è un polinomio di grado r in d; quindi se la condizione è soddisfatta, la funzione di Hilbert è un polinomio per via della sua espressione binomiale. □

5.2. Risoluzioni minimali.

Ogni S-modulo graduato finitamente generato ha una risoluzione libera *minimale*, unica a meno di isomorfismo. Il grado dei generatori dei suoi moduli liberi non determina soltanto la funzione di Hilbert, come farebbe ogni altra risoluzione, ma definisce un altro invariante, molto più fine, di cui parleremo in questa sezione.

Intuitivamente, le risoluzioni libere minimali possono essere descritte come segue. Dato un S-modulo graduato M che sia finitamente generato, scegliamo un insieme minimale di generatori m_i e definiamo una mappa da un modulo libero F_0 in M, mandando una base di F_0 nell'insieme degli m_i. Sia M_1 il nucleo di tale mappa, anch'esso finitamente generato. Scelto un sistema minimale di generatori per M_1, determiniamo una mappa $F_1 \longrightarrow F_0$ la cui immagine è M_1. Proseguendo in questo modo si determina la risoluzione cercata.

Tuttavia, molte delle applicazioni di queste risoluzioni sono conseguenza di una particolare proprietà che le caratterizza e che noi quindi assumeremo come definizione formale. Per snellire la notazione, chiameremo $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale omogeneo $(x_0, \dots, x_r) \subseteq S = k[x_0, \dots, x_r]$.

DEFINIZIONE 5.1. Un complesso di S-moduli graduati

$$\cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\delta_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

è detto *minimale* se $\mathrm{im}(\delta_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$ per ogni i.

Informalmente, un complesso è minimale se ogni operatore di cobordo è rappresentato da una matrice avente coefficienti nell'ideale massimale. La relazione fra questa definizione e le risoluzioni libere minimali è una conseguenza del Lemma di Nakayama.

LEMMA 5.1. (NAKAYAMA) *Siano M un S-modulo graduato finitamente generato e $m_1, \dots, m_n \in M$ rappresentanti per i generatori di $M/\mathfrak{m}M$. Allora $m_1, \dots, m_n$ generano M.*

Segue quindi la caratterizzazione delle risoluzioni libere minimali.

PROPOSIZIONE 5.1. *Una risoluzione libera graduata*

$$\mathbf{F}: \quad \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\delta_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

è minimale come complesso se e solo se δ_i porta una base di F_i in un sistema minimale di generatori per $\mathrm{im}(\delta_i)$, al variare di ogni $i \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Consideriamo la successione esatta a destra

$$F_{i+1} \xrightarrow{\delta_{i+1}} F_i \longrightarrow \mathrm{im}(\delta_i) \longrightarrow 0 \tag{5.2.1}$$

Il complesso $\mathbf{F}$ è minimale se e solo se la mappa indotta al quoziente $\delta'_{i+1} : F_{i+1}/\mathfrak{m}F_{i+1} \longrightarrow F_i/\mathfrak{m}F_i$ è zero per ogni i. Infatti, se $\mathbf{F}$ è minimale, allora $\delta_{i+1}(F_{i+1}) \subseteq \mathfrak{m}F_i$ e δ'_{i+1} è nulla. Il viceversa è ovvio. Ma questo vale, in virtù della successione esatta (5.2.1), se e solo se la mappa $F_i/\mathfrak{m}F_i \longrightarrow \mathrm{im}(\delta_i)/\mathfrak{m}(\mathrm{im}(\delta_i))$ è un isomorfismo. Ma per il Lemma di Nakayama questo accade se e solo se una base di F_i va in un insieme minimale di generatori per $\mathrm{im}(\delta_i)$. □

Il seguente risultato garantisce che le scelte fatte non influiscono sulla risoluzione cercata.

Teorema 5.2. *Sia M un S-modulo graduato e finitamente generato. Se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ sono due risoluzioni libere minimale di M, allora esiste un isomorfismo graduato di complessi $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ che induce l'indentità su M. Inoltre ogni risoluzione libera di M contiene la risoluzione libera minimale di M come addendo diretto.*

Dimostrazione. Si veda [9]. □

L'aspetto più importante dell'unicità della risoluzione libera minimale è che, se $\mathbf{F} : \ .... \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0$ è una tale risoluzione di M, allora il numero di generatori in ogni grado richiesti per i moduli liberi F_i dipende soltanto da M. Il modo più semplice di fornire un enunciato preciso è utilizzare il funtore di torsione. Ricordiamo che, dato un S-modulo N, il funtore $\mathrm{Tor}_n^S(N,M)$ è l'n-esimo gruppo d'omologia del complesso $N \otimes_S \mathbf{Pr}_M$, dove $\mathbf{Pr}_M$ è una qualunque risoluzione proiettiva di M.

Proposizione 5.2. *Se $\mathbf{F} : \ \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0$ è la risoluzione libera minimale di un S-modulo graduato e finitamente generato M, allora ogni insieme minimale di generatori di F_i contiene esattamente* $\dim_k \mathrm{Tor}_i^S(k,M)_j$ *generatori di grado j.*

Dimostrazione. Lo spazio vettoriale $\mathrm{Tor}_i^S(k,M)_j$ è la parte omogenea di grado j dell'i-esimo modulo di omologia del complesso $k \otimes_S \mathbf{F}$, dato che $\mathbf{F}$ è risoluzione proiettiva di M. Dato che $\mathbf{F}$ è minimale, tutte le mappe in $k \otimes \mathbf{F}$ sono zero (si ricordi che $k \otimes F_i = (S/\mathfrak{m}) \otimes F_i = F_i/\mathfrak{m}F_i$), quindi in effetti $\mathrm{Tor}_i^S(k,M) = k \otimes_S F_i$ e per il Lemma di Nakayama, F_i richiede esattamente $\dim_k \mathrm{Tor}_i^S(k,M)_j$ generatori di grado j. □

Corollario 5.3. *Se M è un S-modulo graduato e finitamente generato, la dimensione proiettiva di M è uguale alla lunghezza della sua risoluzione libera minimale.*

Dimostrazione. Per definizione, la dimensione proiettiva è la minima lunghezza di una risoluzione proiettiva di M; poiché la risoluzione libera minimale è una risoluzione proiettiva, una disuguaglianza è ovvia; rimane da provare che la lunghezza della risoluzione libera minimale è al più la dimensione proiettiva di M. Osserviamo che $\mathrm{Tor}_i^S(k,M) = 0$ se $i > \dim_S^{(\mathrm{proj})}(M)$, quindi oltre tale intero i termini della risoluzione libera minimale hanno generatori nulli. Questo dimostra che la sua lunghezza è minore o uguale a $\dim_S^{(\mathrm{proj})}(M)$, come volevamo. □

Sia

$$\mathbf{F} : \ \cdots \longrightarrow F_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0$$

un complesso di S-moduli liberi tali che $F_i = \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{i,j}}$, cioè F_i richiede $\beta_{i,j}$ generatori minimali di grado j. Se $\mathbf{F}$ è la risoluzione libera minimale di un S-modulo graduato e finitamente generato M con lunghezza m, allora i numeri $\beta_{i,j}$, scritti talvolta come $\beta_{i,j}(M)$, sono detti *numeri graduati di Betti*. Sappiamo già che $\beta_{i,j}(M) = \dim_k \mathrm{Tor}_i^S(k,M)_j$.

Ad esempio, il numero $\beta_{0,j}$ è il numero di elementi di grado j che servono per generare M; dato che spesso M sarà l'anello delle coordinate omogenee S_X di qualche varietà proiettiva non vuota X, conviene vedere alcuni esempi di tal sorta. Come S-modulo, l'anello S_X è generato dall'unità, quindi $\beta_{0,0} = 1$ e $\beta_{0,j} = 0$ per $j \neq 1$. D'altra parte, il numero $\beta_{1,j}$ è il numero di elementi indipendenti che servono per generare l'ideale I_X di X. Se $S_X \neq 0$ (cioè $X \neq \varnothing$), l'ideale non contiene elementi di grado zero, quindi $\beta_{1,0} = 0$. In generale, possiamo provare il seguente risultato.

Proposizione 5.3. *Siano $\{\beta_{i,j}\}$ i numeri graduati di Betti relativi ad un S-modulo graduato e finitamente generato. Se per un dato i esiste d tale che $\beta_{i,j} = 0$ per ogni $j < d$, allora $\beta_{i+1,j+1} = 0$ per ogni $j < d$.*

Dimostrazione. Sia $\cdots \xrightarrow{\delta_2} F_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0$ la risoluzione libera minimale. Per minimalità, ogni generatore di F_{i+1} deve essere mappato in un elemento non nullo dello stesso grado in $\mathfrak{m}F_i$. Dire che $\beta_{i,j} = 0$ per ogni $j < d$ significa che tutti i generatori di F_i (e quindi tutti gli elementi non nulli) hanno grado almeno d. Quindi, ogni elemento non nullo di $\mathfrak{m}F_i$ ha grado almeno $d+1$. Ne consegue, per quanto detto, che F_{i+1} ha solo generatori di grado almeno $d+1$. Ne consegue che $\beta_{i+1,j+1} = 0$ per $j < d$, come volevamo. □

Corollario 5.4. *Se $\{\beta_{i,j}\}$ sono i numeri graduati di Betti di un S-modulo graduato e finitamente generato M, la somma alterna*

$$B_j := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \beta_{i,j}$$

determina la funzione di Hilbert di M attraverso la formula

$$\mathrm{Hilb}_M(d) = \sum_j B_j \binom{r+d-j}{r}$$

Inoltre, i valori di B_j possono essere dedotti induttivamente da $\mathrm{Hilb}_M(d)$*, nel senso che*

$$B_j = \mathrm{Hilb}_M(j) - \sum_{n<j} B_n \binom{r+j-n}{r}$$

5.3. Ideali determinantali.

Sia $S = k[x_0, x_1, x_2]$ e assumiamo, a meno di diversa indicazione, che tutti gli S-moduli siano graduati e finitamente generati; sappiamo che un tale modulo ha una risoluzione libera e minimale. Inoltre, dal Corollario 5.3, sappiamo che la sua lunghezza è la dimensione proiettiva $\dim_S^{(\mathrm{proj})}(M)$.

PROPOSIZIONE 5.4. *Sia $I \subseteq S$ l'ideale omogeneo di un insieme finito di punti in $\mathbf{P}^2$. Allora I ha una risoluzione libera di lunghezza* 1*.*

DIMOSTRAZIONE. Per quanto detto in precedenza, basta ed occorre dimostrare che S/I ha dimensione proiettiva unitaria. Per la formula di Auslander-Buchsbaum nel caso graduato si ha che

$$\mathrm{depth}(\mathfrak{m}, S/I) + \dim^{(\mathrm{proj})}(S/I) = \mathrm{depth}(\mathfrak{m}, S)$$

Ma $\mathrm{depth}(\mathfrak{m}, S/I) \leq \dim(S/I) = 1$ e l'ideale irrilevante $\mathfrak{m}$ di S non è associato a I: infatti I è intersezione degli ideali primi $\mathfrak{p}_x$, ognuno dei quali contiene i polinomi che si annullano nel punto x dell'insieme finito scelto; come tale, I non può contenere una copia di $k = S/\mathfrak{m}$. Segue che $\mathrm{depth}(\mathfrak{m}, S/I) > 0$. Inoltre le variabili x_0, x_1, x_2 formano una successione regolare massimale di S, quindi $\mathrm{depth}(\mathfrak{m}, S) = 3$. Ne segue che $\dim^{(\mathrm{proj})} S/I = 2$; ma in una risoluzione libera di S/I, l'ideale I è il primo modulo delle sizigie di S/I, quindi $\dim^{(\mathrm{proj})} I = 1$. □

Per quanto segue adesso, lavoreremo in un contesto più generale, supponendo che R sia un qualunque anello noetheriano; per ogni matrice Ψ di dimensioni arbitrarie ed avente entrate in R, chiamiamo $I_t(\Psi)$ l'ideale di R generato dai determinanti delle sottomatrici d'ordine t di Ψ. Ideali di questa forma sono detti *ideali determinantali* e godono di proprietà speciali: il seguente risultato ne mostra l'utilizzo nella descrizione di particolari tipi di risoluzioni libere.

TEOREMA 5.3. (HILBERT-BURCH) *Supponiamo che un ideale I di un anello noetheriano R ammetta una risoluzione libera di lunghezza unitaria della forma*

$$0 \longrightarrow R^m \xrightarrow{\Psi} R^n \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

Allora:

(1) $n = m + 1$;
(2) $I = a \cdot I_t(\Psi)$*, per qualche $a \in R$ che non divide lo zero;*
(3) $\mathrm{depth}(I_t(\Psi), R) = 2$*.*

Viceversa, dato un $a \in R$ che non divide lo zero e una matrice Ψ di dimensioni $(t+1) \times t$ con entrate in R, tale che $\operatorname{depth}(I_t(\Psi), R) \geq 2$*, l'ideale $I = a \cdot I_t(\Psi)$ ammette una risoluzione libera di lunghezza unitaria, come prima. Inoltre* $\operatorname{depth}(I, R) = 2$ *se e solo se a è un'unità di R.*

Se chiamiamo *minore* d'ordine t il numero $(-1)^i \det \Psi_i$, dove Ψ_i è la sottomatrice di Ψ ottenuta rimuovendo la i-esima riga, allora possiamo affermare che il generatore di I corrispondente all'i-esimo elemento della base di G è a volte l'i-esimo minore di Ψ. Rimandiamo la dimostrazione del Teorema di Hilbert-Burch per enunciare e dimostrare prima un teorema più generale sulle risoluzioni libere.

Se φ è un morfismo di R-moduli, scriviamo $\operatorname{rk}(\varphi)$ per indicare il *rango* di φ, ossia l'ordine del minore massimale non nullo, e $I(\varphi)$ per indicare l'ideale determinantale $I_{\operatorname{rk}(\varphi)}(\Phi)$, essendo Φ una qualunque rappresentazione matriciale di φ. Per convenzione, poniamo $I_0(\varphi) := R$, in accordo con le caratteristiche del morfismo nullo. Inoltre definiamo anche $\operatorname{depth}(R, R) = \infty$, in modo che $\operatorname{depth}(I_0(\varphi), R) = \infty$.

Teorema 5.4. (Buchsbaum-Eisenbud) *Un complesso di moduli liberi*

$$\mathbf{F}: \quad 0 \longrightarrow F_m \xrightarrow{\varphi_m} F_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

su di un anello noetheriano R è una risoluzione se, e solo se, per ogni $i \geq 0$ vale

(1) $\operatorname{rk}(\varphi_{i+1}) + \operatorname{rk}(\varphi_i) = \operatorname{rk}(F_i)$;
(2) $\operatorname{depth}(I(\varphi_i), R) \geq i$.

Dimostrazione. Si veda [9], oppure [4] per ulteriori dettagli. □

Nel caso speciale in cui $R = k[x_0, \ldots, x_r]$ con k campo algebricamente chiuso, il Teorema di Buchsbaum-Eisenbud ha una interpretazione geometrica. Pensiamo a R come l'anello delle funzioni di $\mathbf{A}_k^{r+1} (= k^{r+1})$ (nel caso graduato possiamo considerare $\mathbf{P}^r$ in modo analogo) e, se $p \in \mathbf{A}_k^{r+1}$ è un punto, sia $I(p)$ l'ideale delle funzioni che si annullano in p. Sia $\mathbf{F}$ un complesso come in ipotesi e consideriamo

$$\mathbf{F}(p): \ 0 \longrightarrow F_m(p) \xrightarrow{\varphi_{m,p}} F_{m-1}(p) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1(p) \xrightarrow{\varphi_{1,p}} F_0(p)$$

ottenuto facendo il prodotto tensoriale con il campo residuo $k(p) := R/I(p)$; $\mathbf{F}(p)$ si può riguardare come complesso di $k(p)$-spazi vettoriali di dimensione finita. Una rappresentazione matriciale per $\varphi_{i,p}$ si ottiene valutando in p ogni entrata di una rappresentazione matriciale per φ_i. Il Teorema di Buchsbaum-Eisenbud esprime la relazione fra l'esattezza di $\mathbf{F}$ e quella di $\mathbf{F}(p)$.

Corollario 5.5. *Sia*

$$\mathbf{F}: \quad 0 \longrightarrow F_m \xrightarrow{\varphi_m} F_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

un complesso di R-moduli liberi, con $R = k[x_0, \ldots, x_r]$ e k è algebricamente chiuso. Sia $X_i \subseteq \mathbf{A}_k^{r+1}$ l'insieme dei punti in cui il complesso $\mathbf{F}(p) :=$

$\mathbf{F} \otimes_R \kappa(p)$ *non è esatto in* $F_i(p)$*. Allora* $\mathbf{F}$ *è esatto se e solo se* X_i *è vuoto per ogni* i *oppure* $\operatorname{codim}(X_i) \geq i$ *per ogni* i*.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\mathbf{F}$ sia esatto e poniamo

$$r_i = \sum_{j=i}^{m} (-1)^j \operatorname{rk}(F_j)$$

Osserviamo però che, per il teorema del rango (che vale in virtù del fatto che gli F_i sono liberi)

$$\operatorname{rk}(\varphi_i) = \operatorname{rk}(F_i) - \operatorname{rk}(\ker \varphi_i) = \operatorname{rk}(F_i) - \operatorname{rk}(\varphi_{i+1})$$

in virtù dell'esattezza. Induttivamente si dimostra che $\operatorname{rk}(\varphi_i) = r_i$. Quindi la seconda condizione del Teorema di Buchsbaum-Eisenbud equivale a chiedere che $\operatorname{depth}(I_{r_i}(\varphi_i), R) \geq i$. Viceversa, supponiamo che $\operatorname{depth}(I_{r_i}(\varphi_i), R) \geq i$ per ogni $i \in I$. Sappiamo in generale che

$$\operatorname{rk}(\varphi_i) = \operatorname{rk}(F_i) - \operatorname{rk}(\ker(\varphi_i)) \geq \operatorname{rk}(F_i) - \operatorname{rk}(\varphi_{i+1})$$

da cui $\operatorname{rk}(\varphi_i) \geq r_i$. Inoltre vale anche che $\operatorname{rk}(\varphi_i) \leq \operatorname{rk}(F_i)$, quindi ancora $r_i = \operatorname{rk}(\varphi_i)$ e di nuovo le condizioni del Teorema di Buchsbaum-Eisenbud sono verificate.

Sia adesso

$$Y_i = \{p \in k^{r+1} \mid \operatorname{rk}(\varphi_i) < r_i\}$$

cioè l'insieme algebrico definito dall'ideale $I_{r_i}(\varphi_i)$. Poiché R è un anello di Cohen-Macaulay, allora profondità e dimensione coincidono, quindi $\operatorname{depth}(I_{r_i}(\varphi_i), R) = \dim(A_{I_{r_i}(\varphi_i)}) = \operatorname{codim}(Y_i)$. Dal Teorema di Eisenbud-Buchsbaum, segue allora che $\mathbf{F}$ è esatto se e solo se $\operatorname{codim}(Y_i) \geq i$ per ogni $i \geq 1$.

D'altra parte, il complesso $\mathbf{F}(p)$, essendo composto da k-spazi vettoriali finitamente generati, è esatto se e solo se $\operatorname{rk}(\varphi_{j,p}) + \operatorname{rk}(\varphi_{j+1,p}) = \dim_k(F_j(p))$ per ogni j, che è equivalente a chiedere che $\operatorname{rk}(\varphi_{j,p}) + \operatorname{rk}(\varphi_{j+1,p}) \geq \dim_k(F_j(p))$ e questo vale per ogni $j \geq i$ se e solo se $\operatorname{rk}(\varphi_j) \geq r_j$ per ogni $j \geq i$. Quindi $\mathbf{F}(p)$ è esatta in $F_j(p)$ per ogni $j \geq i$ se e solo se $p \notin \bigcup_{j \geq i} Y_j = Y_{(i)}$. Ora, la codimensione di $Y_{(i)}$ è il minimo delle codimensioni di Y_j per $j \geq i$, quindi $\operatorname{codim}(Y_{(i)}) \geq i$ per ogni i se e solo se $\operatorname{codim}(Y_i) \geq i$ per ogni i. In base a quanto detto prima, $\mathbf{F}$ è esatto se e solo se verifica le condizioni in ipotesi. $\square$

Una conseguenza del Teorema di Hilbert-Burch è che ogni ideale avente una risoluzione libera di lunghezza 1 possiede un elemento che non divide lo zero. Con il Teorema di Buchsbaum-Eisenbud possiamo provare qualcosa di più generale.

TEOREMA 5.5. (AUSLANDER-BUCHSBAUM) *Se un ideale* I *ha una risoluzione libera di lunghezza finita, allora contiene un elemento che non divide lo zero.*

DIMOSTRAZIONE. Si consideri la risoluzione libera

$$0 \longrightarrow F_m \xrightarrow{\varphi_m} F_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

Ora, l'ideale $I(\varphi_1)$ è esattamente uguale a I. Quindi per il Teorema di Buchsbaum-Eisenbud $\operatorname{depth}(I,R) = \operatorname{depth}(I(\varphi_1),R) \geq 1$, ossia I contiene un elemento che non divide lo zero. □

Prima di dimostrare il Teorema di Hilbert-Burch, occorre un risultato intermedio di algebra lineare.

LEMMA 5.2. *Sia Φ una matrice $(t+1) \times t$ ad entrate in un anello commutativo R e sia $a \in R$. Allora la composizione*

$$R^t \xrightarrow{\Phi} R^{t+1} \xrightarrow{\Delta} R$$

è zero, dove Δ è data dalla matrice riga $(a\Delta_1 \cdots a\Delta_{t+1})$ essendo Δ_i l'i-esimo minore d'ordine t, ottenuto rimuovendo la i-esima riga di Φ.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Phi = (a_{ij})$. Allora $\Delta\Phi$ ha componenti della forma

$$a \cdot \sum_j \Delta_j a_{ij}$$

che è l'espressione dello sviluppo di Laplace del determinante di una matrice $(t+1) \times (t+1)$, ottenuta ripetendo la i-esima colonna. Dalla teoria dei determinanti, segue subito che $\Delta\Phi = 0$. □

Adesso possiamo dimostrare il Teorema di Hilbert-Burch.

DIMOSTRAZIONE. *(Teorema di Hilbert-Burch)* Proviamo prima l'ultima affermazione; sia $I_t(\Psi)$ di profondità almeno 2 e sia a un elemento che non divide lo zero. Dobbiamo dimostrare che $I = a \cdot I_t(\Psi)$ ha una risoluzione libera di lunghezza unitaria. Poiché $I_t(\Psi)$ ha profondità almeno 2, la matrice Ψ ha rango t (non può avere rango maggiore) ed il rango della mappa Δ nel Lemma 5.2 è necessariamente 1. Quindi $I(\Delta) = I_1(\Delta) = a \cdot I(\Psi)$ e la profondità di $I(\Delta)$ è quindi almeno 1. Per il Teorema di Buchsbaum-Eisenbud, si può affermare che la successione

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\Psi} G \longrightarrow I \longrightarrow 0 \qquad (5.3.1)$$

è la risoluzione cercata di $I = a \cdot I(\Psi)$.

Proviamo adesso la prima parte. Dall'inclusione $I \subseteq R$ sappiamo che esiste una risoluzione libera di R/I della forma

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\Psi} G \xrightarrow{A} R$$

dove A è una mappa non nulla di rango 1. Per il Teorema di Buchsbaum-Eisenbud, deve risultare che $\operatorname{rk}(M) = t$ e $\operatorname{rk}(G) = t+1$. Allo stesso modo, deve essere che $\operatorname{depth}(I_t(\Psi),R) = \operatorname{depth}(I(\Psi),R) \geq 2$. Inoltre, si può dimostrare che, per ogni primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R/I_t(\Psi))$ vale

$$\dim(R_{\mathfrak{p}}) \leq 2$$

e quindi $\operatorname{depth}(I_t(\Psi), R) \leq \dim(R_{\mathfrak{p}}) \leq 2$; in definitiva $\operatorname{depth}(I_t(\Psi), R) = 2$. Sia $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_{t+1})$ la mappa come nel Lemma 5.2; dualizzando la successione (5.3.1) e restringendo, abbiamo che

$$0 \longrightarrow \hom(R, R) \xrightarrow{\Delta^\vee} \hom(G, R) \xrightarrow{\Psi^\vee} \hom(F, R)$$

è un complesso perché $\Psi^\vee \Delta^\vee = (\Delta\Psi)^\vee = 0$. Inoltre per il Teorema di Buchsbaum-Eisenbud è anche esatta: infatti $\operatorname{rk}(\hom(G, R)) = \operatorname{rk}(G) = \operatorname{rk}(\Psi) + \operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(\Psi^\vee) + \operatorname{rk}(A^\vee)$ e i gradi degli ideali sono compatibili. D'altra parte, l'immagine di Ψ è contenuta nel nucleo di A, quindi $\operatorname{im}(A^\vee) \subseteq \ker(\Psi^\vee)$, provocando l'esistenza di una mappa $a : R \longrightarrow R$ che rende commutativo il diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd}
\hom(R, R) \arrow[r, "A^\vee"] \arrow[d, "a"] & \hom(G, R) \arrow[r, "\Psi^\vee"] \arrow[d, "="] & \hom(F, R) \arrow[d, "="] \\
\hom(R, R) \arrow[r, "\Delta^\vee"] & \hom(G, R) \arrow[r, "\Psi^\vee"] & \hom(F, R)
\end{tikzcd}$$

La freccia a è rappresentata da una matrice 1×1, di cui chiameremo l'unica entrata ancora a, commettendo un lieve abuso di notazione. Per il Corollario 5.5, l'ideale I contiene un elemento che non è divisore dello zero; dal diagramma precedente, però, appare che $I = a \cdot I_t(M)$ è contenuto in (a), quindi a non è divisore dello zero.

Rimane da provare l'ultima affermazione. Dato che $I_t(\Psi)$ ha profondità 2, l'ideale $a \cdot I_t(\Psi)$ continua ad avere profondità 2 se e solo se a è un'unità di R. □

5.4. Invarianti delle risoluzioni.

Il Teorema di Hilbert Burch ci permette di studiare alcuni invarianti particolari che sorgono studiando le risoluzioni di insiemi di punti in $\mathbf{P}^2$. Nel seguito scriveremo $I_X \subseteq S$ per indicare l'ideale che definisce l'insieme $X \subseteq \mathbf{P}^2$, costituito da un numero finito di punti, e scriveremo $S_X = S/I_X$ per indicare l'anello delle coordinate omogenee di X. Sappiamo, per la Proposizione 5.3, che I_X ha dimensione proiettiva 1 ed S_X ha dimensione proiettiva 2. Supponiamo che la risoluzione libera minimale di S_X sia della forma

$$\mathbf{F} :\ 0 \longrightarrow F \xrightarrow{\Psi} G \longrightarrow S$$

dove G è un S-modulo libero di rango $t+1$; dal Teorema di Hilbert-Burch segue che F ha rango t. Scriviamo esplicitamente

$$G = \bigoplus_{i=1}^{t+1} S(-a_i), \quad F = \bigoplus_{i=1}^{t} S(-b_i)$$

dove $S(-a)$ indica l'S-modulo libero di rango 1 generato da elementi di grado a; in altre parole, i numeri a_i sono i gradi dei generatori minimali di $I = I_t(\Psi)$. Quindi il grado dell'elemento (i, j)-esimo della matrice Ψ è

$b_j - a_i$. Per ragioni che vedremo tra poco, a noi interessano gli elementi delle due diagonali principali di M: scriviamo allora $e_i := b_i - a_i$ e $f_i = b_i - a_{i+1}$.

Per evitare ambiguità, assumiamo che le basi in cui si esprimono F e G siano ordinate, cioè supponiamo che $a_1 \geq \ldots \geq a_{t+1}$ e $b_1 \geq \ldots \geq b_t$, ovvero $f_i \geq e_i$, $f_i \geq e_{i+1}$. Dato che le risoluzioni libere minimali sono uniche a meno d'isomorfismo, i numeri a_i, b_i, e_i ed f_i sono invarianti per isomorfismo; tuttavia non sono arbitrari ma determinati dagli interi e_i ed f_i.

Proposizione 5.5. *Se I è l'ideale di un insieme finito di punti in $\mathbf{P}^2$ e*

$$\mathbf{F}: \quad \cdots \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{t} S(-b_i) \xrightarrow{\Psi} \bigoplus_{i=1}^{t+1} S(-a_i) \longrightarrow S$$

è la risoluzione libera minimale per S/I ed e_i, f_i denotano i gradi delle entrate di Ψ sulle due diagonali principali, allora per ogni i abbiamo le seguenti proprietà:

- $e_i \geq 1$, $f_i \geq 1$;
- $a_i = \sum_{j<i} e_i + \sum_{j \geq i} f_i$;
- $b_i = a_i + e_i$ *e anche* $\sum_{i=1}^{t} b_i = \sum_{i=1}^{t+1} a_i$

Se inoltre le basi sono ordinate in maniera che $a_1 \geq \ldots \geq a_{t+1}$ e $b_1 \geq \ldots \geq b_t$, allora abbiamo $f_i \geq e_i$ e $f_i \geq e_{i+1}$.

Dimostrazione. L'ideale I ha codimensione 2 e S è un anello di Cohen-Macaulay, quindi I ha profondità 2. Ma allora, per il Teorema di Hilbert-Burch, l'elemento $a \in S$ che non divide lo zero ed è associato alla risoluzione $\mathbf{F}$ è invertibile in S; essendo S un anello di polinomi, a è scalare e quindi gli a_i sono proprio i gradi dei minori di Ψ.

Assumiamo, senza perdere di generalità, che le basi siano ordinate come in ipotesi. Proviamo che $e_i \geq 1$ (per come abbiamo ordinato le basi, seguirà anche che $f_i \geq 1$). Sia $\Psi = (m_{i,j})$; per la minimalità di $\mathbf{F}$, nessun $m_{i,j}$ può essere una costante non nulla (ricordiamo che $\delta(F_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$ con $\mathfrak{m}$ ideale irrilevante di S), quindi se $e_i \leq 0$ allora $m_{i,i} = 0$. Inoltre se $p \leq i$ e $q \geq i$ abbiamo

$$\deg(m_{p,q}) = b_q - a_p \leq b_i - a_i = e_i$$

per come abbiamo ordinato le basi. Quindi se $e_i \leq 0$, allora $m_{p,q} = 0$ per ogni (p, q) tali che $p \leq i$ e $q \geq i$. In questa maniera, si riesce a dimostrare che almeno un minore d'ordine t di Ψ è nullo; poiché per il Teorema di Hilbert-Burch esso dovrebbe essere un generatore minimale per I, troviamo una contraddizione. Quindi $e_i \geq 1$.

L'identità

$$a_i = \sum_{j<i} e_i + \sum_{j \geq i} f_i$$

segue dal Teorema di Buchsbaum-Eisenbud. Infatti a_i è il grado del determinante Δ_i ottenuto da Ψ rimuovendone la i-esima riga; un termine di tale determinante è in effetti

$$\prod_{j<i} m_{j,j} \cdot \prod_{j\geq i} m_{j+1,j}$$

Infine, essendo $e_i = b_i - a_i$, troviamo

$$\sum_{i=1}^{t} b_i = \sum_{i=1}^{t} a_i + \sum_{i=1}^{t} e_i = \sum_{i=1}^{t+1} a_i$$

come volevamo. □

La Proposizione 5.5 fornisce un limite superiore al numero minimale dei generatori per l'ideale dei punti che giacciono su una curva di dato grado. Tale stima era già nota prima che questo tipo di metodi fosse introdotto e, in effetti, è dimostrabile indipendentemente.

Corollario 5.6. *Se I è l'ideale omogeneo relativo ad un insieme di punti di $\mathbf{P}^2$ che giacciono su di una curva di grado d, allora può essere generato da $d+1$ elementi.*

Dimostrazione. Se $t+1$ è il numero minimo di generatori per I, allora, per la Proposizione 5.5, il grado a_i dell'i-esimo generatore minimale è la somma di t numeri che sono almeno 1, quindi $t \leq a_i$. Poiché la curva ha grado d, l'ideale I deve contenere un polinomio di grado d, quindi deve essere $a_i \leq d$ per qualche i. Segue $t+1 \leq d+1$ come volevamo. □

Se calcoliamo la funzione di Hilbert di un insieme X di punti in $\mathbf{P}^2$ (cioè del suo S-modulo delle coordinate) utilizzando le informazioni provenienti da una risoluzione libera, possiamo utilizzare il contributo degli invarianti e_i, f_i. $\mathrm{Hilb}_X(d)$ è costante quando d è molto grande e tale valore è il numero dei punti di X, cioè il grado $\deg X$.

Se X è ottenuto come intersezione completa (cioè, I_X ha $t+1=2$ generatori minimali) di due curve distinte, di grado e ed f rispettivamente, allora nelle notazioni precedenti abbiamo $t=1$, $e_1 = e$, $f_1 = f$. Il grado di X, per il Teorema di Bézout, sarebbe $ef = e_1 f_1$. Il risultato può essere generalizzato come segue.

Corollario 5.7. *Sia X un insieme finito di punti in $\mathbf{P}^2$. Allora, con le notazioni precedenti,*

$$\deg X = \sum_{i\leq j} e_i f_j$$

Dimostrazione. Si veda [6] per approfondire. □

5.5. Esempi.

In questo paragrafo discutiamo alcuni esempi della teoria esposta fin'ora.

Anzitutto, occupiamoci di determinare le possibili risoluzioni di un insieme di punti che giacciono su una conica irriducibile. Supponiamo che $X \subseteq \mathbf{P}^2$ sia un insieme di punti che giacciono su una conica definita da una forma quadratica q. Nelle notazioni precedenti, avremo che $a_{t+1} = 2$ e quindi essendo $a_{t+1} = \sum_{i=1}^{t} e_i$ abbiamo due sole possibilità: se $t = 1$, allora $e_1 = 2$ e se $t = 2$, allora $e_1 = e_2 = 1$.

- Se $t = 1$, allora X è intersezione completa di una conica e di una curva di grado $a_1 = d$, definita da un polinomio g. Sappiamo che $\deg X = 2d$ in virtù del Teorema di Bézout (o della formula citata sopra). Inoltre $b_1 = d+2$ e la risoluzione prende la forma seguente:
$$0 \longrightarrow S(-d-2) \xrightarrow{\varphi_2} S(-2) \oplus S(-d) \xrightarrow{\varphi_1} S \longrightarrow S_X$$
dove $\varphi_2 = (g \;\; -q)$ e $\varphi_1 = (q, g)$.
- Se invece $t = 2$, allora $e_1 = e_2 = 1$ e supponiamo che la conica $q = 0$ sia irriducibile. Utilizzando la Proposizione 5.5, la risoluzione assume la forma seguente:
$$0 \longrightarrow S(-1-f_1-f_2) \oplus S(-2-f_2) \xrightarrow{\Psi} S(-f_1-f_2) \oplus S(-1-f_2) \longrightarrow S$$
dove si è ovviamente assunto che $f_1 \geq e_1 = 1$ e $f_1 \geq e_2 = 1$ e $f_2 \geq e_2 = 1$. Per il Teorema di Hilbert-Burch, q è multiplo del determinante del minore d'ordine 2 di Ψ ottenuto rimuovendo la terza riga; dato che q è irriducibile, tutte le quattro componenti della sottomatrice di Ψ così ottenuta devono essere non nulle. Inoltre, l'elemento in alto a destra di M ha grado $e_1 + e_2 - f_1 \leq 1$ e se avesse grado nullo dovrebbe essere identicamente zero, contraddicento la minimalità della risoluzione. Quindi $e_1 + e_2 - f_1 = 1$, cioè $f_1 = 1$. Inoltre, $a_3 = \sum_{j<3} e_j = 2$ e del resto
$$a_1 = a_2 = 1 + f_2, \quad b_1 = b_2 = 2 + f_2$$
Si deduce allora che la risoluzione ha la forma seguente:
$$0 \longrightarrow S^2(-2-f_2) \longrightarrow S^2(-1-f_2) \oplus S(-2) \longrightarrow S$$
Utilizzando la formula per il grado, scopriamo che $\deg X = 2f_2 + 1$.
I due casi quindi sono distinguibili dalla parità del numero di punti.

Studiamo adesso i punti su una conica in maggior dettaglio. Sappiamo che lo spazio vettoriale delle forme quadratiche in 3 variabili ha dimensione 5; ne consegue che 5 punti distinti giacciono su un'unica conica, essendo il passaggio da un punto una condizione lineare. Possiamo quindi utilizzare le idee sviluppate fin'ora in questo paragrafo per studiare risoluzioni fino a 5 punti. Il caso più interessante è quello di 4 punti non collineari $X = \{p_1, \ldots, p_4\}$.

L'imposizione delle 4 condizioni di passaggio per una conica lascia liberi due parametri; quindi devono esistere almeno due coniche distinte contenenti X.

Supponiamo preliminarmente che nessuna tripla di punti di X giaccia su una retta. In tal caso l'unica possibilità è che X sia contenuto nell'intersezione delle due coniche seguenti, ognuna formata dall'unione di due rette:

$$C_1 := \overline{p_1 - p_2} \cup \overline{p_3 - p_4}, \qquad C_2 = \overline{p_1 - p_3} \cup \overline{p_2 - p_4}$$

In questo caso X è intersezione completa di C_1 e C_2 e la risoluzione ha la forma

$$0 \longrightarrow S(-4) \longrightarrow S^2(-2) \longrightarrow S$$

con numeri di Betti $\beta_{0,1} = 1, \beta_{1,2} = 2, \beta_{2,4} = 1$.

Supponiamo, invece, senza perdere di generalità, che p_1, p_2, p_3 giacciano su una retta L. Siano allora L_1 ed L_2 due rette per p_4 che non contengano nessuno dei punti p_1, p_2, p_3. Si capisce che X è contenuto nell'intersezione delle coniche

$$C_1 = L \cup L_1, \quad C_2 = L \cup L_2$$

In tale intersezione è contenuta anche la retta L; quindi X non è intersezione completa di C_1, C_2 e per il Corollario 5.6 l'ideale di X richiede esattamente tre generatori. Abbiamo allora, per la Proposizione 5.5,

$$a_1 = f_1 + f_2,\ a_2 = e_1 + f_2, \quad a_3 = e_1 + e_2$$

Poiché $a_3 = 2$, abbiamo $e_1 = e_2 = 1$. Dalla formula per il grado, abbiamo che

$$4 = e_1 f_1 + e_1 f_2 + e_2 f_2 = f_1 + 2f_2$$

cioè $f_1 = 2$ e $f_2 = 1$. I gradi dei generatori sono allora

$$a_1 = 3,\ a_2 = a_3 = 2, \qquad b_1 = 4,\ b_2 = 3$$

L'ideale di X è quindi generato dalle equazioni quadriche di C_1 e C_2 più una equazione cubica. Infatti la risoluzione ha la forma

$$S(-3) \oplus S(-4) \longrightarrow S^2(-2) \oplus S(-3) \longrightarrow S$$

Geometricamente, questo significa che quattro punti non allineati, di cui tre giacenti su una retta, appartengono all'intersezione di due coniche ed una cubica.

Parte 2

REGOLARITÀ SECONDO CASTELNUOVO-MUMFORD

CAPITOLO 6

Coomologia locale.

La trattazione seguente sulla coomologia locale e sulle varie strade percorribili per poterla descrivere attraverso altre teorie coomologiche si può trovare, in estrema sintesi, in [10] o in [9]. La referenza più completa sulla coomologia locale è comunque [14].

6.1. Definizioni principali.

Una definizione generale si può dare nel seguente modo. Sia $(X, \mathscr{O}_X)$ uno spazio anellato, sia $Z \subseteq X$ un chiuso e sia $\mathscr{F}$ un fascio di $\mathscr{O}_X$-moduli. Definiamo il funtore $\Gamma_Z : \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{AComm}$

$$\Gamma_Z(\mathscr{F}) = \ker(\rho^X_{X\setminus Z})$$

essendo $\rho^X_{X\setminus Z} : \Gamma(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(X\setminus Z, \mathscr{F})$ la mappa di restrizione. Ovviamente si ha anche

$$\begin{aligned} \Gamma_Z(\mathscr{F}) &= \{s \in \Gamma(X, \mathscr{F}) \mid \mathrm{supp}(s) \subseteq Z\} = \\ &= \{s \in \Gamma(X, \mathscr{F}) \mid s_x = 0 \text{ per ogni } x \in X\setminus Z\} \end{aligned}$$

Lemma 6.1. *Il funtore Γ_Z è esatto a sinistra.*

Dimostrazione. Sia $0 \longrightarrow \mathscr{F}_1 \xrightarrow{f} \mathscr{F}_2 \xrightarrow{f} \mathscr{F}_3 \longrightarrow 0$ una successione esatta di fasci di $\mathscr{O}_X$-moduli. Allora c'è un diagramma

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
& \Gamma_Z(\mathscr{F}_1) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "i_1"] & \Gamma_Z(\mathscr{F}_2) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "i_2"] & \Gamma_Z(\mathscr{F}_3) \arrow[d, "i_3"] \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X, \mathscr{F}_1) \arrow[r, "f_X"] \arrow[d, "\rho^X_{X\setminus Z}"] & \Gamma(X, \mathscr{F}_2) \arrow[r, "g_X"] \arrow[d, "\rho^X_{X\setminus Z}"] & \Gamma(X, \mathscr{F}_3) \arrow[d, "\rho^X_{X\setminus Z}"] \\
& \Gamma(X\setminus Z, \mathscr{F}_1) \arrow[r, "f_{X\setminus Z}"] & \Gamma(X\setminus Z, \mathscr{F}_2) \arrow[r, "g_{X\setminus Z}"] & \Gamma(X\setminus Z, \mathscr{F}_3)
\end{tikzcd}$$

che commuta poiché f, g sono morfismi di fasci. Ora, ovviamente abbiamo che

$$\ker(p) = \ker(i_2 \circ p) = \ker(f_X \circ i_1) = 0$$

quindi il funtore Γ_Z è esatto, come volevamo. □

Grazie al Lemma, il funtore Γ_Z ha i suoi funtori derivati destri, che chiamiamo $H^i_Z(-)$; in particolare, per ogni fascio di $\mathscr{O}_X$-moduli, definiamo $H^i_Z(\mathscr{F})$ l'i-esimo *gruppo di coomologia locale di $\mathscr{F}$ a supporto in Z*. Questa definizione funziona, in particolare, nella categoria dei fasci quasi-coerenti su uno schema X.

Supponiamo che $X = \operatorname{Spec}(A)$ sia una schema affine, per un anello A, e sia $Z = V(I)$ per qualche ideale $I \subseteq A$. Sappiamo allora che $\mathscr{F} = M^\sim$ per qualche A-modulo M. La definizione di coomologia locale può essere data nel modo seguente. Definiamo

$$H^0_I(M) := \{m \in M \mid mI^r = 0 \text{ per qualche } r \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \geq 0} (0 :_M I^n)$$

Un'altra descrizione si può ottenere nel seguente modo: si osservi che ogni elemento $m \in (0 : I^n)$ dà luogo ad un morfismo lineare $A/I^n \longrightarrow M$, mediante $1 + I^n \mapsto m$; esso è ben definito poiché, se $a + I^n = b + I^n$ allora $a - b \in I^n$ e

$$a + I^n = am, \quad b + I^n \mapsto bm$$

ma $(b-a)m = 0$, poiché m è annichilito da I^n. Viceversa, è chiaro che ogni mappa lineare $f : A/I^n \longrightarrow M$ definisce un elemento $f(1+I^n) \in (0 :_M I^n)$. Inoltre, se $n \leq m$, è chiaro che $A/I^n \subseteq A/I^m$. In sostanza, avendosì $(0 :_M I^n) \simeq \hom_A(A/I^n, M)$, possiamo esprimere

$$H^0_I(M) \simeq \lim_{n\to\infty} \hom_A(A/I^n, M)$$

dove il limite induttivo è banale, poiché tutte le mappe sono iniezioni. Otteniamo così un funtore esatto a sinistra $\mathbf{Mod}_A \longrightarrow \mathbf{Mod}_A$ mediante $M \mapsto H^0_I(M)$, che dà luogo a funtori derivati destri $H^i_I(-)$; l'i-esimo funtore derivato destro $H^i_I(M)$ è chiamato i-esimo modulo di coomologia locale di M a supporto in $V(I)$. Se $(A, \mathfrak{m})$ è un anello locale, allora $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ è detto semplicemente i-esimo *modulo di coomologia locale di M*. Si capisce che

$$H^0_I(M) = \ker(M \longrightarrow \Gamma(\operatorname{Spec}(A) \backslash V(I), \widetilde{M}))$$

quindi in realtà $H^0_I(M) = \Gamma_{V(I)}(\widetilde{M})$, coerentemente con la definizione precedente.

Si osservi ora che l'i-esimo funtore derivato destro di $\hom_A(A/I^n, M)$ è $\operatorname{Ext}^i_A(A/I^n, M)$ e cioè che

$$H^i_I(M) \simeq \lim_{n\to\infty} \operatorname{Ext}^i_A(A/I^n, M)$$

I moduli di coomologia locale conservano alcune proprietà dei funtori Ext^i_A, tra cui la proprietà della successione lunga.

Lemma 6.2. *Ogni elemento di $H^i_I(M)$ è annullato da una potenza di I.*

Dimostrazione. Per come abbiamo caratterizzato $H^i_I(M)$, ogni suo elemento è nell'immagine omomorfa di qualche $\operatorname{Ext}^i_A(R/I^n, M)$, che è annullato da I^n. $\square$

LEMMA 6.3. *Supponiamo che* $\{J_n\}_{n\geq 0}$ *sia una successione decrescente di ideali, cofinale con* $\{I_n\}$ *(ossia, per ogni* I_n *esiste un* $J_{\alpha(n)}$ *tale che* $I_n \subseteq J_{\alpha(n)}$*). Allora*

$$H^i_I(M) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Ext}^i_A(A/J^n, M)$$

DIMOSTRAZIONE. Insiemi cofinali hanno lo stesso limite induttivo. □

PROPOSIZIONE 6.1. *Se due ideali* $I, J \subseteq A$ *hanno lo stesso radicale, allora* $H^i_I(M) \simeq H^i_J(M)$ *per ogni* $i \geq 0$*. Inoltre, se* $I = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $I_s = (x_1^s, \ldots, x_n^s)$*, allora* $H^i_I(M) = H^i_{I_s}(M)$ *per ogni* $i \geq 0$ *e per ogni* $s > 0$*.*

DIMOSTRAZIONE. Sapendo che $\sqrt{I} = \sqrt{J}$, tutte le potenze di I sono contenute in qualche potenza di J, quindi le due successioni $\{J_n\}$ e $\{I_n\}$ sono l'una cofinale dell'altra. Per il Lemma 6.3, la coomologia locale non cambia:

$$H^i_I(M) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Ext}^i_A(A/J^n) = H^i_J(M)$$

Si vede inoltre che $\sqrt{I_s} = \sqrt{I}$, quindi la tesi segue dal passaggio precedente. □

La proprietà rilevante è racchiusa nel seguente Teorema.

TEOREMA 6.1. *Siano* M', M, M'' *tre* A*-moduli finitamente generati e sia* $I \subseteq A$ *un ideale. Supponiamo che*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

sia una successione esatta. Allora esiste una successione esatta lunga di coomologia locale:

$$\cdots \longrightarrow H^n_I(M') \longrightarrow H^n_I(M) \longrightarrow H^n_I(M'') \longrightarrow H^{n+1}_I(M') \longrightarrow \cdots$$

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che, data la successione esatta corta in ipotesi, esiste una successione esatta lunga che coinvolge i funtori d'estensione, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}^p_A(A/I^n, M') \longrightarrow \operatorname{Ext}^p_A(A/I^n, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^p_A(A/I^n, M'') \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \operatorname{Ext}^{p+1}_A(A/I^n, M) \longrightarrow \cdots$$

Poiché i limiti diretti conservano l'esattezza delle successioni, passando al limite per $n \to \infty$, come fatto precedentemente, si trova la successione cercata. □

Si può dimostrare che la coomologia locale è legata alla profondità, nel modo seguente.

PROPOSIZIONE 6.2. *Siano* A *un anello noetheriano e* M *un* A*-modulo finitamente generato. Se* $I \subseteq A$ *è un ideale tale che* $IM \neq M$*, allora*

$$\operatorname{depth}(I, M) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid H^i_I(M) \neq 0\}$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $s = \min\{i \in \mathbb{N} \mid H^i_I(M) \neq 0\}$. Se $s = 0$, allora sappiamo che per qualche $n > 0$ il modulo $\hom_A(A/I^n, M)$ non è nullo, quindi I^n contiene almeno un elemento che non è M-regolare, cioè esiste $x \in I^n$ tale che $xM = 0$. Quindi $I^n \subseteq \mathfrak{p}$ per qualche primo associato $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. Ma allora, per primalità, anche $I \subseteq \mathfrak{p}$ e si ha

$$0 \neq \hom_A(A/\mathfrak{p}, M) \subseteq \hom_A(A/I, M)$$

Questo prova che $\mathrm{depth}(I, M) = 0$. Viceversa, se $\mathrm{depth}(I, M) = 0$, allora

$$0 \neq \hom_A(A/I, M) \subseteq \lim_{n\to\infty} \hom_A(A/I^n, M) = H^0_I(M)$$

come volevamo.

Sia ora $s > 0$; quindi necessariamente $\mathrm{depth}(I, M) > 0$, per quanto osservato. Sia $x \in I$ un elemento regolare per M (cioè che non divide lo zero); allora abbiamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0$$

Allora esiste una successione esatta lunga

$$\cdots \longrightarrow H^{i-1}_I(M) \longrightarrow H^{i-1}_I(M/xM) \longrightarrow H^i_I(M) \longrightarrow \cdots$$

da cui, per ipotesi induttiva, $H^{i-1}_I(M/xM) = 0$. Abbiamo quindi la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^{s-1}_I(M/xM) \longrightarrow H^s_I(M) \xrightarrow{x} H^s_I(M) \longrightarrow \cdots$$

Dato che $H^s_I(M) \neq 0$, la mappa x non può essere iniettiva; infatti x^n annichilisce $\mathrm{Ext}^s_A(A/I^n, M)$ e quindi anche $H^i_I(M)$. Ne consegue che $H^{s-1}_I(M/xM) \neq 0$. Per ipotesi induttiva, deduciamo che $\mathrm{depth}(I, M/xM) = s - 1$ e che, essendo x un elemento M-regolare, $\mathrm{depth}(I, M) = s$. $\square$

Osservazione 6.1. Ricordiamo che, nelle ipotesi della Proposizione,

$$\mathrm{depth}(I, M) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}^i_A(A/I, M) \neq 0\}$$

Quindi è possibile trasformare buona parte degli enunciati che coinvolgono la coomologia locale in enunciati che coinvolgono i funtori d'estensione.

6.2. Coomologia locale, complesso di Čech e coomologia dei fasci.

In questo paragrafo descriviamo un modo per calcolare la coomologia locale a partire dalla coomologia di Čech, in modo che sia evidente una importante relazione con la coomologia dei fasci coerenti. Sia A un anello noetheriano e sia M un A-modulo finitamente generato. Se $I = (x_1, \ldots, x_n)$ è un ideale e $s > 0$ è un intero, scriviamo $x^s_\bullet$ per indicare la successione $x^s_1, \ldots, x^s_n$ e consideriamo il complesso di Koszul $\mathbf{Kosz}(x^s_\bullet, M) := \mathbf{Kosz}(x^s_\bullet) \otimes_A M$ visto come complesso coomologico. Abbiamo, per ogni $s > 0$,

$$H^0(\mathbf{Kosz}(x^s_\bullet, M)) = (0 :_M (x^s_\bullet))$$

I complessi di Koszul così costruiti possono essere organizzati in un sistema induttivo, usando le mappe

$$\mathbf{Kosz}(x_\bullet^s) \longrightarrow \mathbf{Kosz}(x_\bullet^{s+1})$$

che in grado uno sono indotte dalla mappa $A^n \longrightarrow A^n$ che agisce moltiplicando la i-esima componente per x_i. Nello 0-esimo modulo di coomologia, tali mappe inducono delle inclusioni

$$(0 :_M (x_\bullet^s)) \subseteq (0 :_M (x_\bullet^{s+1}))$$

Sia ora

$$\mathbf{Kosz}(x_\bullet^\infty) := \lim_{s\to\infty} \mathbf{Kosz}(x_\bullet^s)$$

e sia $\mathbf{Kosz}(x_\bullet^\infty, M) := \mathbf{Kosz}(x_\bullet^\infty) \otimes_A M$. Otteniamo allora

$$H_I^0(M) = \lim_{s\to\infty} H^0(\mathbf{Kosz}(x_\bullet^s, M)) = H^0(\mathbf{Kosz}(x_\bullet^\infty, M)) \tag{6.2.1}$$

in base alla definizione dello 0-esimo modulo di coomologia locale. Ma allora otteniamo isomorfismi per ogni $i \geq 0$:

$$H_I^i(M) \simeq H^i(\mathbf{Kosz}(x_\bullet^\infty, M))$$

poiché entrambi i membri sono funtori derivati destri del medesimo funtore, come mostrato in (6.2.1). Non è difficile dimostrare che $\mathbf{Kosz}(x_\bullet^\infty)$ coincide con il complesso di Čech siffatto (si veda [9]):

$$\check{\mathbf{C}}(x): \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow \bigoplus_{1\leq i\leq n} A_{x_i} \longrightarrow \bigoplus_{1\leq i_1<i_2\leq n} A_{x_{i_1}x_{i_2}} \longrightarrow \cdots$$

Abbiamo quindi

$$H_I^i(M) = H^i(\check{\mathbf{C}}(x) \otimes_A M) \tag{6.2.2}$$

Vediamo come è possibile collegare questi ragionamenti alla coomologia dei fasci coerenti su uno schema.

Preso $A = k[x_0, \ldots, x_r]$ l'anello graduato dei polinomi e $I = \mathfrak{m}$ l'ideale irrilevante, sia M un A-modulo e $\widetilde{M}$ l'usuale fascio quasi-coerente su $X = \mathbf{P}_k^r$. È possibile stabilire una relazione fra la coomologia di $\widetilde{M}$ come fascio su X e la coomologia locale di M, come A-modulo. Sia $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ il ricoprimento aperto formato dagli aperti fondamentali $U_i := X \setminus V(x_i)$; allora possiamo costruire il complesso delle cocatene di Čech per il fascio $\widetilde{M}$ relativo a $\mathfrak{U}$, cioè

$$\check{\mathbf{C}}(\mathfrak{U}, \widetilde{M}) : 0 \longrightarrow \bigoplus_{0\leq i_1\leq r} M_{(x_{i_1})} \longrightarrow \bigoplus_{0\leq i_1<i_2\leq r} M_{(x_{i_1}x_{i_2})} \longrightarrow \cdots$$

Tale complesso è la parte di grado zero del complesso $\check{\mathbf{C}}(x)_{\mathrm{tr}} \otimes_A M$, dove

$$(\check{\mathbf{C}}(x)_{\mathrm{tr}})^i := (\check{\mathbf{C}}(x))^{i+1}$$

è il complesso di Čech troncato. Quindi, per l'additività della coomologia,

$$H^i(\check{\mathbf{C}}(\mathfrak{U}, \widetilde{M})) \simeq H^i(\check{\mathbf{C}}(x)_{\mathrm{tr}} \otimes_A M)_0$$

Dato che

$$H^i(\mathbf{P}^r_k, \widetilde{M}) \simeq H^i(\check{\mathbf{C}}(\mathfrak{U}, \widetilde{M})) \simeq H^i(\check{\mathbf{C}}(x)_{\mathrm{tr}} \otimes_A M)_0 \simeq H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)_0$$

operando un generico twist si ha che

$$H^i(\mathbf{P}^r_k, \widetilde{M}(n)) \simeq H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)_n$$

Quindi

$$H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^i(\mathbf{P}^r_k, \widetilde{M}(n)) \tag{6.2.3}$$

per ogni $i \geq 1$.

L'isomorfismo fallisce per $i = 0$; si osservi infatti che i funtori

$$\begin{aligned} \mathbf{QCohSh}(\mathbf{P}^r_k) &\longrightarrow \mathbf{Mod}_A \\ \mathscr{F} &\mapsto \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(\mathbf{P}^r_k, \mathscr{F}(n)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{Mod}_A &\longrightarrow \mathbf{QCohSh}(\mathbf{P}^r_k) \\ M &\mapsto \widetilde{M} \end{aligned}$$

non sono l'uno l'inverso dell'altro, dato che in generale

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(\mathbf{P}^r_k, \widetilde{M}(n)) \neq M$$

Si può dimostrare, comunque, che il comportamento in grado 0 è determinato dalla seguente successione esatta:

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(\mathbf{P}^r_k, \widetilde{M}(n)) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow 0 \tag{6.2.4}$$

6.3. Altri risultati.

Quanto segue è sostanzialmente un'applicazione degli strumenti richiamati nei paragrafi precedenti.

Corollario 6.1. *Se $I = (x_1, \dots, x_t)$ allora $H^i_I(M) = 0$ se $i > t$.*

Dimostrazione. Sappiamo che $H^i_I(M) = H^i(\check{\mathbf{C}}(x) \otimes_A M)$ se $i > 0$ e del resto il complesso di Čech ha lunghezza $t > 0$. □

Corollario 6.2. *Sia M un S-modulo graduato di lunghezza finita, con $S = k[x_0, \dots, x_r]$. Allora $H^0_I(M) = M$ e $H^i_I(M) = 0$ per $i > 0$.*

Osservazione 6.2. (Cambio d'anello) Sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un morfismo di anelli e sia $I \subseteq A$ un ideale. Ricordiamo che l'*estensione* di I tramite φ è l'ideale $e(I)$ generato da $\varphi(A)$ in B. Ora, se M è un B-modulo, tramite la mappa φ lo si può riguardare come A-modulo. Tuttavia, la relazione di *cambio d'anello* (o di base) è più complessa di quello che appare: non è possibile, infatti, stabilire un legame fra $\mathrm{Ext}^i_A(A/I^n, M)$ e $\mathrm{Ext}^i_B(B/e(I)^n, M)$

senza l'uso delle successioni spettrali. Tuttavia, un risultato significativo si ha passando al limite induttivo per $n \to \infty$.

Proposizione 6.3. *Sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un morfismo d'anelli noetheriani. Con la notazione precedente, abbiamo un isomorfismo $H^i_I(M) \simeq H^i_{e(I)}(M)$.*

Dimostrazione. Se $x \in A$ è un generico elemento, allora la localizzazione M_x è la stessa, sia che si pensi M come A-modulo che come B-modulo: infatti, M_x è l'insieme delle coppie ordinate (m, x^n) a meno della relazione d'equivalenza che identifica (m, x^n) con $(m', x^{n'})$ se e solo se $x^r(mx^{n'} - m'x^n) = 0$ per qualche $r \geq 0$. Quindi, non coinvolgendo la struttura di modulo, il complesso di Čech non cambia, lasciando quindi invariata la coomologia locale per le considerazioni fatte fin'ora. $\square$

Esistono anche dei risultati di *dualità locale* per la coomologia (vedere [10]).

Proposizione 6.4. *Sia $S = k[x_0, \dots, x_r]$ e sia $\mathfrak{m} = (x_0, \dots, x_s)$ l'ideale irrilevante. Allora $H^i_{\mathfrak{m}}(S) = 0$ per $i < r + 1$ e $H^{r+1}_{\mathfrak{m}}(S) \simeq S(-r-1)^\vee$, dove $^\vee$ indica il modulo duale graduato.*

Teorema 6.2. *Siano $S = k[x_0, \dots, x_r]$ e $\mathfrak{m} = (x_0, \dots, x_r)$ l'ideale irrilevante. Se M è un S-modulo graduato e finitamente generato, allora $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ è (come S-modulo) un k-spazio vettoriale, duale ad $\mathrm{Ext}^{r+1-i}_S(M, S(-r-1))$.*

Infine, presentiamo un risultato di annullamento della coomologia in relazione alla profondità e alla dimensione di un modulo.

Teorema 6.3. *Sia M un S-modulo graduato e finitamente generato. Allora*

1. (Grothendieck) *se $i < \mathrm{depth}(\mathfrak{m}, M)$ oppure $i > \dim_S(M)$, allora $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$;*
2. *se $i = \mathrm{depth}(\mathfrak{m}, M)$ oppure $i = \dim(M)$, allora $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$.*

Dimostrazione. Dato che

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ext}^i_S(S/\mathfrak{m}^n, M)$$

e dato che $\mathrm{Ext}^i_S(S/\mathfrak{m}^n, M) = 0$ per ogni $i > \mathrm{depth}(\mathfrak{m}, M)$ e

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{depth}(\mathfrak{m},M)}_S(S/\mathfrak{m}^n, M) \neq 0$$

, la parte che riguarda la profondità è evidente. La parte sulla dimensione invece si dimostra osservando che S è un anello di Cohen-Macaulay, quindi $\mathrm{codim}_S(M) := \dim(S_{\mathrm{Ann}_S(M)}) = \mathrm{depth}(\mathrm{Ann}_S(M), S)$. $\square$

CAPITOLO 7

Complesso di Eagon-Northcott.

7.1. Algebra simmetrica.

In questo paragrafo affrontiamo brevemente i dettagli formali dell'algebra simmetrica, analoga all'algebra esterna utilizzata in svariati contesti dell'algebra omologia. I dettagli sono affrontati in [3].

Ricordiamo che, dati un anello A e un A-modulo M, si definisce l'*algebra tensoriale* di M come l'A-modulo

$$T(M) := \bigoplus_{n\geq 0} T^n(M)$$

che ha la struttura di A-algebra graduata secondo $T^n(M) := \bigotimes_A^n M$.

Definizione 7.1. L'*algebra simmetrica* di M è l'algebra quoziente $\bigodot M$ ottenuta da $T(M)$ modulo l'ideale I generato dagli elementi della forma $x \otimes y - y \otimes x \in T(M)$, per ogni $x, y \in M$.

Denoteremo con $x \odot y$ la classe d'equivalenza del prodotto $x \otimes y \in T(M)$. L'ideale I è generato da elementi omogenei e quindi è graduato; ponendo infatti $I_p := I \cap T^p(M)$ per ogni $p \geq 0$, si determina una graduazione di $\bigodot M$, detta *canonica*, dove i termini di grado p sono

$$\bigodot^p M := T^p(M)/I_p$$

Ora, essendo $I_0 = I_1 = \{0\}$, possiamo identificare canonicamente $\bigodot^0 M \simeq A$ e $\bigodot^1 M \simeq T^1(M) = M$. Chiameremo $\varphi_M : M \longrightarrow \bigodot M$ l'immersione canonica che viene definita conseguentemente.

Poiché per definizione $\varphi(x) \odot \varphi(y) = \varphi(y) \odot \varphi(x)$ per $x, y \in M$ e gli elementi $\varphi(x)$ generato $\bigodot M$, possiamo affermare che l'algebra simmetrica è un'algebra commutativa. La costruzione è inoltre *universale* nel senso seguente.

Proposizione 7.1. (Proprietà universale dell'algebra simmetrica) *Siano G una A-algebra e $f : M \longrightarrow G$ un morfismo A-lineare tale che $f(x)f(y) = f(y)f(x)$ per ogni $x, y \in M$. Allora esiste un'unico morfismo di A-algebre $g : \bigodot M \longrightarrow G$ tale che $f = g \circ \varphi_M$.*

Osservazione 7.1. Supponiamo che G sia una A-algebra *graduata* e supponiamo che $F : M \longrightarrow G$ sia tale che $f(M) \subseteq G_1$. Allora la relazione

$$g(x_1 \odot \ldots \odot x_p) = f(x_1) \cdots f(x_p)$$

con $x_i \in M$ mostra che $g\left(\bigodot^p M\right) \subseteq G_p$ per ogni $p \geq 0$, ovvero, in altri termini, che g è un morfismo di algebre graduate.

Si può dimostrare che la corrispondenza

$$\bigodot : \mathbf{Mod}(A) \longrightarrow \mathbf{Alg}(A)$$

definita mediante $M \mapsto \bigodot M$ si estende ad un funtore (covariante), nel senso che per ogni morfismo di A-moduli f esiste un unico morfismo di A-algebre $\bigodot f$ che soddisfa le note proprietà funtoriali.

Nel caso rilevante in cui M è finitamente generato, si può dimostrare che $\bigodot M$ è altresì finitamente generato; in particolare, fissato un sistema di generatori $\{m_1, \ldots, m_r\}$ per M, ogni componente omogenea $\bigodot^p M$ è generata dai prodotti $x_{i_1} \odot \ldots \odot x_{i_p}$ per $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_p \leq r$. Ne segue che il rango di $\bigodot^p M$ è espresso come

$$\binom{r+p-1}{p}$$

essendo r il rango di M.

Terminiamo descrivendo il comportamento dell'algebra simmetrica rispetto alla somma diretta. Sia

$$M := \bigoplus_{n \geq 0} M_n$$

un A-modulo definito come somma diretta di A-moduli M_n e siano $j_n : M_n \longrightarrow M$ le iniezioni canoniche. Vengono allora indotti dei morfismi di A-algebre $J_n : \bigodot M_n \longrightarrow \bigodot M$; poiché $\bigodot M$ è commutativa, la proprietà universale del prodotto tensoriale afferma l'esistenza di un'unica mappa

$$g : \bigotimes_{n \geq 0} \left(\bigodot M_n\right) \longrightarrow \bigodot M$$

tale che $J_n = g \circ f_n$ dove

$$f_n : \bigodot M_n \longrightarrow \bigotimes_{n \geq 0} \left(\bigodot M_n\right)$$

è il morfismo canonico. Si può dimostrare in realtà, che g è un isomorfismo *graduato*, cioè che

$$\bigodot\left(\bigoplus_{n \geq 0} M_n\right) \simeq \bigotimes_{n \geq 0} \left(\bigodot M_n\right)$$

7.2. Costruzione.

Sia R un anello e siano $F = R^n, G = R^m$ due R-moduli liberi, con $n \geq m$. Sia $f : F \longrightarrow G$ un morfismo di R-moduli. Il *complesso di Eagon-Northcott* di f (o di una sua qualunque rappresentazione matriciale) è la successione di R-moduli

$$\mathbf{EN}(f):\ 0 \longrightarrow \left(\bigodot^{n-m} G\right)^{\vee} \otimes_R \left(\bigwedge^{n} F\right) \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} \left(\bigodot^{n-m-1} G\right)^{\vee} \otimes_R \left(\bigwedge^{n-1} F\right) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(\bigodot^{2} G\right)^{\vee} \otimes_R \left(\bigwedge^{m+2} F\right) \xrightarrow{\partial}$$
$$\longrightarrow G^{\vee} \otimes_R \left(\bigwedge^{m+1} F\right) \xrightarrow{\partial} \bigwedge^{m} F \xrightarrow{\bigwedge^m f} \bigwedge^{m} G \simeq R$$

dove $M^{\vee} := \mathrm{Hom}_R(M, R)$; i differenziali sono definiti come segue: definiamo prima una mappa diagonale

$$\Delta : \left(\bigodot^{p} G\right) \longrightarrow G^{\vee} \otimes_R \left(\bigodot^{p-1} G\right)^{\vee}$$

come la mappa duale della moltiplicazione

$$G \otimes_R \left(\bigodot^{p-1} G\right) \longrightarrow \bigodot^{p} G$$
$$u \otimes (u_1 \odot \ldots \odot u_{p-1}) \mapsto u \odot u_1 \odot \ldots \odot u_{p-1}$$

Definiamo poi una mappa analoga

$$\nabla : \bigwedge^{p} F \longrightarrow F \otimes \left(\bigwedge^{p-1} F\right)$$

duale della mappa di moltiplicazione

$$F^{\vee} \otimes_R \left(\bigwedge^{p-1} F\right)^{\vee} \longrightarrow \left(\bigwedge^{p} F\right)^{\vee}$$
$$u^* \otimes (u_1^* \wedge \ldots \wedge u_{p-1}^*) \mapsto u^* \wedge u_1^* \wedge \ldots \wedge u_{p-1}^*$$

In componenti, possiamo descrivere in questo modo l'azione delle due mappe:

$$\Delta(u) := \sum_i u_i' \otimes u_i'', \qquad \nabla(v) := \sum_i v_i' \otimes v_i''$$

dove $u_i' \in G^{\vee}, u_i'' \in \left(\bigodot^{p-1} G\right)^{\vee}$ e $v_j' \in F, v_j'' \in \bigwedge^{p-1} F$. Con queste notazioni, possiamo definire il differenziale p-esimo come il morfismo

$$\partial_p : \left(\bigodot^{p-1} G\right)^{\vee} \otimes_R \bigwedge^{n+p-1} F \longrightarrow \left(\bigodot^{p-2} G\right)^{\vee} \otimes_R \bigwedge^{n+p-2} F$$
$$\xi \otimes \omega \mapsto \sum_i \left(f^{\vee}_{u_i'}(v_i') u_i''\right) \otimes v_i''$$

dove $f^{\vee} : G^{\vee} \longrightarrow F^{\vee}$ è il morfismo duale di f e $f^{\vee}_{u_i''} : F \longrightarrow R$ è l'immagine di u_i' in $F^{\vee}$ sotto $f^{\vee}$. Mediante un calcolo esplicito, si può dimostrare che la successione $\mathbf{EN}(f)$ è un complesso di R-moduli.

Si osservi che la costruzione del complesso di Eagon-Northcott sintetizza le stesse informazioni sull'ideale dei minori massimali di f, cioè il conucleo di $\bigwedge^m f : \bigwedge^m F \longrightarrow \bigwedge^m G$, di quelle che il complesso di Koszul estrapola da una successione di elementi in R. Infatti, non è difficile vedere che il complesso di Koszul è un caso particolare di questa costruzione e si ottiene per $m = 1$.

Le considerazioni fatte fino ad ora si possono estendere alla classe dei fibrati vettoriali su uno schema X. In particolare, dato un morfismo di fibrati vettoriali $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$, è definito il relativo complesso di Eagon-Northcott $\mathbf{EN}(\varphi)$ ponendo

$$\mathbf{EN}(\varphi)_p := \left(\bigodot^{p-1}\mathscr{G}\right)^{\vee} \otimes_{\mathscr{O}_X} \bigwedge^{\mathrm{rk}(\mathscr{G})+p-1}\mathscr{F}$$

per ogni $p > 0$ e $\mathbf{EN}(\varphi)_0 := \mathscr{O}_X$, dove si intende $\mathscr{M}^{\vee} := \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X)$.

Per maggiori dettagli si rimanda a [8].

CAPITOLO 8

Regolarità di moduli e fasci.

8.1. Regolarità di moduli e coomologia locale.

Diamo la seguente definizione di natura algebrica.

Definizione 8.1. Sia M un S-modulo graduato e finitamente generato. Si consideri la risoluzione libera minimale di M:

$$\mathbf{F}: \quad \cdots \longrightarrow F_i \longrightarrow F_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0$$

dove

$$F_i = \bigoplus_j S(-a_{i,j})^{\beta_{i,j}}$$

Allora la *regolarità di Castelnuovo-Mumford* di M è definita come

$$\operatorname{reg}(M) := \max\{a_{i,j} - i \mid i \geq 0, j \geq 0\}$$

Per come sono definiti i numeri di Betti, possiamo esprimere $\operatorname{reg}(M)$ come il più grande intero q tale che $\beta_{i,i+q}(M) \neq 0$, al variare di $i \geq 0$. In quanto segue, daremo una caratterizzazione della regolarità utilizzando la coomologia locale e ne presenteremo in seguito alcune applicazioni.

Teorema 8.1. *Sia M un S-modulo graduato e finitamente generato e sia d un intero. Chiamiamo $\mathfrak{m} = (x_0, \ldots, x_r)$ l'ideale irrilevante. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $d \geq \operatorname{reg}(M)$*;*
2. $d \geq \max\{e \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M)_e \neq 0\} + i$ *per ogni* $i \geq 0$*;*
3. $d \geq \max\{e \mid H^0_{\mathfrak{m}}(M)_e \neq 0\}$ *e* $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{d-i+1} = 0$ *per ogni* $i > 0$.

Introduciamo la seguente terminologia: un S-modulo M si dice *debolmente d-regolare* se $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{d-i+1} = 0$ per ogni $i > 0$ e si dice *d-regolare* se è debolmente d-regolare e $d \geq \operatorname{reg}(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$.

Osservazione 8.1. Il Teorema afferma che M è d-regolare se e solo se $d \geq \operatorname{reg}(M)$. Infatti, sappiamo che M è d-regolare se e solo se

$$\begin{cases} H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{d-i+1} = 0 & i > 0 \\ d \geq \operatorname{reg}(H^0_{\mathfrak{m}}(M)) \end{cases}$$

Ma del resto, per come è definita la regolarità di un modulo, si ha che $d \geq \operatorname{reg}(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$ se e solo se $H^0_{\mathfrak{m}}(M)_e = 0$ per ogni $e > d$. Quindi, $d \geq \max\{e \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M)_e \neq 0\} + i$ per ogni $i \geq 0$ se e solo se $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{d-i+1} = 0$ per ogni $i > 0$ e $H^0_{\mathfrak{m}}(M)_{d+1} = 0$, il che è vero se e solo se M è d-regolare.

L'osservazione fatta permette dunque di ottenere una definizione diversa, ma equivalente, di regolarità: con le precedenti notazioni scriviamo

$$\operatorname{reg}(M) = \min\{d \mid M \text{ è } d\text{-regolare}\} \tag{8.1.1}$$

Una definizione di questa natura ha il notevole pregio di dipendere solamente dall'algebra omologica di M, in particolare dalla sua coomologia locale; questo garantirebbe dimostrazioni più semplici e, in linea di principio, maggiori possibilità di estensione. Tuttavia, perché la definizione sia utile, è necessario dimostrare che la d-regolarità non richiede *implicitamente* il concetto di regolarità di Castelnuovo-Mumford; in altre parole, occorre provare che i moduli di coomologia locale hanno regolarità banalmente calcolabile. Questo sarà una conseguenza del fatto che tali moduli sono tutti artiniani (si veda la sezione successiva).

Ricordiamo che, per ogni $x \in S$, è definito

$$(0 :_M x) := \{m \in M \mid xm = 0\}$$

come S-sottomodulo di M; esso è banale quando x è un elemento regolare di M. In generale, se $(0 :_M x)$ ha lunghezza finita l'elemento x è chiamato *quasi-regolare.*

LEMMA 8.1. *Sia M un S-modulo graduato finitamente generato, e supponiamo che il campo base k di S sia infinito. Allora esiste un polinomio omogeneo f di grado d e quasi-regolare su M.*

DIMOSTRAZIONE. Il modulo $(0 :_M f)$ ha lunghezza finita se e solo se l'annullatore $\operatorname{Ann}_S((0 :_M f))$ non è contenuto in alcun primo $\mathfrak{p} \subseteq S$ che sia rilevante (si veda il Teorema 1.3). Questo equivale a chiedere che $(0 :_M f)_\mathfrak{p} = 0$ per ogni primo $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ ovvero che x è regolare in $M_\mathfrak{p}$. Per dimostrare ciò è sufficiente che f non sia contenuto in alcun primo associato, ad eccezione di $\mathfrak{m}$.

Ogni primo rilevante $\mathfrak{p}$ di S interseca S_d in un sottospazio proprio, poiché altrimenti $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{m}^d$ e si avrebbe $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ per massimalità. Siccome ci sono soltanto un numero finito di primi associati ad M (poiché è finitamente generato), l'elemento f ha la proprietà richiesta se e solo se evita un certo numero, finito, di sottospazi propri. □

PROPOSIZIONE 8.1. *Siano M un S-modulo graduato finitamente generato e $x \in S$ un polinomio omogeneo lineare e quasi-regolare in M. Allora*

1. *se M è debolmente d-regolare, allora M/xM è debolmente d-regolare;*
2. *se M è (debolmente) d-regolare, allora M è (debolmente) $(d+1)$-regolare;*
3. *M è d-regolare se e solo se M/xM e $H^0_\mathfrak{m}(M)$ sono d-regolari.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Il Lemma 8.1 mostra che un polinomio lineare omogeneo x che sia sufficientemente generico rende la lunghezza di $(0 :_M x)$

finita. Poniamo $M' = M/(0 :_M x)$ e consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow (0 :_M x) \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

Passando alla successione lunga di coomologia locale, si trova

$$\cdots \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}((0 :_M x)) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M') \longrightarrow H^{i+1}_{\mathfrak{m}}((0 :_M x)) \longrightarrow \cdots$$

Ma $(0 :_M x)$ è di lunghezza finita e per il Corollario 6.2 ha coomologia banale in grado $i > 0$; questo mostra che $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \simeq H^i_{\mathfrak{m}}(M')$ per ogni $i > 0$. Consideriamo ora la successione esatta

$$0 \longrightarrow M'(-1) \xrightarrow{x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0 \tag{8.1.2}$$

dove la prima mappa non banale è la moltiplicazione per x. La successione esatta lunga di coomologia locale contiene le successioni della forma

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{d-i+1} \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M/xM)_{d-i+1} \longrightarrow \\ \longrightarrow H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M'(-1)_{d+i-1} \longrightarrow \cdots\end{aligned} \tag{8.1.3}$$

ma per definizione si ha anche che

$$H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M'(-1))_{d+i-1} \simeq H^{i+1}(M)_{d+i}$$

Se quindi M è debolmente d-regolare, nella successione esatta (8.1.3) il primo modulo si annulla per $i > 0$, il terzo si annulla per $i > 0$ in virtù dell'isomorfismo; segue allora che anche $H^i_{\mathfrak{m}}(M/xM)_{d-i+1} = 0$ per ogni $i > 0$, ossia M/xM è debolmente d-regolare.

(2) Supponiamo che M sia debolmente d-regolare e proviamo che M è debolmente $(d+1)$-regolare procedendo per induzione su $\dim_S M$. Se $\dim_S M = 0$, allora M ha lunghezza finita per il Teorema 1.3, dunque $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ per $i > 0$; quindi in questo caso M è debolmente p-regolare per tutti i p e non c'è nulla da provare. Supponiamo ora che $\dim_S M > 0$. Dato che $(0 :_M x)$ ha lunghezza finita, possiamo dedurre che il polinomio di Hilbert di M/xM è dato dal polinomio di Hilbert di M privato di 1; d'altra parte, dal Teorema dell'ideale principale di Krull deduciamo anche che $\dim_S(M/xM) = \dim_S M - 1$. Sappiamo già dal punto precedente che M/xM è debolmente d-regolare; ora, per ipotesi induttiva, sappiamo anche che è debolmente $(d+1)$-regolare. Infine, la successione (8.1.2) induce in coomologia locale la successione lunga

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M'(-1))_{(d+1)-i+1} \longrightarrow \\ \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{(d+1)-i+1} \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M/xM)_{(d+1)-i+1} \longrightarrow \cdots\end{aligned}$$

Per $i \geq 1$ abbiamo che $H^i_{\mathfrak{m}}(M'(-1)) = H^i_{\mathfrak{m}}(M)$; quindi il primo termine si annulla perché M è debolmente d-regolare, mentre il terzo termine si annulla perché M/xM è debolmente $(d+1)$-regolare. Ne consegue che $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{(d+1)-i+1} = 0$ e M è debolmente $(d+1)$-regolare.

Se in aggiunta M è anche d-regolare, allora per quando detto M è debolmente $(d+1)$-regolare. Ma si ha anche

$$d + 1 > d \geq \operatorname{reg} H^0_{\mathfrak{m}}(M)$$

quindi M è anche $(d+1)$-regolare.

(3) Assumiamo prima di tutto che M sia d-regolare; allora $d \geq \operatorname{reg} H^0_{\mathfrak{m}}(M)$. Da quest'ultimo fatto segue che $H^0_{\mathfrak{m}}(M)_p = 0$ per $p > d$, cioè che $H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ è d-regolare. Rimane da provare che M/xM è d-regolare. Ora, dal punto (1) sappiamo già che M/xM è debolmente d-regolare, quindi rimane da provare che $H^0_{\mathfrak{m}}(M/xM)_p = 0$ se $p > d$. Utilizzando ancora la successione (8.1.2), si ottiene la successione esatta lunga

$$\cdots \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M)_e \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M/xM)_e \longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(M'(-1))_e \longrightarrow \cdots$$

Ma, assumendo $e > d$, il termine a sinistra è nullo per ipotesi, mentre $H^1_{\mathfrak{m}}(M'(-1))_e = H^1_{\mathfrak{m}}(M)_{e-1}$. Dato che per il punto (2) M è debolmente e-regolare per ogni $e \geq d$, anche il termine di destra è nullo. Quindi M/xM è d-regolare.

Viceversa, assumiamo che M/xM sia d-regolare e che $H^0_{\mathfrak{m}}(M)_p = 0$ per $p > d$. Per provare che M è d-regolare basta ed occorre dimostrare che $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{d-i+1} = 0$ per ogni $i > 0$. Nuovamente dalla (8.1.2) otteniamo la successione

$$\cdots \longrightarrow H^{i-1}_{\mathfrak{m}}(M/xM)_{p+1} \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M')_p \xrightarrow{f_p} H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{p+1} \longrightarrow \cdots$$

ricordando che $H^i_{\mathfrak{m}}(M'(-1))_{p+1} = H^i_{\mathfrak{m}}(M')_p$. Poiché M/xM è d-regolare per ipotesi, il punto (2) mostra che è p-regolare anche per $p \geq d$, quindi il primo termine si annulla quando $p \geq d-i+1$, rendendo f_p iniettiva. Ricordando che $H^i_{\mathfrak{m}}(M') \simeq H^i_{\mathfrak{m}}(M)$, otteniamo una successione di monomorfismi

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{d-i+1} \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{d-i+2} \longrightarrow \cdots$$

indotti dalla moltiplicazione per x su $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$. Ma in base al Lemma 6.2, ogni elemento di $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ è annichilito da qualche potenza di x, quindi la composizione di queste mappe è definitivamente nulla; per l'iniettività, segue che $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{d-i+1} = 0$ per ogni $i > 0$. Questo conclude la dimostrazione. □

Procediamo adesso con la dimostrazione del Teorema di caratterizzazione della regolarità.

Dimostrazione. *(del Teorema 8.1)* La dimostrazione si articola nel dimostrare che $d \geq \operatorname{reg}(M)$ se e solo se M è d-regolare, come notato nell'Osservazione 8.1, passando in rassegna le tre implicazioni.

Iniziamo a provare che (1) $\Rightarrow$ (2), procedendo per induzione sulla dimensione proiettiva $\dim^{(\mathrm{proj})}(M)$ di M. Sia $\dim^{(\mathrm{proj})}(M) = 0$: in tal caso

$$M = \bigoplus_j S(-a_j)$$

è un S-modulo graduato libero, e la dimostrazione è immediata: per definizione, $\operatorname{reg}(M) = \max\{a_j \mid j \geq 0\}$ (poiché M ha una risoluzione libera banale). Inoltre M è d-regolare se e solo se $d \geq a_j$ per ogni j, per la Proposizione 6.4. Questo dimostra che $d \geq \operatorname{reg}(M)$ nel caso base.

Supponiamo adesso che $\dim^{(\text{proj})}(M) > 0$ e che la risoluzione libera minimale di M sia della forma

$$\cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\varphi_1} L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Sia $M' = \operatorname{im}(\varphi_1)$ il primo modulo delle sizigie di M; per la definizione di regolarità, è chiaro che $\operatorname{reg}(M') \leq \operatorname{reg}(M) + 1$: infatti se

$$L_i = \bigoplus_j S(-a_{i,j})^{\beta_{i,j}}$$

allora $\operatorname{reg}(M) = \max\{a_{i,j} - i \mid i, j \geq 0\}$ mentre

$$\operatorname{reg}(M') = \max\{a_{i,j} - i \mid i \geq 1, j \geq 0\} \leq 1 + \operatorname{reg}(M)$$

Per induzione sulla dimensione proiettiva, possiamo assumere che M' sia $(d+1)$-regolare; infatti essendo $\dim^{(\text{proj})}(M') < \dim^{(\text{proj})}(M)$, si può affermare che se $e \geq \operatorname{reg}(M')$, allora M' risulta e-regolare. Ma per quanto detto

$$d \geq \operatorname{reg}(M) \geq \operatorname{reg}(M') - 1$$

quindi M' è $(e+1)$-regolare per ogni $e \geq d$. Consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

e passiamo alla coomologia locale in grado $e \geq d$: si ha

$$\cdots \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(L_0)_{e-i+1} \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{e-i+1} \longrightarrow H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M')_{e-i+1} \longrightarrow 0$$

Sappiamo già che L_0 è e-regolare per il passo iniziale, quindi il primo termine si annulla per $i \geq 0$; inoltre per quanto detto risulta che $H^i_{\mathfrak{m}}(M')_{(e+1)-i+1} = 0$ per $i \geq 0$, quindi anche $0 = H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M')_{(e+1)-(i+1)+1} = H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M')_{e-i+1}$. Questo prova che M è e-regolare per ogni $e \geq d$, quindi $d \geq \max\{e \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M)_e = 0\} + i$ per ogni $i \geq 0$, che è quanto dovevamo provare.

L'implicazione (2) $\Rightarrow$ (3) è ovvia: se vale la (2), in particolare si ha che $d \geq \max\{e \mid H^0_{\mathfrak{m}}(M)_e \neq 0\}$ e $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{d-i+1} = 0$ per ogni $i > 0$.

Resta da dimostrare che (3) $\Rightarrow$ (1). Assumiamo la (3), cioè assumiamo che M sia d-regolare. Allora rimane da dimostrare che $d \geq \operatorname{reg}(M)$. Dato che le estensioni di campi commutano con la coomologia locale, si può assumere senza perdita di generalità che k sia un campo infinito. Supponiamo che la risoluzione libera minimale di M abbia la forma

$$\cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\varphi_1} L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Dimostriamo prima che i generatori di L_0 hanno tutti grado al più d (cioè $a_{0,j} \leq d$ per ogni j). Questo equivale a dimostrare che M è generato da elementi di grado al più d; a questo scopo, procediamo per induzione su $\dim_S(M)$. Se $\dim_S(M) = 0$, allora il risultato è ovvio: M ha lunghezza finita, quindi per d-regolarità, si ha che $M_e = H^0_{\mathfrak{m}}(M)_e = 0$ per ogni $e > d$.

Supponiamo adesso che $\dim_S(M) > 0$ e sia $M' = M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$; dalla successione esatta corta

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

osserviamo che è sufficiente dimostrare che i generatori di $H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ e di M' hanno grado minore o uguale a d. Dalla d-regolarità possiamo subito dire che $H^0_{\mathfrak{m}}(M)_e = 0$ per $e > d$. Per il Lemma 8.1 possiamo scegliere un polinomio lineare omogeneo x che non sia divisore dello zero in M' e per la Proposizione 8.1 M'/xM' è d-regolare. Dato che $\dim_S(M'/xM') < \dim_S(M')$, l'induzione mostra che M'/xM' è generato da elementi di grado al più d; la stessa proprietà vale immediatamente anche per $M'/\mathfrak{m}M'$. Per il Lemma di Nakayama, anche i generatori di M' hanno grado al più d.

Se M è libero, quanto detto prima conclude la dimostrazione. Altrimenti, si procede per induzione su $\dim^{(\mathrm{proj})}(M)$. Sia $M' = \mathrm{im}(\varphi_1)$ il primo modulo delle sizigie di M e si consideri di nuovo la successione esatta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Passando alla successione esatta lunga di coomologia si dimostra che M' è $(d+1)$-regolare. Per ipotesi induttiva, dato che $\dim_S(M') < \dim_S(M)$, si ha che $\mathrm{reg}(M') \leq d+1$. Questo significa, cioè, che la parte di risoluzione libera di M che comincia da L_1 soddisfa le condizioni per cui, una volta completata, si abbia $\mathrm{reg}(M) \leq d$. $\square$

Procediamo adesso a dimostrare una serie di risultati successivi, che provengono tutti dalla caratterizzazione della regolarità mediante coomologia locale. Il primo risultato fornisce un'altra formula per il calcolo della regolarità.

Corollario 8.1. *Sia M un S-modulo graduato e finitamente generato e sia $x \in M$ un elemento quasi-regolare. Allora*

$$\mathrm{reg}(M) = \max\{\mathrm{reg}(H^0_{\mathfrak{m}}(M)),\ \mathrm{reg}(M/xM)\}$$

Dimostrazione. Sappiamo che $\mathrm{reg}(M) \leq d$ se e solo se M è d-regolare, il che accade se e solo se $H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ e M/xM sono d-regolari; questo avviene, tuttavia, se e solo se $d \geq \mathrm{reg}(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$ e $\mathrm{reg}(M/xM)$. $\square$

8.2. Caso dei moduli artiniani.

Con quanto segue diamo una descrizione della regolarità in un caso speciale.

Corollario 8.2. *Se M è un S-modulo graduato e finitamente generato, di lunghezza finita, allora* $\mathrm{reg}(M) = \max\{d \mid M_d \neq 0\}$.

Dimostrazione. Sappiamo che $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = M$ che $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ per $i > 0$; per il Teorema 8.1, $\mathrm{reg}(M) \leq d$ se e solo se M è d-regolare, cioè $H^0_{\mathfrak{m}}(M)_e = 0$ per ogni $e > d$. Segue che $\mathrm{reg}(M) = \max\{d \mid M_d \neq 0\}$. $\square$

Il Corollario suggerisce una conveniente estensione della definizione di regolarità ed un conseguente indebolimento del Teorema di caratterizzazione. Sia infatti M un S-modulo graduato e artiniano; si pone allora

$$\mathrm{reg}(M) := \max\{d \mid M_d \neq 0\}$$

Questa definizione non è in contrasto con la precedente; infatti un modulo artiniano finitamente generato su un anello noetheriano ha lunghezza finita (per il Teorema 1.3) e soddisfa la formula grazie al Corollario 8.2. Inoltre, per il Teorema di dualità locale 6.2, i moduli di coomologia locale di un S-modulo M graduato e finitamente generato sono tutti S-moduli graduati e artiniani; in particolare, questo significa che la definizione di regolarità data in (8.1.1) è ben posta. Inoltre, il seguente risultato mostra il collegamento con i funtori di torsione.

COROLLARIO 8.3. *Sia M un S-modulo graduato e finitamente generato. Allora*

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(M) &= \max\{\operatorname{reg}\operatorname{Tor}_i^S(M,k) - i \mid i \geq 0\} = \\ &= \max\{\operatorname{reg} H^i_{\mathfrak{m}}(M) + i \mid i \geq 0\}\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. La formula $\operatorname{reg}(M) = \max\{\operatorname{reg} H^i_{\mathfrak{m}}(M) + i \mid i \geq 0\}$ è conseguenza immediata del punto (2) del Teorema 8.1. Per provare l'altra formula, sia $\mathbf{F}: \cdots \longrightarrow F_i \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow \cdots$ la risoluzione libera minimale di M. Allora i moduli $\operatorname{Tor}^i_S(M,k) = F_i \otimes_S k = F_i/\mathfrak{m}F_i$ sono k-spazi vettoriali finitamente generati, quindi moduli di lunghezza finita. Per il Lemma di Nakayama, i numeri di Betti $\beta_{i,j}$, che sono i gradi dei generatori di F_i, sono anche i gradi degli elementi non nulli di $\operatorname{Tor}^i_S(M,k)$. Quindi $\operatorname{reg}\operatorname{Tor}^i_S(M,k) - i = \max\{\beta_{i,j} \mid i,j \geq 0\} - i \leq \operatorname{reg}(M)$. Passando al massimo, segue la tesi. $\square$

Dal Corollario 8.2 si può dedurre un'altra interessante proprietà: la regolarità di un modulo di lunghezza finita è avulsa dalla sua struttura di S-modulo, cioè non dipende dall'anello S ma dalla graduazione. Possiamo esprimere meglio questa indipendenza dall'anello, nel seguente risultato. Scriveremo $\operatorname{reg}_S(M)$ per indicare la regolarità di M pensato come S-modulo.

COROLLARIO 8.4. *Sia M un S-modulo graduato e finitamente generato e sia $\varphi : S' \longrightarrow S$ un morfismo d'anelli graduati generati da elementi di grado 1. Se M è anche un S'-modulo finitamente generato (mediante φ), allora $\operatorname{reg}_S(M) = \operatorname{reg}_{S'}(M)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che M è un S'-modulo finitamente generato se e solo se S è un S'-modulo finitamente generato (mediante restrizione degli scalari), il che si verifica se e solo se l'ideale irrilevante di S è nilpotente modulo l'ideale generato dall'ideale irrilevante di S' e dall'annullatore di M. Ma per la proprietà del cambio d'anello, la coomologia locale di M non cambia operando tale modifica; per il Teorema di caratterizzazione, segue che la regolarità di M non cambia. $\square$

8.3. Stime per varietà aritmeticamente Cohen-Macaulay.

Sia M un S-modulo graduato e finitamente generato. Supponiamo che $x \in S$ sia un elemento regolare per M, cioè x non è un divisore dello zero per M. Allora $\operatorname{depth}(M) \geq 1$, ed in virtù della Proposizione 6.2 si ha

$H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. Per la parte (3) della Proposizione 8.1 e per il Teorema 8.1, si prova che $\operatorname{reg}(M) = \operatorname{reg}(M/xM)$.

Nel caso di un modulo di Cohen-Macaulay, questa proprietà può essere estesa ad una intera successione regolare.

PROPOSIZIONE 8.2. *Sia M un S-modulo graduato, finitamente generato e di Cohen-Macaulay. Sia inoltre $y_0, \dots, y_t$ una successione M-regolare massimale di polinomi lineari. Allora*

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{d \mid (M/(y_1, \dots, y_t)M)_d \neq 0\}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\dim_S(M) = 0$ allora è ovvio: M ha lunghezza finita, non ci sono successioni M-regolari (perché M ha profondità 0) e per il Corollario 8.2 si ha la formula. Supponiamo che $\dim_S(M) > 0$ e procediamo per induzione. Sia $y_1, \dots, y_t$ una successione M-regolare e supponiamo, a meno di riordinare i termini, che y_1 sia M-regolare, cioè che non sia un divisore dello zero. Per quanto detto prima, $\operatorname{reg}(M) = \operatorname{reg}(M/y_1M)$ e $\dim_S(M/y_1M) < \dim_S(M)$. Per ipotesi induttiva, segue allora che, posto $M_1 = M/y_1M$,

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(M) = \operatorname{reg}(M_1) &= \max\{d \mid (M_1/(y_2, \dots, y_t)M_1)_d \neq 0\} \\ &= \max\{d \mid (M/(y_1, \dots, y_t)M)_d \neq 0\} \end{aligned}$$

□

Se $X \subseteq \mathbf{P}^r_k$ è una varietà proiettiva, la sua *regolarità* è, per definizione, quella del suo ideale I_X, che si può anche ricavare da quella dell'anello delle coordinate $S_X := S/I_X$. Mostreremo, adesso, che quando X è aritmeticamente Cohen-Macaulay (cioè S_X è un anello di Cohen-Macaulay) allora la regolarità può essere limitata dall'alto in termini puramente geometrici.

COROLLARIO 8.5. *Sia $X \subseteq \mathbf{P}^r_k$ una varietà aritmeticamente Cohen-Macauly che non sia contenuta in un iperpiano. Allora*

$$\operatorname{reg}(S_X) \leq \deg(X) - \operatorname{codim}(X)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $t = \dim(X)$, in modo che $t+1$ sia la dimensione di S_X come S-modulo. A meno di estensioni di campi, si può (senza cambiare la coomologia locale) assumere che k sia un campo infinito algebricamente chiuso. Allora è lecito assumere che esista una successione S_X-regolare di polinomi lineari omogenei $y_0, \dots, y_t$. Sia $S'_X := S_X/(y_0, \dots, y_t)$ e osserviamo che $\dim_k(S_X)_1 = r + 1$ perché X non è contenuta in un iperpiano; allora $\dim_k(S'_X)_1 = r - t = \operatorname{codim}(X)$.

Se $d = \operatorname{reg}(S_X)$, per la Proposizione 8.2 si ha

$$\operatorname{Hilb}_{S'_X}(d) \neq 0$$

il che implica $\operatorname{Hilb}_{S'_X}(e) \neq 0$ per ogni $e \in \{0, \dots, d\}$. D'altro canto, $\deg(X)$ è il numero di punti in cui X si incontra con un sottospazio lineare generico di codimensione t. Consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow S_X/(y_1,\dots,y_t)(-1) \xrightarrow{y_0} S_X/(y_1,\dots,y_t) \longrightarrow S'_X \longrightarrow 0$$

e per induzione si calcola

$$\mathrm{Hilb}_{S_X/(y_1,\dots,y_t)}(d) = \sum_{p=0}^{e} \mathrm{Hilb}_{S'_X}(p)$$

Segue che, per e molto grande,

$$\deg(X) = \sum_{p=0}^{e} \mathrm{Hilb}_{S'_X}(p) \geq 1 + \operatorname{codim}(X) + (\operatorname{reg}(X) - 1)$$

dato che vi sono almeno $\operatorname{reg}(X) - 1$ termini non nulli di $\mathrm{Hilb}_{S'_X}(p) \neq 0$ per $p \in \{2,\dots,e\}$. Questo prova la formula. $\square$

Sfortunatamente, non è possibile indebolire le ipotesi su X e mantenere questa dimostrazione: infatti, la proprietà aritmetica di Cohen-Macaulay è molto più forte dell'analoga proprietà geometrica, soddsfatta da un'ampia classe di curve algebriche (ad esempio, tutte le curve lisce sono Cohen-Macaulay, ma non è detto che lo siano *arimeticamente*). Si possono determinare ideali $I \subseteq S$ in cui la regolarità di S/I è molto maggiore della somma dei gradi dei generatori di I.

Come sarà spiegato nel capitolo successivo, nel caso in cui X sia una curva liscia e irriducibile su un campo algebricamente chiuso, è possibile mantenere la stima fatta.

8.4. Regolarità di fasci coerenti.

In questa sezione si riassumono i punti salienti della teoria originale della regolarità, sviluppata da Mumford esclusivamente per fasci coerenti, e si discutono i suoi legami con quanto presentato fin'ora.

Sia $\mathbf{P}^r = \mathbf{P}^r_k$ uno spazio proiettivo (schematico) su k e sia $\mathscr{F}$ un fascio algebrico coerente su $\mathbf{P}^r$. Per ogni intero $m \in \mathbb{Z}$, diciamo che $\mathscr{F}$ è *m-regolare* se

$$H^i(\mathbf{P}^r, \mathscr{F}(m-i)) = 0$$

per ogni $i > 0$. Ricordiamo che $\mathscr{F}(p) := \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}} \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(p)$ per ogni intero p. In generale, la definizione di m-regolarità è adeguata per ogni schema proiettivo dotato di un fibrato lineare molto ampio; in particolare, è valida per una k-varietà proiettiva X.

Per il teorema di annullamento di Serre, ogni fascio coerente è m-regolare per qualche m: sappiamo infatti che esiste un intero n_0 tale che $H^i(X, \mathscr{F}(n)) = 0$ per ogni $i > 0, n \geq n_0$ e anche che $H^i(X, \mathscr{F}(n)) = 0$ per ogni $i > \dim X$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Basta porre allora $m = n_0 + \dim X$ per avere che $H^i(X, \mathscr{F}(m-i)) = 0$ per ogni $i > 0$.

Allo scopo di semplificare le notazioni, ci limiteremo a trattare il caso $X = \mathbf{P}^r$; nel caso di una generica varietà proiettiva, i risultati sono del tutto analoghi e si possono ottenere passando all'immagine inversa da quelli su $\mathbf{P}^r$. Possiamo dunque dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE 8.2. Sia $\mathscr{F}$ un fascio algebrico coerente su $\mathbf{P}^r$. Il minimo intero m, se esiste, tale che $\mathscr{F}$ è m-regolare è chiamato *regolarità di Castelnuovo-Mumford* di $\mathscr{F}$ e si denota con $\operatorname{reg}(\mathscr{F})$.

Mostriamo, in quanto segue, la connessione che lega la precedente definizione algebrica di regolarità con quella data adesso.

PROPOSIZIONE 8.3. *Sia M un S-modulo graduato e finitamente generato, e sia $\widetilde{M}$ il fascio coerente su $\mathbf{P}^r_k$ ad esso associato. Allora il modulo M è d-regolare se e solo se:*

1. *$\widetilde{M}$ è d-regolare;*
2. *$H^0_{\mathfrak{m}}(M)_e = 0$ per ogni $e > d$;*
3. *la mappa canonica $M_d \longrightarrow H^0(\widetilde{M}(d))$ è suriettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_e = H^{i-1}(\mathbf{P}^r_k, \widetilde{M}(e))$ per ogni $i \geq 2$. Allora M è d-regolare se e solo se soddista le condizioni (1) e (2) e $H^1_{\mathfrak{m}}(M)_e = 0$ per ogni $e \geq d$. Ma usando la successione esatta (6.2.4) in grado e si ha

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M)_e \longrightarrow M_e \longrightarrow H^0(\mathbf{P}^r_k, \widetilde{M}(e)) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(M)_e \longrightarrow 0$$

si capisce che $H^0(M)_e = 0$ per ogni $e > d$ se e solo se $H^1(M)_e = 0$ per ogni $e \geq d$. □

COROLLARIO 8.6. *Se M è un S-modulo graduato e finitamente generato, allora $\operatorname{reg}(M) \geq \operatorname{reg}(\widetilde{M})$; in particolare, l'uguaglianza vale se e solo se*

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(X, \widetilde{M}(n))$$

DIMOSTRAZIONE. La seconda affermazione è diretta conseguenza della successione esatta 6.2.4. Per dimostrare che $\operatorname{reg}(M) \geq \operatorname{reg}(\widetilde{M})$, basta ed occorre provare che $\widetilde{M}$ è $\operatorname{reg}(M)$-regolare, cioè che

$$H^p(\mathbf{P}^r_k, \widetilde{M}(\operatorname{reg}(M) - p)) = 0$$

per ogni $p > 0$. Per $p \geq 2$ si ha

$$H^{p-1}(\mathbf{P}^r_k, \widetilde{M}(\operatorname{reg}(M) - p + 1)) \simeq H^p_{\mathfrak{m}}(M)_{\operatorname{reg}(M)-p+1}$$

in virtù dell'isomorfismo 6.2.3. Ma per il Teorema 8.1 sappiamo che

$$H^p_{\mathfrak{m}}(M)_{\operatorname{reg}(M)-p+1} = 0$$

per ogni $p \geq 1$. Questo permette di dimostrare che $H^p(\mathbf{P}^r_k, \widetilde{M}(\operatorname{reg}(M) - p)) = 0$ per $p \geq 1$, che è la tesi cercata. □

Il risultato principale provato da Mumford e da lui attribuito a Castelnuovo è il seguente.

TEOREMA 8.2. *Sia* $\mathscr{F}$ *un fascio coerente su* $\mathbf{P}^r_k$ *e supponiamo che* $\mathscr{F}$ *sia* m*-regolare. Allora*

(1) $\mathscr{F}$ *è* n*-regolare per ogni* $n \geq m$*;*
(2) *esiste una mappa suriettiva*

$$H^0(\mathbf{P}^r_k, \mathscr{F}(p-1)) \otimes H^0(\mathbf{P}^r_k, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r_k}(1)) \longrightarrow H^0(\mathbf{P}^r_k, \mathscr{F}(p))$$

per ogni $p > m$*.*

DIMOSTRAZIONE. Il risultato segue dalla caratterizzazione 8.1, utilizzando anche le considerazioni fatte in questa sezione. Per una dimostrazione più diretta si veda [22]. $\square$

CAPITOLO 9

Regolarità di curve proiettive.

L'intero capitolo è dedicato alla dimostrazione ed alla discussione del Teorema di Gruson, Lazarsfeld e Peskine, oggetto dell'articolo [17], che stabilisce un limite superiore alla regolarità di una curva proiettiva analogo a quello del Corollario 8.5, nelle ipotesi di irriducibilità sopra un campo algebricamente chiuso.

Noi ci limiteremo alla trattazione del Teorema nel caso di una curva *liscia.*

9.1. Introduzione.

Il teorema che proveremo è il seguente.

TEOREMA 9.1. (GRUSON, LAZARSFELD, PESKINE) *Sia k un campo algebricamente chiuso e sia $X \subseteq \mathbf{P}^r_k$ una k-curva proiettiva liscia, irriducibile e non degenere. Allora* $\operatorname{reg}(X) \leq \deg(X) - \operatorname{codim}(X) + 1$.

Ricordiamo che, nelle nostre definizioni, $\operatorname{reg}(X)$ è la regolarità dell'ideale omogeneo saturato di X, cioè

$$I_X := \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathbf{P}^r_k, \mathscr{I}_X(n))$$

Con tali ipotesi, si ha che $\operatorname{reg}(X) = \operatorname{reg}(\mathscr{I}_X)$ in virtù del Corollario 8.6.

9.2. Ideali di Fitting.

La prima riduzione che faremo riguarda l'ideale di X, o equivalentemente il suo fascio di ideali.

Sia $X \subseteq \mathbf{P}^r := \mathbf{P}^r_k$ una curva liscia, irriducibile e non degenere e sia $\mathscr{L}$ un fascio invertibile su X. Consideriamo l'S-modulo finitamente generato

$$F := \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathscr{L}(n))$$

Esso ammette una presentazione libera minimale, coincidente con l'inizio della risoluzione libera minimale di F:

$$L_1 \xrightarrow{\psi} L_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

Sia t il rango di L_0 e chiamiamo $I(\psi)$ l'ideale generato dai minori d'ordine t di una qualche rappresentazione matriciale di ψ. Allora $I(\psi)$ è lo 0-esimo ideale di Fitting di ψ e non dipende dalla presentazione di F. Poiché gli ideali di Fitting commutano con le localizzazioni, fascificando in $\mathscr{I}(\psi) :=$

$\widetilde{I(\psi)}$ si ottiene il fascio degli ideali di Fitting di $\mathscr{L}$. In termini più precisi, fascificando la presentazione libera minimale di F si ottiene

$$\bigoplus_{i=1}^{s} \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(-h_i) \xrightarrow{\widetilde{\psi}} \bigoplus_{j=1}^{t} \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(-k_j) \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow 0$$

ed il fascio degli ideali di Fitting di $\widetilde{\psi}$ è proprio $\mathscr{I}(\psi)$.

Lemma 9.1. *Con le notazioni precedenti,* $\operatorname{reg}(\mathscr{I}(\psi)) \geq \operatorname{reg}(\mathscr{I}_X)$.

Dimostrazione. Osserviamo che il supporto di $\mathscr{L}$ è contenuto in X, quindi anche il fascio di ideali $\mathscr{I}(\psi)$ ha supporto in X ed è quindi un sottofascio di $\mathscr{I}_X$. Ora, abbiamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}(\psi) \longrightarrow \mathscr{I}_X \longrightarrow \mathscr{I}_X/\mathscr{I}(\psi) \longrightarrow 0$$

che, a meno di twist, induce la successione esatta lunga

$$\cdots \longrightarrow H^i(\mathbf{P}^r, \mathscr{I}_X/\mathscr{I}(\psi)(m-i)) \longrightarrow H^{i+1}(\mathbf{P}^r, \mathscr{I}(\psi)(m-i)) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^{i+1}(\mathbf{P}^r, \mathscr{I}_X(m-i)) \longrightarrow \cdots$$

Ma il supporto di $\mathscr{I}_X/\mathscr{I}(\psi)$ è zero-dimensionale, quindi $H^i(\mathbf{P}^r, \mathscr{I}_X/\mathscr{I}(\psi)(m-i)) = 0$ per ogni $i > 0$ e per ogni $m \in \mathbb{Z}$, provando cioè che $H^i(\mathbf{P}^r, \mathscr{I}(\psi)(m-i)) \simeq H^i(\mathbf{P}^r, \mathscr{I}_X(m-i))$ per ogni m e per ogni $i > 1$. Per $i = 1$ si ha

$$\cdots \longrightarrow H^0(\mathbf{P}^r, \mathscr{I}_X/\mathscr{I}(\psi)(m)) \longrightarrow H^1(\mathbf{P}^r, \mathscr{I}(\psi)(m-1)) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(\mathbf{P}^r, \mathscr{I}_X(m-1)) \longrightarrow 0$$

e quindi possiamo affermare che $\operatorname{reg}(\mathscr{I}_X) \leq \operatorname{reg}(\mathscr{I}(\psi))$. □

Grazie al Lemma 9.1, sarà quindi sufficiente stimare la regolarità del fascio $\mathscr{I}(\psi)$, generato dai minori massimali della presentazione libera minimale ottenuta da un fascio invertibile $\mathscr{L}$ nel modo descritto sopra.

9.3. Presentazioni lineari.

Sia A un anello graduato e sia M un A-modulo graduato. Ricordiamo che M si dice *generato in grado* j se, per ogni i, si ha $M_{i+j} = A_i M_j$.

Definizione 9.1. Sia M un S-modulo graduato e finitamente generato. Si dice che M ha una *presentazione lineare libera* se la risoluzione libera minimale

$$\cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\varphi_1} L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

è tale che L_i sia generato in grado i, per $i = 0, 1$.

In modo equivalente, si può dire che M ha una presentazione lineare libera se $L_0 = S^{b_0}$ e $L_1 = S(-1)^{b_1}$, cioè se e solo se M è generato in grado zero e la freccia φ_1 si lascia esprimere come matrice di polinomi omogenei lineari.

Osservazione 9.1. Se M ha una presentazione lineare libera, chiaramente $M_d = 0$ per $d < 0$. Viceversa, se M è un S-modulo graduato e finitamente generato tale che $M_d = 0$ per $d < 0$ e la presentazione libera minimale è $L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, allora L_0 è generato in grado almeno zero. Per il Lemma di Nakayama, il nucleo di $L_0 \longrightarrow F$ è contenuto in $(x_0, \ldots, x_r)L_0$, quindi è generato in grado almeno 1; per la minimalità della presentazione, anche L_1 deve essere generato in grado almeno 1. Quindi un S-modulo M generato in grado almeno 0 ammette una presentazione lineare libera se e solo se L_i non richiede generatori di grado maggiore di i, per $i = 0, 1$.

Nei risultati che seguono faremo uso del *sotto-fibrato tautologico* di rango r su $\mathbf{P}^r := \mathbf{P}^r_k$, che è definito come il sottofibrato $\mathscr{M}$ di $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}^{r+1}$ che rende esatta la successione di Eulero:

$$0 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}^{r+1} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1) \longrightarrow 0$$

dove la seconda mappa è indotta dalle coordinate omogenee che generano globalmente $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1)$, il fascio delle forme lineari. Sappiamo anche che $\mathscr{M}$ si identifica al twist del fascio cotangente $\Omega^1_{\mathbf{P}^r}(1)$.

Introduciamo l'uso delle potenze esterne per studiare le risoluzioni. Sia

$$\mathbf{K}: \ 0 \longrightarrow K^{r+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^0$$

la risoluzione libera minimale del campo residuo $k = S/(x_0, \ldots, x_r)$ come S-modulo. Per le proprietà del complesso di Koszul, $\mathbf{K}$ può essere identificato, a livello di complesso *non* graduato, con il complesso di Koszul duale di $(x_0, \ldots, x_r) \in (S^{r+1})^\vee$. Per ottenere una risoluzione graduata, dobbiamo porre

$$K_i := \bigwedge^i (S^{r+1}(-1)) = \left(\bigwedge^i S^{r+1}\right)(-i)$$

in modo che il complesso abbia la forma

$$\mathbf{K}: \ \cdots \xrightarrow{\varphi_3} \left(\bigwedge^2 S^{r+1}\right)(-2) \xrightarrow{\varphi_2} S^{r+1}(-1) \xrightarrow{\varphi_1} S$$

dove φ_1 è sempre rappresentata dalla matrice riga $(x_0 \ \ldots \ x_r)$. Sia $M_i = (\ker \varphi_i)(i)$ il nucleo twistato in modo tale che risulti essere un sottomodulo del modulo libero $\bigwedge^i S^{r+1}$. Si osservi, ad esempio, che il sottofibrato tautologico $\mathscr{M}$ su $\mathbf{P}^r$ è la fascificazione di M_1; questo si può vedere fascificando la successione

$$0 \longrightarrow M_1(-1) \longrightarrow S^{r+1}(-1) \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

e confrontando con la successione di Eulero. Infatti la fascificazione è data da

$$0 \longrightarrow \widetilde{M_1}(-1) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}^{r+1}(-1) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r} \longrightarrow 0$$

e si capisce che $\widetilde{M}_1 \simeq \mathscr{M}$. Questo fatto ha una importante generalizzazione.

Lemma 9.2. *Con le notazioni precedenti, il fascio $\bigwedge^i \mathscr{M}$ è la fascificazione di M_i.*

Dimostrazione. Dato che la fascificazione del complesso di Koszul è esatta, gli M_i si fascificano tutti in fibrati vettoriali, quindi è sufficiente dimostrare che $(\widetilde{M_i})^\vee \simeq (\bigwedge^i \mathscr{M})^\vee$. Ora, il funtore di dualità è esatto a sinistra, quindi M_i è duale di $N_i := (\operatorname{coker} \varphi_i^\vee)(-i)$ anch'esso un fibrato vettoriale; in particolare, è un fascio riflessivo[1] quindi

$$(\widetilde{M_i})^\vee \simeq (\widetilde{N_i})^{\vee\vee} \simeq \widetilde{N_i}$$

Basta dunque dimostrare che

$$N_i \simeq \bigwedge^i N_1$$

Ora, il complesso $\mathbf{K}$ è il duale del complesso di Koszul per l'elemento $x = (x_0, \ldots, x_r) \in (S^{r+1})^\vee(1)$ e la mappa $\varphi_i^\vee$ è definita dalla moltiplicazione esterna per x, in modo che la graduazione sia rispettata. Dato che si ha

$$N_1 = \frac{(S^{r+1})^\vee(1)}{Sx}$$

deduciamo che

$$\bigwedge^i N_1 = \frac{(\bigwedge^i S^{r+1})^\vee(1)}{x \wedge (\bigwedge^{i-1} S^{r+1})^\vee(1)} = \operatorname{coker} \varphi_i^\vee$$

che è quanto basta per concludere la dimostrazione. $\square$

Il seguente risultato stabilisce una relazione fra sizigie e particolari gruppi di coomologia di cui faremo uso.

Lemma 9.3. *Sia $\mathscr{F}$ un fascio coerente su $\mathbf{P}^r$ e sia*

$$F = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathbf{P}^r, \mathscr{F}(n))$$

Sia $\mathscr{M}$ il sotto-fibrato tautologico di rango r su $\mathbf{P}^r$ e sia i un intero. Se $d \geq i+1$ esiste una successione esatta della forma

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^S(F,k)_d \longrightarrow H^1\Big(\mathbf{P}^r, \bigwedge^{i+1} \mathscr{M} \otimes \mathscr{F}(d-i-1)\Big) \xrightarrow{\alpha}$$
$$\xrightarrow{\alpha} H^1\Big(\mathbf{P}^r, \bigwedge^{i+1} \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}^{r+1} \otimes \mathscr{F}(d-i-1)\Big) \longrightarrow \cdots$$

dove α è indotta dall'immersione $\mathscr{M} \hookrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}^{r+1}$.

Dimostrazione. $\operatorname{Tor}_i^S(F,k)$ è l'i-esimo gruppo d'omologia del complesso di Koszul $\mathbf{K} \otimes_S F$; infatti $\mathbf{K}$ è una risoluzione di k. In particolare, $\operatorname{Tor}_i^S(F,k)_d$ è l'i-esimo gruppo di omologia della successione

$$\cdots \longrightarrow \Big(\bigwedge^{i+1} S^{r+1}(-i-1) \otimes F\Big)_d \longrightarrow \Big(\bigwedge^i S^{r+1}(-i) \otimes F\Big)_d \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \Big(\bigwedge^{i-1} S^{r+1}(-i+1) \otimes F\Big)_d \longrightarrow \cdots$$

[1]Un fascio algebrico coerente $\mathscr{F}$ si dice *riflessivo* quando $\mathscr{H}om(\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)) \simeq \mathscr{F}$. I fasci localmente liberi sono tutti riflessivi.

Ora, per ogni t il modulo $\bigwedge^t S^{r+1}(-t) \otimes F$ è somma diretta di copie di $F(-t) = F \otimes S(-t)$, quindi ricordando che $F_{d-t} = H^0(\mathbf{P}^r, \mathscr{F}(d-t))$ per ogni $d \geq t$, si ha

$$\Big(\bigwedge^t S^{r+1}(-t) \otimes F\Big)_d = \Big(\bigwedge^t S^{r+1} \otimes F\Big)_{d-t} = H^0\Big(\mathbf{P}^r, \bigwedge^t \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}^{r+1} \otimes \mathscr{F}(d-t)\Big)$$

In base a questa relazione, possiamo calcolare i funtori di torsione mediante la coomologia dei fasci. Ora, poiché la fascificazione di $\mathbf{K}$ si spezza localmente, rimane esatta se moltiplicata tensorialmente per qualunque fascio, ad esempio $\mathscr{F}(d)$. Ricordando il Lemma 9.2, otteniamo allora la successione esatta corta

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigwedge^t \mathscr{M} \otimes \mathscr{F}(d-t) \longrightarrow \bigwedge^t \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}^{r+1} \otimes \mathscr{F}(d-t) \longrightarrow & \\ \longrightarrow \bigwedge^{t-1} \mathscr{M} \otimes \mathscr{F}(d-t+1) \longrightarrow 0 & \end{aligned}$$

che si incastra con la fascificazione del complesso di Koszul. Da questo segue che $\operatorname{Tor}_i^S(F,k)_d$ è il conucleo della mappa diagonale e la successione esatta lunga associata fornisce la tesi. $\square$

Procediamo dunque a dimostrare il risultato che ci serve.

Teorema 9.2. *Siano $\mathscr{F}$ un fascio coerente su $\mathbf{P}^r$, per $r \geq 2$, e $\mathscr{M}$ il sotto-fibrato tautologico di rango r su $\mathbf{P}^r$. Se il supporto di $\mathscr{F}$ ha dimensione al più 1 e*

$$H^1\Big(\mathbf{P}^r, \bigwedge^2 \mathscr{M} \otimes \mathscr{F}\Big) = 0$$

allora l'S-modulo graduato

$$F := \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathbf{P}^r, \mathscr{F}(n))$$

ha una presentazione lineare libera.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{L} : \ \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\varphi_1} L_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0$ la risoluzione libera minimale di F. Per come è fatto F, si ha che L_0 non ha generatori di grado minore o uguale di zero. Con un ragionamento analogo a quello fatto nell'Osservazione 9.1, si dimostra che L_1 non ha generatori di grado minore di 1. Dato che $\mathscr{F}$ ha supporto di dimensione al più 1, anche il supporto di $\bigwedge^2 \mathscr{M} \otimes \mathscr{F}$ ha dimensione al più 1, quindi $H^p(\mathbf{P}^r, \bigwedge^2 \mathscr{M} \otimes \mathscr{F}(1-p)) = 0$ per ogni $p \geq 2$. Dato che, per ipotesi, la relazione vale anche per $p = 1$, si può concludere che $\bigwedge^2 \mathscr{M} \otimes \mathscr{F}$ è un fascio 1-regolare. Quindi è anche s-regolare per ogni $s \geq 2$, ed in particolare si ha

$$H^1\Big(\mathbf{P}^r, \bigwedge^2 \mathscr{M} \otimes \mathscr{F}(t)\Big) = 0$$

per ogni $t \geq 0$. Ma allora per il Lemma 9.3 possiamo affermare che $\operatorname{Tor}_1^S(F,k)_d = 0$ per ogni $d \geq 2$. Il calcolo di $\operatorname{Tor}_i^S(F,k)$ può essere effettuato mediante l'omologia del complesso $\mathbf{L} \otimes k$; per la minimalità di $\mathbf{L}$, i differenziali di $\mathbf{L} \otimes k$ sono tutti nulli quindi $\operatorname{Tor}_i^S(F,k) = L_i \otimes k$ per ogni i. Per quanto detto, L_1

non ha generatori di grado maggiore o uguale di 2. Quindi i generatori di L_1 hanno necessariamente grado 1.

Ora, F è un S-modulo di torsione, quindi non ha addendi liberi; questo implica che, per ogni addendo L'_0 di L_0 la freccia $L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow L'_0$ non è nulla, altrimenti L'_0 sarebbe il conucleo di $L_1 \longrightarrow L_0$, cioè F a meno d'isomorfismo. Ma allora, essendo L_1 generato in grado 1, segue che L_0 non può avere generatori di grado maggiore o uguale di 1. Per quanto visto, i generatori di L_0 sono per forza di grado nullo; poiché F è generato in grado zero, per l'Osservazione 9.1, abbiamo dimostrato che F ha una presentazione lineare libera. $\square$

9.4. Stima della regolarità.

Osserviamo in via preliminare che, dato un complesso di fasci algebrici $\mathbf{E}$ su uno schema X, è definita la sua *omologia* $H_\bullet(\mathbf{E})$ nella categoria $\mathbf{CC}(\mathbf{Sh}(X))$ dei complessi di (co)catene a valori nella categoria dei fasci su X. Tale omologia è, quindi, un funtore $\mathbf{CC}(\mathbf{Sh}(X)) \longrightarrow \mathbf{Sh}(X)$ e di ogni fascio d'omologia $H^i(\mathbf{E})$ è ammissibile calcolare la coomologia $H^\bullet(X, H_i(\mathbf{E}))$.

Lemma 9.4. *Sia* $\mathbf{E}:\ 0 \longrightarrow E_t \xrightarrow{\varphi_t} E_{t-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow E_0$ *un complesso di fasci algebrici su* $\mathbf{P}^r_k$ *e sia* d *un intero. Supponiamo che, per* $i > 0$*, l'omologia* $H_i(\mathbf{E})$ *abbia supporto in dimensione al più* 1*. Allora, se* $\operatorname{reg}(E_s) - s \le d$ *per ogni* $s \ge 0$ *, abbiamo*

$$\operatorname{reg}(\operatorname{coker}\varphi_1) \le d, \quad \operatorname{reg}(\operatorname{im}\varphi_1) \le d+1$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su t. Il caso $t = 0$ è immediato. Sia $t > 0$ e consideriamo la successione esatta, per ogni d, i interi

$$0 \longrightarrow \operatorname{im}\varphi_1(d-i) \longrightarrow E_0(d-i) \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi_1(d-i) \longrightarrow 0$$

da cui si può determinare la successione esatta lunga associata

$$\cdots \longrightarrow H^i(\mathbf{P}^r, E_0(d-i)) \longrightarrow H^i(\mathbf{P}^r, \operatorname{coker}\varphi_1(d-i)) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{i+1}(\mathbf{P}^r, \operatorname{im}\varphi_1(d-i)) \longrightarrow \cdots$$

Se dunque avessimo $\operatorname{reg}(\operatorname{im}\varphi_1) \le d+1$ si verificherebbe

$$H^{i+1}(\mathbf{P}^r, \operatorname{im}\varphi_1(d-i)) = H^{i+1}(\mathbf{P}^r, \operatorname{im}\varphi_1(d+1-i-1)) = 0$$

per ogni $i > 0$; inoltre dato che per ipotesi $\operatorname{reg}(E_0) \le d$, avremmo anche

$$H^i(\mathbf{P}^r, E_0(d-i)) = 0$$

per ogni $i > 0$. Combinando i due risultati, otterremmo quindi che

$$H^i(\mathbf{P}^r, \operatorname{coker}\varphi_1(d-i)) = 0$$

per ogni $i < 0$, cioè che $\operatorname{reg}(\operatorname{coker}\varphi_1) \le d$. Questo prova che la disuguaglianza su $\operatorname{reg}(\operatorname{im}\varphi_1)$ implica quella su $\operatorname{reg}(\operatorname{coker}\varphi_1)$.

Poiché $H_1(\mathbf{E})$ ha supporto in dimensione al più 1, sappiamo che $H^i(\mathbf{P}^r, H_1(\mathbf{E})(p)) = 0$ per ogni $i > 1$ e per ogni $p \in \mathbb{Z}$. Quindi, considerando la successione esatta lunga associata alla successione

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbf{E}) \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi_2 \longrightarrow \operatorname{im} \varphi_1 \longrightarrow 0$$

si determina $\operatorname{reg}(\operatorname{im} \varphi_1) \leq \operatorname{reg}(\operatorname{coker} \varphi_2)$. Ma per ipotesi induttiva sappiamo che $\operatorname{reg}(\operatorname{coker} \varphi_2) \leq d + 1$, provando la tesi. □

Il Lemma si applica dunque per ottenere una stima della regolarità di un opportuno fascio di ideali.

PROPOSIZIONE 9.1. *Supponiamo che $\varphi : \mathscr{F}_1 \longrightarrow \mathscr{F}_0$ sia un morfismo di fibrati vettoriali su $\mathbf{P}^r := \mathbf{P}^r_k$, tali che*

$$\mathscr{F}_0 = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r_k}, \quad \mathscr{F}_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r_k}(-1)$$

Se il fascio di ideali $\mathscr{I}_m(\varphi)$ generato dai minori d'ordine m di φ definisce un sottoschema chiuso di $\mathbf{P}^r_k$ avente dimensione al più 1, allora

$$\operatorname{reg}(\mathscr{I}_m(\varphi)) \leq m$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il complesso di Eagon-Northcott $\mathbf{EN}(\varphi) := (E_p)_{p \geq 0}$ relativo al morfismo φ: il termine di grado 0 è isomorfo a $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}$ mentre per $p > 0$ si hanno i termini

$$E_p = \left(\bigodot^{p-1} \mathscr{F}_0\right)^{\vee} \otimes \bigwedge^{m+p-1} \mathscr{F}_1$$

Ora, in base alle proprietà dell'algebra simmetrica e dell'algebra esterna, si ha

$$\bigodot^{p-1} \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}^m \simeq \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}^{\binom{m+p-2}{p-1}}$$

e

$$\bigwedge^{m+p-1} \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(-1)^n \simeq \left(\bigwedge^{m+p-1} \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}^n\right)(-m-p+1) \simeq$$
$$\simeq \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(-m-p+1)^{\binom{n}{m+p-1}}$$

Cioè, il termine p-esimo del complesso $\mathbf{EN}(\varphi)$ è somma diretta di diverse copie di $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(-m-p+1)$, che ha regolarità pari a $m+p-1$. Ma allora, per il Lemma 9.4 con $d = m-1$, si ha che

$$\operatorname{reg}(\operatorname{coker} \partial_1) = \operatorname{reg}(\mathscr{I}_m(\varphi)) \leq m - 1 < m$$

□

Il seguente risultato unifica i progressi fatti fino ad ora. Poniamo $h^j(\mathscr{F}) := \dim_k H^j(X, \mathscr{F})$.

TEOREMA 9.3. *Sia $X \subseteq \mathbf{P}^r := \mathbf{P}^r_k$ una curva liscia ed irriducibile, con $r \geq 3$ e sia $\mathscr{L}$ un fascio invertibile su X; sia inoltre $\mathscr{M}$ il sottofibrato tautologico di rango r su $\mathbf{P}^r$. Se*

$$H^1\Big(X, \bigwedge^2 \mathscr{M} \otimes \mathscr{L}\Big) = 0$$

allora $\operatorname{reg}(\mathscr{I}_X) \leq h^0(\mathscr{L})$.

DIMOSTRAZIONE. In base alle ipotesi, per il Teorema 9.2 l'S-modulo

$$F = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathscr{L}(n))$$

ha una presentazione lineare libera del tipo $S(-1)^n \longrightarrow S^m \longrightarrow F \longrightarrow 0$, provando che $\mathscr{L}$ è conucleo di un morfismo localmente lineare $\varphi : \mathscr{O}^n_{\mathbf{P}^r}(-1) \longrightarrow \mathscr{O}^m_{\mathbf{P}^r}$. Ma allora per la Proposizione 9.1 abbiamo $\operatorname{reg}(\mathscr{I}_m(\varphi)) \leq h^0(\mathscr{L})$. La disuguaglianza $m \leq h^0(\mathscr{L})$ segue dalla minimalità della presentazione. Ma in queste ipotesi, il Lemma 9.1 mostra che $\operatorname{reg}(\mathscr{I}_X) \leq \operatorname{reg}(\mathscr{I}_m(\varphi))$. $\square$

9.5. Filtrazioni del sotto-fibrato tautologico.

Grazie alla riduzione operata tramite il Teorema 9.3, la tesi si ottiene determinando un fibrato lineare $\mathscr{L}$ che verifichi le ipotesi richieste dal teorema e tale che $h^0(\mathscr{L})$ sia opportunamente piccolo. Per ottenere l'annullamento della coomologia di $\bigwedge^2 \mathscr{M} \otimes \mathscr{L}$ ricorriamo ad una proprietà dei fibrati vettoriali sulle curve lisce.

LEMMA 9.5. *Sia $\mathscr{N}$ un fibrato vettoriale su una curva liscia C, su un campo algebricamente chiuso k. Se $\mathscr{N}$ è contenuto nella somma diretta di copie di $\mathscr{O}_C$ e $H^0(C, \mathscr{N}) = 0$, esiste una filtrazione*

$$\mathscr{N} = \mathscr{N}_0 \supset \mathscr{N}_1 \supset \ldots \supset \mathscr{N}_{r+1} = 0$$

tale che ogni fattoriale $\mathscr{N}_i / \mathscr{N}_{i+1} = \mathscr{L}_i$ è un fibrato lineare di grado strettamente negativo.

DIMOSTRAZIONE. Basta ed occorre determinare un epimorfismo $\mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{L}_1$ dove $\mathscr{L}_1$ è un fibrato lineare di grado negativo. In questa condizione, il nucleo $\mathscr{N}'$ soddisfa automaticamente le ipotesi del Lemma e induttivamente possiede una filtrazione come desiderato.

Ora, sappiamo che esiste un'immersione $\mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{O}^n_C$ per qualche n. Mostriamo che si può scegliere n pari al rango r di $\mathscr{N}$. Poiché $\mathscr{N}$ è localmente libero, è sufficiente dimostrare che, dato un anello integro A, se M è un A-modulo contenuto in A^n per qualche n, allora si può scegliere n pari al rango di M. Infatti, se K è il campo dei quozienti di A, allora $M \otimes_A K$ è un K-spazio vettoriale che ha per dimensione esattamente r, il rango di M. Ora, sia $\{b_1, \ldots, b_r\}$ una base di $M \otimes_A K$ su K: dato che $M \otimes_A K \simeq K^r$, possiamo scrivere $b_i = (x_{i,1}/y_{i,1}, \ldots, x_{i,r}/y_{i,r})$. Ma allora il morfismo $K^r \longrightarrow A^r$ che manda $b_i \mapsto (x_{i,1}, \ldots, x_{i,r})$ per ogni i è un isomorfismo e porge una immersione $M \subseteq A^r$ come volevamo.

Si consideri il diagramma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{N} \arrow[r, "f"] & \mathscr{O}_C^r \arrow[d, "\pi"] \\ & & \mathscr{O}_C \arrow[d] \\ & & 0 \end{tikzcd}$$

dove π è la proiezione canonica. La freccia f non è un isomorfismo, poiché $H^0(C, \mathscr{O}_C^r) \neq 0$; inoltre $\mathscr{N}$ non è contenuto in $\ker(\pi) = \mathscr{O}_C^{r-1}$, altrimenti questo contrasterebbe con il fatto che $\mathrm{rk}(\mathscr{N}) = r$. Quindi il fascio $\mathscr{J} := \mathrm{im}(\pi \circ f)$ è non nullo ed è un sottofascio algebrico e coerente di $\mathscr{O}_C$, rendendo commutativo il diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{N} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathscr{O}_C^r \arrow[d, "\pi"] \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{J} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_C \arrow[d] \\ & 0 & 0 \end{tikzcd}$$

Necessariamente $\mathscr{J}$ è un fascio di ideali di rango al più 1. Rimane da provare che $\mathscr{J}$ è localmente libero. Poiché C è una curva liscia, per ogni $p \in C$ l'anello locale $\mathscr{O}_{C,p}$ è locale regolare di dimensione 1. Per la formula di Auslander-Buchsbaum, abbiamo che

$$\dim^{(\mathrm{proj})}(\mathscr{J}_p) + \mathrm{depth}(\mathscr{J}_p) = \dim(\mathscr{O}_{C,p}) = 1$$

Poiché $\mathscr{J}_p \subseteq \mathscr{O}_{C,p}$, ogni elemento $\mathscr{O}_{C,p}$-regolare è anche $\mathscr{J}_p$-regolare, quindi $\mathscr{J}_p$ ammette un elemento regolare in $\mathfrak{m}_p$. Questo prova che $\mathrm{depth}(\mathscr{J}_p) = 1$ e quindi $\mathscr{J}_p$ è proiettivo. Ma i moduli proiettivi sugli anelli locali sono necessariamente liberi, quindi $\mathscr{J}_p$ è libero per ogni $p \in C$. Per la Proposizione 2.1, questo basta per dimostrare che $\mathscr{J}$ è localmente libero di rango 1. □

LEMMA 9.6. *Se $\mathscr{N}$ è un fibrato vettoriale su una varietà X, tale che esista una filtrazione*

$$\mathscr{N} = \mathscr{N}_0 \supset \mathscr{N}_1 \supset \ldots \supset \mathscr{N}_{r+1} = 0$$

avente per fattoriali dei fibrati lineari $\mathscr{L}_i$, allora il fibrato $\bigwedge^2 \mathscr{N}$ ha una filtrazione analoga, i cui fattoriali sono isomorfi ai fibrati lineari $\mathscr{L}_i \otimes \mathscr{L}_j$ per $1 \leq i < j \leq r$.

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per induzione sul rango r di $\mathscr{N}$. Se $r = 1$, allora $\bigwedge^2 \mathscr{N} = 0$ quindi non c'è nulla da provare. Sia $r > 1$ e supponiamo

che esista una filtrazione di $\mathscr{N}$ come in ipotesi. Allora dalla successione esatta corta
$$0 \longrightarrow \mathscr{N}_r \longrightarrow \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{N}/\mathscr{N}_r \longrightarrow 0$$
si trova la successione esatta, come afferma la Proposizione 3.10
$$0 \longrightarrow (\mathscr{N}/\mathscr{N}_r) \otimes \mathscr{N}_r \longrightarrow \bigwedge^2 \mathscr{N} \longrightarrow \bigwedge^2 \mathscr{N}/\mathscr{N}_r \longrightarrow 0$$
I fibrati $(\mathscr{N}_i/\mathscr{N}_r) \otimes \mathscr{N}_r$ costituiscono una filtrazione di $(\mathscr{N}/\mathscr{N}_r) \otimes \mathscr{N}_r$ con fattoriali
$$\frac{\mathscr{N}_i/\mathscr{N}_r \otimes \mathscr{N}_r}{\mathscr{N}_{i+1}/\mathscr{N}_r \otimes \mathscr{N}_r} \simeq \mathscr{L}_i \otimes \mathscr{N}_r$$
Analogamente, poiché i fibrati $\mathscr{N}_i/\mathscr{N}_r$ costituiscono una filtrazione di $\mathscr{N}/\mathscr{N}_r$ con fattoriali
$$\frac{\mathscr{N}_i/\mathscr{N}_r}{\mathscr{N}_{i+1}/\mathscr{N}_r} \simeq \mathscr{N}_i/\mathscr{N}_{i+1} \simeq \mathscr{L}_i$$
il fibrato $\bigwedge^2 \mathscr{N}/\mathscr{N}_r$ ha una filtrazione con fattoriali $\mathscr{L}_i \otimes \mathscr{L}_j$, per $1 \leq i < j \leq r-1$. $\square$

9.6. Completamento della dimostrazione.

Siamo in grado, dunque, di presentare la dimostrazione finale del Teorema 9.1.

Dimostrazione. Sia $d = \deg X$ e sia $\mathscr{M}$ il sotto-fibrato tautologico di rango r su $\mathbf{P}^r$; sappiamo che $\mathscr{M}$ è contenuto nella somma diretta degli $\mathscr{O}_X$ e quindi soddisfa le ipotesi del Lemma 9.6; questi asserisce che $\bigwedge^2 \mathscr{M}$ ammette una filtrazione finita, i cui fattoriali sono isomorfi a fibrati lineari della forma $\mathscr{L}_i \otimes \mathscr{L}_j$, per $i, j \in \{1, \ldots, r\}$. Inoltre, ogni $\mathscr{L}_j$ ha grado strettamente negativo.

Per ottenere l'annullamento di $H^1(X, \bigwedge^2 \mathscr{M} \otimes \mathscr{L})$, si osservi che è sufficiente ottenere l'annullamento di di tutti gli $H^1(X, \mathscr{L}_i \otimes \mathscr{L}_j \otimes \mathscr{L})$. Ma per il Teorema 4.4, basta scelgere $\mathscr{L}$ fibrato lineare generico di grado e tale che
$$g - 1 \leq \deg(\mathscr{L}_i \otimes \mathscr{L}_j \otimes \mathscr{L}) = \deg \mathscr{L}_i + \deg \mathscr{L}_j + e$$
Ora, poiché $\mathscr{M}$ è il fascio cotangente di $\mathbf{P}^r$, utilizzando la successione di Eulero si determina che
$$\bigwedge^r \mathscr{M} \simeq \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(-1)$$
dunque, restringendo a X e ricordando che gli $\mathscr{L}_i$ filtrano $\mathscr{M}$, si trova
$$\sum_i \deg(\mathscr{L}_i) = -d$$
Quindi, per ogni i, j distinti si ha
$$\deg \mathscr{L}_i + \deg \mathscr{L}_j = -d - \sum_{p \neq i,j} \deg \mathscr{L}_p \geq -d + r - 2$$
dato che $\deg \mathscr{L}_j \leq -1$ per ogni $j = 1, \ldots, r$. Alla luce di ciò, è sufficiente scegliere
$$e = g - 1 + d - r + 2 = g + d - (r-1)$$

Abbiamo quindi dimostrato che, se $\mathscr{L}$ è un fibrato lineare generico e di grado $g+d-(r-1)$, allora sussiste il Teorema 9.3, cioè $\operatorname{reg}(\mathscr{I}_X) \le h^0(\mathscr{L})$. Per il Teorema di Riemann-Roch abbiamo che

$$\begin{aligned} h^0(\mathscr{L}) &= h^0(K_X - \mathscr{L}) + \deg(\mathscr{L}) + 1 - g = \\ &= h^1(\mathscr{L}) + (g - 1 + d - r + 2) + 1 - g = \\ &= h^1(\mathscr{L}) + d - r + 2 \end{aligned}$$

Tuttavia ricordando il Corollario 4.1 si ha che $\deg(X) \ge r = 1 + \operatorname{codim}(X)$, quindi possiamo scegliere $\mathscr{L}$ tale che $\deg(\mathscr{L}) \ge g+1$, in modo che sia soddisfatto il Teorema 4.4; dunque $\mathscr{L}$ è non speciale e si può concludere che $h^0(\mathscr{L}) = d - (r-1) + 1 = \deg(X) - \operatorname{codim}(X) + 1$. Questo, unito alle precedenti considerazioni, porta alla tesi. □

9.7. Esempi.

Vediamo adesso di applicare il risultato del Teorema 9.1 ad un contesto più geometrico.

Sia $X \subseteq \mathbf{P}^r = \mathbf{P}^r_k$ una curva liscia, irriducibile e non degenere e siano $s = \operatorname{reg}(X)$, $d = \deg(X)$. Per definizione, questo significa che il fascio di ideali $\mathscr{I}_X$ di X è s-regolare, ossia

$$H^i(\mathbf{P}^r, \mathscr{I}_X(s-i)) = 0$$

per ogni $i \ge 1$, e $H^i(\mathbf{P}^r, \mathscr{I}_X(t-i_0)) \ne 0$ per qualche $t < s$, $i_0 \ge 1$. Consideriamo allora la nota successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_X(s-i) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(s-i) \longrightarrow \mathscr{O}_X(s-i) \longrightarrow 0$$

Passando alla successione esatta lunga associata, $\mathscr{I}_X$ è s-regolare se e solo se

$$\begin{aligned} H^1(\mathbf{P}^r, \mathscr{I}_X(p)) = 0, &\qquad p \ge s-1 \\ H^1(\mathbf{P}^r, \mathscr{O}_X(s-2)) = 0 & \end{aligned} \tag{9.7.1}$$

In virtù di queste osservazioni, il Teorema 9.1 afferma allora che

$$H^1(\mathbf{P}^r, \mathscr{I}_X(s+1)) = 0, \quad H^1(\mathbf{P}^r, \mathscr{O}_X(s)) = 0$$

per ogni $s \ge d - r$. Per il Teorema 8.2, non è necessario verificare l'annullamento per s grandi; essenzialmente il teorema mostra che

$$H^1(\mathbf{P}^r, \mathscr{I}_X(d-r+1)) = 0, \quad H^1(\mathbf{P}^r, \mathscr{O}_X(d-r)) = 0 \tag{9.7.2}$$

Vediamone alcuni casi particolari, in dipendenza della dimensione r dello spazio proiettivo.

Il caso di base è quello di una curva liscia X sul piano $\mathbf{P}^2$; detto $d = \deg(X)$, il teorema afferma semplicemente che $\mathscr{I}_X$ è d-regolare. Verifichiamo che è effettivamente così: la prima condizione della (9.7.1) è sempre verificata, dato che il fascio di ideali di X è $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(-d)$. La relazione interessante è la seconda: dalla formula di aggiunzione 3.5 sappiamo che $\omega_X \simeq \omega_{\mathbf{P}^2}(d) \simeq \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(d-3)$, quindi

$$H^1(\mathbf{P}^r, \mathscr{O}_X(d-2)) = 0$$

in perfetto accordo con il Teorema 9.1. Come si vede, in questo caso non si hanno nuovi risultati ma si può verificare la precisione dell'enunciato.

Il primo caso non banale si ha per $r = 3$. Il teorema afferma che

$$H^1(\mathbf{P}^3, \mathscr{I}_X(d-2)) = 0, \quad H^1(\mathbf{P}^3, \mathscr{O}_X(d-3)) = 0$$

e vediamo se è possibile verificare le condizioni in alcuni casi notevoli. Ricordiamo che una curva proiettiva $X \subseteq \mathbf{P}^r$ si dice *intersezione completa* se il suo ideale I_X è generato da esattamente $r-1$ elementi. In particolare, esistono ipersuperficie $F_{d_1}, \ldots, F_{d_{r-1}} \subseteq \mathbf{P}^r$ tali che $X = F_{d_1} \cap \ldots \cap F_{d_{r-1}}$. Se inoltre $d = \deg(X)$, è chiaro che $d = \deg(F_{d_1}) \cdots \deg(F_{d_{r-1}}) = d_1 \cdots d_{r-1}$.

Ora, se $X \subseteq \mathbf{P}^3$ è intersezione completa di ipersuperficie F_{d_1}, F_{d_2} di gradi d_1, d_2 rispettivamente, allora per il Teorema di Hilbert-Burch, una risoluzione graduata dell'ideale $\mathscr{I}_X$ è data da:

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(-d_1 - d_2) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(-d_1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(-d_2) \xrightarrow{\psi} \mathscr{I}_X \longrightarrow 0$$

dove ψ è indotta dalla moltiplicazione per la matrice (F_{d_1}, F_{d_2}), essendo $F_{d_i} = V(F_i)$. Prendendo la coomologia su $\mathbf{P}^3$, questo prova che

$$H^1(\mathbf{P}^3, \mathscr{I}_X(s)) = 0$$

per ogni s, ed in particolare per $s = d - 2$. Per provare l'altra condizione, osserviamo che $\omega_X \simeq \omega_{\mathbf{P}^3}(d_1 + d_2) \simeq \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(d_1 + d_2 - 4)$; allora $H^1(\mathbf{P}^3, \mathscr{O}_X(p)) = 0$ se $p \geq d_1 + d_2 - 3$. Ma se $d_1, d_2 \geq 1$ è facile ottenere la stima

$$d = d_1 d_2 \geq d_1 + d_2 - 1$$

dunque a maggior ragione $H^1(\mathbf{P}^3, \mathscr{O}_X(p)) = 0$ se $p \geq d - 3$.

Altra situazione in cui è facile verificare il teorema si verifica per una curva razionale $X \subseteq \mathbf{P}^3$ di grado $d = 3$. Sappiamo che X è birazionalmente equivalente a $\mathbf{P}^1$ e si può identificare con l'immersione chiusa $\mathbf{P}^1 \hookrightarrow \mathbf{P}^3$ definita dal sistema lineare completo $|\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(3)|$. Abbiamo inoltre le identificazioni

$$H^p(\mathbf{P}^3, \mathscr{O}_X(s)) \simeq H^p(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(3s)) \tag{9.7.3}$$

per ogni $p \geq 0$ e per ogni s. In particolare

$$H^1(\mathbf{P}^3, \mathscr{O}_X(d-3)) = H^1(\mathbf{P}^3, \mathscr{O}_X) \simeq H^1(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}) = 0$$

Per provare l'altra condizione, si consideri la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_X(1) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(1) \longrightarrow \mathscr{O}_X(1) \longrightarrow 0$$

Passando alla coomologia, la successione esatta lunga mostra che

$$H^0(\mathbf{P}^3, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(1)) \longrightarrow H^0(\mathbf{P}^3, \mathscr{O}_X(1)) \longrightarrow H^1(\mathbf{P}^3, \mathscr{I}_X(1)) \longrightarrow 0$$

Ricordando gli isomorfismi (9.7.3) ed il fatto che

$$H^0(\mathbf{P}^3, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(1)) \simeq H^0(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(3))$$

per come è definita la curva, si conclude che

$$H^1(\mathbf{P}^3, \mathscr{I}_X(d-2)) = H^1(\mathbf{P}^3, \mathscr{I}_X(1)) = 0$$

.

Un ulteriore caso interessante è quello di una curva quartica razionale in $\mathbf{P}^3$, cioè una curva X di grado 4 birazionalmente equivalente a $\mathbf{P}^1$. In questo caso, il teorema afferma che

$$H^1(\mathbf{P}^3, \mathscr{I}_X(2)) = 0, \quad H^1(\mathbf{P}^3, \mathscr{O}_X(1)) = 0$$

Possiamo identificare X con il sistema lineare $|V|$ determinato da un sottospazio $V \subseteq \Gamma(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(4))$ di dimensione 4. In particolare, è immediato osservare che

$$H^1(\mathbf{P}^3, \mathscr{O}_X(1)) \simeq H^1(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(4)) = 0$$

Per provare l'altra condizione, osserviamo che la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_X(2) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(2) \longrightarrow \mathscr{O}_X(2) \longrightarrow 0$$

induce la seguente successione esatta in coomologia:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathbf{P}^3, \mathscr{I}_X(2)) \longrightarrow H^0(\mathbf{P}^3, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(2)) \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{f} H^0(\mathbf{P}^3, \mathscr{O}_X(2)) \longrightarrow H^1(\mathbf{P}^3, \mathscr{I}_X(2)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Basta dunque provare che la freccia f è suriettiva; dato che

$$h^0(\mathbf{P}^3, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(2)) = \binom{5}{2} = 10, \quad h^0(\mathbf{P}^3, \mathscr{O}_X(2)) = h^0(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(8)) = 9$$

è sufficiente provare che $h^0(\mathbf{P}^3, \mathscr{I}_X(2)) = 1$. Supponiamo per assurdo che $h^0(\mathbf{P}^3, \mathscr{I}_X(2)) \geq 2$; in tal caso X è contenuto nell'intersezione $Q_1 \cap Q_2$ di due quadriche non singolari. Allora, usando la formula d'aggiunzione

$$\omega_{Q_j} = \omega_{\mathbf{P}^3} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(2) \otimes \mathscr{O}_{Q_j} = \mathscr{O}_{Q_j}(-2),$$
$$\omega_{Q_1 \cap Q_2} = \omega_{Q_j} \otimes \mathscr{O}_{Q_j}(2) \otimes \mathscr{O}_X = \mathscr{O}_X$$

quindi $g(Q_1 \cap Q_2) = h^0(X, \mathscr{O}_X) = 1$. Confrontando le caratteristiche di Eulero, dovrebbe essere $\chi(\mathscr{O}_X(p)) \leq \chi(\mathscr{O}_{Q_1 \cap Q_2}(p))$, ma per quanto visto risulta, invece,

$$\chi(\mathscr{O}_X(p)) = 4p + 1 > 4p = \chi(\mathscr{O}_{Q_1 \cap Q_2}(p))$$

e questo è assurdo.

Bibliografia

[1] A. Beauville, *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque 54, Soc. Math. France, 1978.

[2] G. Boffi, D. Buchsbaum, *Threading homology through algebra*, Oxford Sc. Publ., 2006.

[3] N. Bourbaki, *Algébre*, Cap. I-III, in "Éléments de Mathématique", Hermann, 1970.

[4] D. Buchsbaum, D. Eisenbud, *What makes a complex exact?*, in "Journal of Algebra", Dep. Math. Brandeis Univ., 1973.

[5] G. Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, VII, 1893.

[6] C. Ciliberto, A. V. Geramita e F. Orecchia, *Remarks on a theorem of Hilbert-Burch*, in "The curves seminar at Queen's", vol. IV, Queen's Univ., 1986.

[7] I. Bucur e D. Deleanu, *Introduction to the theory of categories and functors*, A. Wiley, 1968.

[8] J. A. Eagon e D. G. Northcott, *Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them*, Proc. Royal Soc. Ser. A, 1962.

[9] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer, 1995.

[10] D. Eisenbud, *The geomety of syzygies*, Springer, 1995.

[11] D. Eisenbud, J. Harris, *The geometry of schemes*, Springer, 2000.

[12] U. Görtz e T. Wedhorn, *Algebraic geometry I*, Viehweg & Teubner, 2010.

[13] S. Goto e K. Watanabe, *On graded rings*, voll. I-II, Math. Soc. Japan, 1978 .

[14] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faiscieux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*, in "S. G. A. 2", North-Holland Publ., 1968.

[15] G. Hermann, *Über die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale*, Math. Annalen, 1926.

[16] D. Hilbert, *Über die Theorie der algebraischen Formen*, Math. Annalen, 1890.

[17] L. Gruson, R. Lazarsfeld e C. Peskine, *On a theorem of Castelnuovo, and the equations defining space curves*, Invent. Math., 1983.

[18] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer, 1977.

[19] F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer, 1978.

[20] H. Matsumura, *Commutative algebra*, Benjamin, 1970.

[21] C. McLarty, *Hilbert on Theology and its discontents: the origin myth of modern mathematics*, in "Circles disturbed", ed. da A. Doxiadis e B. Mazur, Princeton Univ. Press, 2012.

[22] D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface,* Princeton Univ. Press, 1966.

[23] C. Okonek, M. Schneider e H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, Birkhäuser, 1980.

[24] I.R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer Verlag, 1977.