Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Schemi zero-dimensionali e postulazione

Candidato
Sara Lamboglia

Relatore
Prof. Edoardo Sernesi

Anno Accademico 2013-14
Luglio 2014

Classificazione AMS: 14H50,14J60,13D02,13D07
Parole chiave: curva, superficie, postulazione, fibrato vettoriale.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare principalmente il professor Edoardo Sernesi, relatore di questa tesi, per la grande disponibilità e cortesia dimostratemi. Grazie alla sua costante guida ho avuto la possibilità non solo di realizzare questo lavoro ma anche di conoscere nuovi argomenti e approfondirne altri precedentemente studiati.
Un sentito ringraziamento va ai miei genitori, Antonietta e Pasquale, e a mio fratello Francesco.
Infine vorrei ringraziare, ad uno ad uno, tutti i miei amici, i quali sono stati, e sono, fondamentali per me.

Indice

Introduzione **4**

1 Prerequisiti **9**

1.1 Funtori derivati 9

1.2 Estensioni di moduli 13

1.2.1 Definizione 13

1.2.2 I funtori $\mathrm{Ext}^1_R(-, A)$ e $\mathrm{Ext}^1_R(C, -)$ 15

1.2.3 Addizione di estensioni 21

1.3 Successioni regolari, profondità e dimensione proiettiva 22

1.3.1 Complessi di Koszul 24

1.3.2 La formula di Auslander-Buchsbaum 30

1.3.3 Il teorema di Hilbert-Burch 32

1.4 Fibrati lineari, fasci invertibili e divisori 33

1.4.1 Divisori 33

1.4.2 Fibrati lineari 35

1.4.3 Corrispondenza tra fibrati lineari e divisori 36

1.4.4 Fasci invertibili 40

1.4.5 Il teorema di Riemann-Roch 40

2 Il teorema di Cayley-Bacharach **42**

2.1 Versioni elementari 42

2.1.1 Pappo di Alessandria e Pascal 42

2.1.2 Il teorema di Chasles 43

2.2 Cayley e Bacharach 46

2.2.1 Estensioni di Cayley-Bacharach 54

3 Fibrati vettoriali **59**
3.1 La proprietà di Cayley-Bacharach 59
3.2 La corrispondenza di Serre 60
3.3 Il teorema di Cayley-Bacharach per i fibrati 66

4 Ulteriori considerazioni in $\mathbb{P}^2$ **68**
4.1 La proprietà di C-B e le intersezioni complete 68
4.2 Matrici associate a punti di $\mathbb{P}^2$ 69
4.3 Esempi di fibrati di rango 2 75
4.3.1 Coomologia dei fibrati 77

Bibliografia **83**

Introduzione

Iniziare sempre con gli esempi più semplici.
David Hilbert

In questa tesi ci occuperemo della postulazione nel piano proiettivo ossia delle condizioni indipendenti imposte dai sistemi di punti alle curve di dato grado. Il teorema di Cayley-Bacharach sarà essenziale nella trattazione, a partire dalla forma classica fino agli sviluppi in relazione all'esistenza di particolari fibrati vettoriali. Utilizzeremo tale risultato anche per studiare le intersezioni complete e in questo ambito sarà molto importante il teorema di Hilbert-Burch che offre un punto di vista algebrico sul problema.

Sia nel campo della geometria algebrica ma anche in quello della matematica applicata è interessante studiare i polinomi che si annullano in un determinato insieme di punti del piano. L'annullarsi di un polinomio f in un punto è una condizione lineare imposta ai coefficienti di f. Quindi nel caso di n punti abbiamo n condizioni. Il problema è però calcolare il numero di condizioni *indipendenti* imposte ai polinomi di grado fissato d. Con esempi molto semplici (tre punti allineati e i polinomi di primo grado) si può vedere che in generale il numero delle condizioni indipendenti è minore di n e nasce quindi la questione di come calcolarlo. Il teorema di Cayley-Bacharach nella sua forma classica (2.2.2) dà una prima soluzione al problema considerando dei punti particolari ossia punti che sono l'intersezione di due curve. Se le curve hanno grado m e n allora tutte le curve di grado $m+n-3$ che passano per $mn-1$ punti contengono anche l'mn-esimo punto, cioè le condizioni indipendenti sono al più $mn-1$.
Dietro questo teorema possiamo riconoscere una lunga storia che viene de-

lineata nell'articolo di Eisenbud, Green ed Harris [7].
Il primo risultato a poter essere considerato antecedente del teorema di Cayley-Bacharach risale al IV sec d.C. ed è attribuito al matematico greco Pappo di Alessandria. Più precisamente ci riferiamo alla proposizione 139 del VII libro delle sue *Collectiones mathematicae.* Andando avanti con i secoli, quando nel '600 vari fattori contribuirono ad un rinnovato interesse per la geometria (ad esempio lo studio dello spazio proiettivo da parte di Cartesio e la scoperta di Keplero delle orbite ellittiche dei pianeti)Pascal provò un teorema che generalizza il risultato di Pappo e che diventa per lui uno strumento essenziale per dimostrare molte proprietà delle coniche.
A concludere la rassegna storica precedente a Cayley e Bacharach è il matematico francese Michael Chasles che nel suo *Traité des Sections Coniques*[13] propone un risultato più semplice e più potente di quello di Pascal. Egli dimostra che date due cubiche che si intersecano in nove punti distinti $p_1, ..., p_9$, una qualsiasi cubica contenente $p_1, ..., p_8$ contiene anche p_9. Notiamo che il teorema equivale a dire che tutte le cubiche che passano per questi otto punti si intersecano in un unico altro punto. Le coordinate di questo nono punto dipendono dalle coordinate degli altri otto e sono state calcolate esplicitamente nel recente articolo di Q.Ren,J.Richter-Gebert e B.Sturmfels [5].
Arriviamo quindi ai protagonisti del nostro percorso storico, i matematici Cayley e Bacharach. Nel 1843 Cayley pubblicò un lavoro su un'estensione del teorema di Chasles. Alla base del suo risultato c'era un metodo per calcolare il numero $h_\Gamma(k)$ delle condizioni indipendenti imposte da un sistema di punti Γ alle curve di grado k. Egli notò che dati $d \cdot e$ punti intersezione di due curve di grado d ed e allora $h_\Gamma(k)$ poteva essere calcolato esplicitamente:

$$h_\Gamma(k) = \binom{k+2}{2} - \binom{k-d+2}{2} - \binom{k-e+2}{2} + \binom{k-d-e+2}{2}.$$

La sua conclusione è che qualsiasi curva di grado k che contiene un sottoinsieme di $h_\Gamma(k)$ punti contiene anche i rimanenti. Questo è falso e si può vedere considerando una retta L e un insieme di punti $\Gamma' = \{p_1, p_2, p_3\} \subset L$. Date C_1 e C_2 due cubiche contenenti Γ', che si intersecano nell'insieme Γ costituito da nove punti distinti, abbiamo che $h_\Gamma(1) = 3$ ma la retta che

passa per Γ' non contiene tutto Γ altrimenti avremmo che l'intersezione di C_1 e C_2 sarebbe una retta e non nove punti. A correggere Cayley e ad ampliare nel modo giusto il teorema di Pascal sarà Bacharach intorno al 1881. Egli osserverà che la conclusione di Cayley è vera nel caso in cui il resto dei punti non sia su una curva di un determinato grado. Da questa considerazione Bacharach giungerà ad un ampliamento (2.2.9) dell'enunciato per la cui dimostrazione vengono utilizzati argomenti e tecniche sviluppate in quel periodo, ad esempio il linguaggio dei divisori e delle serie lineari e il teorema di Riemann-Roch. Inoltre il teorema di Bacharach può essere ulteriormente ampliato al caso di ipersuperfici che hanno intersezione completa.
Nel XX secolo il teorema di Cayley-Bacharach viene interpretato alla luce del nuovo linguaggio degli schemi. Ulteriori numerosi sviluppi possono essere trovati sempre in [7] in cui il teorema viene generalizzato e considerato dal un punto di vista algebrico che dà luogo ad alcune interessanti congetture. Quest'ultime riguardano limiti superiori e inferiori per la funzione di Hilbert $h_\Gamma(k)$.
L'altra direzione in cui viene ampliato e approfondito il teorema di Cayley-Bacharach è la teoria dei fibrati vettoriali. La proprietà che caratterizza i punti del teorema diventa la proprietà di Cayley-Bacharach per sottoschemi zero-dimensionali. Attraverso la costruzione di Serre vediamo che tale proprietà per Z sottoschema zero-dimensionale garantisce l'esistenza di particolari fibrati di rango 2 associati a Z. Questi fibrati vengono utilizzati nel teorema di Reider ben illustrato nell'articolo di R.Lazarsfeld[12].
L'ultimo problema di cui ci occuperemo sarà di utilizzare la proprietà di C-B per caratterizzare le intersezioni complete ossia per risolvere il problema di Eulero-Cramer:

> Dato Z un insieme finito di punti di $\mathbb{P}^2$, trovare condizioni necessarie e sufficienti su Z perché esistano due curve $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ tali che $Z = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

Vedremo che la proprietà di Cayley-Bacharach dà una condizione solo necessaria e quindi per trovarne una anche sufficiente introdurremo il teorema di Hilbert-Burch. La nostra trattazione non sarà molto approfondita ma gli studi su questo argomento sono numerosi ed è interessante vedere la soluzione al problema illustrata nell'articolo di E.Davis-P.Maroscia [9].

Procediamo descrivendo nel particolare gli argomenti presenti nelle diverse sezioni di questa tesi.
Nel primo capitolo si trovano i concetti preliminari necessari per affrontare la trattazione successiva. Assumendo come note le nozioni di teoria delle categorie, coomologia e teoria del fasci, introduciamo la nozione di funtore derivato e le sue diverse proprietà. Successivamente viene richiamato il concetto di estensione di un modulo C per un modulo A come successione esatta i cui estremi sono proprio A e C. Tramite la costruzione di *pull-back* e *push-forward* di estensioni vengono poi introdotti i funtori $\mathrm{Ext}^n(-, A)$ e $\mathrm{Ext}^n(C, -)$ i quali sono rispettivamente i funtori derivati di $\mathrm{Hom}(-, A)$ e $\mathrm{Hom}(C, -)$. A seguire troviamo una sezione dedicata all'algebra omologica in cui illustriamo il Complesso di Koszul, le successioni regolari e diamo la definizione di dimensione proiettiva di un modulo e di profondità di un ideale. Dimostriamo la formula di Auslander-Buchsbaum(1.3.8) che mette in relazione le due nozioni e concludiamo enunciando il teorema di Hilbert-Burch(1.3.12), il quale verrà utilizzato nella parte finale della tesi. Infine nell'ultima parte del capitolo consideriamo i fibrati vettoriali, i fasci invertibili e i divisori in particolare illustrando la corrispondenza che sussiste tra questi oggetti. In ultimo abbiamo il teorema di Riemann-Roch(1.4.10) enunciato nel caso di una curva proiettiva non singolare e irriducibile.
Iniziamo il secondo capitolo mettendo in relazione tre risultati dovuti ai matematici Pappo di Alessandria, Pascal e Chasles. Osserviamo come ognuno può essere considerato una generalizzazione del precedente e quindi il teorema di Pappo(2.1.1) è un caso particolare di quello di Pascal(2.1.2) che è a sua volta un caso specifico di quello di Chasles(2.1.3). Si può notare che il sistema di nove punti presi in considerazione, in un primo momento è diviso in tre parti(in Pappo ci sono tre punti su una retta, tre su un'altra e tre nell'intersezione di determinate rette), poi in due (Pascal divide i sei punti sull'esagono e i tre punti nell'intersezione del prolungamento dei lati) e infine è considerato senza ripartizioni da Chasles(nove punti nell'intersezione di due cubiche). Nella sezione (2.2) arriviamo ad enunciare il teorema(2.2.2) dovuto a Cayley e a Bacharach che generalizza Chasles al caso di curve $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ di grado m ed n qualsiasi. Viene data una prima dimostrazione con tecniche abbastanza elementari basata sul teorema $Af + B\phi$ di Noether(2.2.1).

In seguito interpretiamo il teorema di Cayley-Bacharach attraverso il linguaggio dei divisori, fornendone una dimostrazione che offre lo spunto per due estensioni del teorema. La prima(2.2.9), dovuta allo stesso Bacharach, considera $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ come unione disgiunta di due sottoinsiemi Γ' e Γ'' e calcola le condizioni indipendenti imposte da Γ' in relazione a quelle imposte da Γ''. La seconda è a sua volta una generalizzazione della precedente estensione al caso dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ e di n ipersuperfici .
Dal teorema di Cayley-Bacharach passiamo, nel terzo capitolo, alla proprietà di Cayley-Bacharach. Sia data X superficie proiettiva e non singolare, $Z \subset X$ sottoschema zero-dimensionale e L fibrato lineare su X. Il sottoschema Z soddisfa la proprietà di C-B rispetto a $L \otimes K_X$ se per ogni $Z' \subset Z$ tale che $h^0(X, \mathcal{O}_{Z'}) = h^0(X, \mathcal{O}_Z) - 1$ e per ogni $s \in H^0(X, L \otimes K_X)$ si ha che $s|_{Z'} = 0$ implica $s|_Z = 0$. Proveremo il teorema di Cayley-Bacharach per fibrati (3.1.1) che fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché Z soddisfi la proprietà di C-B. L'interesse per questo teorema va oltre la semplice estensione di Cayley-Bacharach ai fibrati, in quanto esso implica l'esistenza di fibrati vettoriali di rango 2 su X che hanno come determinante L e sono tali che esiste una loro sezione globale s per cui $Z = Z(s)$. In particolare vedremo il metodo di Serre per costruire tali fibrati e quindi individuare una corrispondenza tra questi e i sottoschemi zero-dimensionali di X.
A conclusione del nostro lavoro illustriamo nel quarto capitolo varie applicazioni nel piano proiettivo. In una prima parte osserviamo che un insieme di punti che è intersezione completa di due curve di grado m e n soddisfa C-B rispetto al fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m+n) \otimes K_{\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m+n-3)$. Ci chiediamo se tale condizione è anche sufficiente perché un sistema di punti sia intersezione completa di due curve ma con un semplice controesempio (4.1.1) vediamo che non è vero. Troveremo una condizione necessaria e sufficiente attraverso il teorema di Hilbert-Burch(1.3.12), il quale calcola la matrice associata al sistema di punti. Nell'ultima parte del capitolo ci dedichiamo allo studio dei fibrati di rango 2 di cui il teorema (3.1.1) garantisce l'esistenza. Calcoleremo le classi di Chern e per individuare $h^0(\mathbb{P}^2, E)$ e $h^1(\mathbb{P}^2, E)$ dovremo restringerci al caso di punti in *posizione generale.*

Capitolo 1

Prerequisiti

1.1 Funtori derivati

In questo paragrafo introduciamo la nozione di *funtore derivato* riprendendo la trattazione presente nel capitolo III di [14].
Da ora in avanti $\mathcal{U}$ e $\mathcal{B}$ indicheranno due categorie abeliane qualsiasi.

Definizione 1.1.1. *Un* **complesso coomologico** A^* *in* $\mathcal{U}$ *è una collezione di oggetti* $\{A^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *e di omomorfismi* $d^i : A^i \to A^{i+1}$ *tali che* $d^{i+1} \circ d^i = 0$ *per ogni* $i \in \mathbb{Z}$.

Definizione 1.1.2. *Un* **morfismo di complessi** $f : A^* \to B^*$ *è un insieme di omomorfismi,* $f^i : A^i \to B^i$ *per ogni* i*, che commutano con* d^i*, ossia risulta commutativo per ogni* i*:*

$$\begin{tikzcd} A^i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "d^i"] & B^i \arrow[d, "d^i"] \\ A^{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] & B^{i+1}. \end{tikzcd}$$

Definizione 1.1.3. *L'i-esimo oggetto di* **coomologia** $H^i(A^*)$ *è definito come*

$$\ker(d^i)/\mathrm{Im}\,(d^{i-1}).$$

In modo simile si definisce un complesso omologico A_* come una collezione di oggetti $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ dotata di omomorfismi $d_i : A_i \to A_{i-1}$ tali che $d_{i-1} \circ d_i = 0$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$. L'omologia di tali complessi si indica con $H_i(A_*)$.

Definizione 1.1.4. *Un funtore covariante F tra $\mathcal{U}$ e $\mathcal{B}$ si dice* **additivo** *se* $\mathrm{Hom}(A, A') \to \mathrm{Hom}(F(A), F(A'))$ *è un omomorfismo di gruppi abeliani per ogni A e A' in $\mathcal{U}$.*

Definizione 1.1.5. *Un funtore covariante F tra $\mathcal{U}$ e $\mathcal{B}$ si dice* **esatto a sinistra** *se è additivo e per ogni successione esatta in $\mathcal{U}$*

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

risulta essere esatta in $\mathcal{B}$

$$0 \longrightarrow F(A') \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(A'').$$

Un funtore covariante F tra $\mathcal{U}$ e $\mathcal{B}$ si dice **esatto a destra** *se è additivo e per ogni successione esatta in $\mathcal{U}$*

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

risulta essere esatta in $\mathcal{B}$

$$F(A') \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(A'') \longrightarrow 0.$$

Un funtore si dice **esatto** *se è esatto a destra e a sinistra.*

Osservazione 1.1.1. La stessa definizione, con opportune modifiche, vale per i funtori controvarianti.

Definizione 1.1.6. *Un oggetto I in $\mathcal{U}$ si dice* **iniettivo** *se il funtore* $\mathrm{Hom}(-, I)$ *è esatto.*

Definizione 1.1.7. *Una* **risoluzione iniettiva** *di $A \in \mathcal{U}$ è un complesso I^* con un'applicazione $\epsilon : A \to I^0$, tale che I^k è iniettivo, $I^k \neq 0$ per $k \geq 0$ ed è esatta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\epsilon} I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \dots$$

Definizione 1.1.8. *Se ogni oggetto di $\mathcal{U}$ è isomorfo a un sottooggetto di un oggetto iniettivo, diciamo che $\mathcal{U}$ ha* **abbastanza iniettivi**.

Osservazione 1.1.2. Se $\mathcal{U}$ ha abbastanza iniettivi allora ogni oggetto ha una risoluzione iniettiva.

Dimostrazione. Preso $Q \in \mathcal{U}$, per prima cosa abbiamo che esiste I_0 iniettivo e un'immersione $i_0 : Q \to I_0$, perchè $\mathcal{U}$ ha abbastanza iniettivi. Ora se I_0/Q è iniettivo abbiamo la risoluzione $0 \to Q \to I_0 \to I_0/Q \to 0$, se non è iniettivo allora esiste un'altra immersione $i_1 : I_0/Q \to I_1$, con I_1 iniettivo, e quindi abbiamo $0 \to Q \to I_0 (\to I_0/Q) \to I_1$. Iterando il procedimento con $I_1/Im(I_0 \to I_1)$ otteniamo una risoluzione iniettiva. $\square$

Definizione 1.1.9. *Sia $\mathcal{U}$ una categoria con abbastanza iniettivi e F un funtore covariante esatto a sinistra da $\mathcal{U}$ a $\mathcal{B}$.*
Data I^* una risoluzione iniettiva di A, definiamo i **funtori derivati destri** *R^iF ponendo $R^iF(A) = H^i(F(I^*))$ per ogni $i \geq 0$.*

Teorema 1.1.1. *Sia $\mathcal{U}$ una categoria con abbastanza iniettivi e $F : \mathcal{U} \to \mathcal{B}$ un funtore covariante esatto a sinistra allora:*

(i) Per ogni $i \geq 0$, R^iF è un funtore additivo ed è indipendente dalla scelta della risoluzione;

(ii) C'è un isomorfismo naturale tra F e R^0F;

(iii) Per ogni successione esatta $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ e per ogni i esiste $\delta^i : R^iF(A'') \to R^{i+1}F(A')$ tale che la seguente successione lunga è esatta:
$\ldots \longrightarrow R^iF(A') \longrightarrow R^iF(A) \longrightarrow R^iF(A'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(A') \longrightarrow$
$\longrightarrow R^{i+1}F(A) \longrightarrow \ldots$

(iv) Dato un morfismo tra $0 \to A' \to A \to A'' \longrightarrow 0$ e $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ vi è un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} R^iF(A'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^iF(B'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(B') \end{array}$$

(v) Per ogni oggetto iniettivo $I \in \mathcal{U}$ e per ogni $i > 0$ si ha che $R^iF(I) = 0$.

Esempio 1.1.1. Due esempi noti di funtori derivati destri sono:

(i) il funtore di coomologia $\mathrm{H}^i(X, \cdot)$, derivato destro del funtore delle sezioni globali $\Gamma(X, \cdot) : \mathfrak{Ab}(X) \to \mathfrak{Ab}$, dove $\mathfrak{Ab}(X)$ e $\mathfrak{Ab}$ sono le categorie rispettivamente dei fasci in gruppi abeliani e dei gruppi abeliani e $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$;

(ii) il funtore $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \cdot)$, derivato destro del funtore

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \cdot) : \mathfrak{Ab}(X) \to \mathfrak{Ab}.$$

(iii) il funtore $\mathrm{Ext}^n_R(-, A)$, che vedremo nel prossimo paragrafo, è il funtore derivato destro di $\mathrm{Hom}(-, A)$, dove A indica un $R-$modulo.

Analogamente andiamo a definire i funtori derivati sinistri utilizzando le risoluzioni proiettive.

Definizione 1.1.10. *Un oggetto P in $\mathcal{U}$ si dice* **proiettivo** *se* Hom(P,-) *è esatto.*

Definizione 1.1.11. *Una* **risoluzione proiettiva** *di $A \in \mathcal{U}$ è un complesso P^* con un'applicazione $\theta : P_0 \to A$, tale che P_k è proiettivo, $P_k \neq 0$ per $k \geq 0$ ed è esatta*

$$\ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\theta} A \longrightarrow 0.$$

Definizione 1.1.12. *Se ogni oggetto di $\mathcal{U}$ è isomorfo a un quoziente di un oggetto proiettivo, diciamo che $\mathcal{U}$ ha* **abbastanza proiettivi**.

Osservazione 1.1.3. Se $\mathcal{U}$ ha abbastanza proiettivi allora per ogni $A \in \mathcal{U}$ esiste una risoluzione proiettiva.

Dimostrazione. Dato $A \in \mathcal{U}$ si ha che $A \cong P_0/Q_0$ con P_0 proiettivo e quindi si ottiene $Q_0 \to P_0 \xrightarrow{\pi_0} A \longrightarrow 0$ con π_0 proiezione al quoziente. Se Q_0 è proiettivo allora la successione esatta ottenuta è una risoluzione proiettiva. Altrimenti Q_0 è isomorfo a P_1/Q_1, con P_1 proiettivo, quindi si ha $P_1 \xrightarrow{\pi_1} P_0 \xrightarrow{\pi_0} A \longrightarrow 0$ con π_1 composizione della proiezione al quoziente e dell'immersione di Q_0 in P_0. Iterando il procedimento precedente si ottiene una risoluzione proiettiva. □

Definizione 1.1.13. *Sia $\mathcal{U}$ una categoria con abbastanza proiettivi e $F : \mathcal{U} \to \mathcal{B}$ un funtore covariante esatto a destra.*
I **funtori derivati sinistri** *L_iF sono funtori tali che per ogni $i \geq 0$ si ha*

$$L_iF(A) = H^i(F(P^*))$$

dove P^* è una risoluzione proiettiva di A.

Esempio 1.1.2. Il funtore $\mathrm{Tor}(-, M)$ è il funtore derivato sinistro di $-\otimes M$.

1.2 Estensioni di moduli

Introduciamo ora le estensioni di moduli, $\mathrm{Ext}^n(C, A)$, e i funtori $\mathrm{Ext}^n(-, A)$ e $\mathrm{Ext}^n(C, -)$. La trattazione segue principalmente il capitolo III di[15] pag. 63-72.

1.2.1 Definizione

Definizione 1.2.1. *Sia R un anello commutativo unitario, una successione esatta lunga di $R-$ moduli*

$$0 \to A \to B_{n-1} \to ... \to B_1 \to B_0 \to C \to 0$$

da A a C, tramite moduli intermedi, si chiama **n-esima estensione** *di C per A e si denota con* E.

Considerando opportunamente una relazione di equivalenza tra due estensioni, si può definire l'insieme delle classi d'equivalenza $\mathrm{Ext}^n_R(C, A)$. Questo insieme con l'operazione *somma di Baer* forma un gruppo e si può vedere che se $R = k[x_1, ..., x_n]$ allora $\mathrm{Ext}^n(C, A)$ è anche un $k-$spazio vettoriale. Un modo di costruire $\mathrm{Ext}^n(C, A)$ è scrivere $C = F_0/S_0$, cioè come quoziente di un modulo libero F_0, allo stesso modo $F_0 = F_1/S_1$ e ripetere il procedimento su F_1, F_2... ottenendo la seguente risoluzione libera di C:

$$F_\bullet : \cdots \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to C \to 0$$

Si può dimostrare che il complesso $\mathrm{Hom}(F_\bullet, A)$ ha come coomologia i gruppi $\mathrm{Ext}^n_R(C, A)$.

In altre parole $\mathrm{Ext}^n_R(-, A)$ è il funtore derivato destro di $\mathrm{Hom}(-, A)$.

Vediamo ora in modo dettagliato le estensioni prime.
Siamo nel caso

$$E(\chi, \sigma) : 0 \to A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0.$$

Definizione 1.2.2. *Siano date due estensioni prime* E *ed* E$'$*.*
Un **morfismo di estensioni** Γ :E$\to$E$'$ *è una terna di morfismi* $\Gamma(\alpha, \beta, \gamma)$ *tale che il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{E}: 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
\mathrm{E}' : 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Definizione 1.2.3. *Due estensioni sono* **congruenti** *se esiste un morfismo* $(1_A, \beta, 1_C) : E \to E'$*.*

Osservazione 1.2.1.

(i) Il morfismo β di $R-$moduli, che compare nella definizione precedente, risulta essere un isomorfismo;

(ii) L'essere congruenti stabilisce una relazione d'equivalenza sull'insieme delle estensioni.

Notazione 1.2.1. *Denoteremo con* Ext(C,A) *l'insieme delle classi di equivalenza delle estensioni prime di* C *per* A*.*

Osservazione 1.2.2. Una possibile estensione di C per A è

$$0 \to A \to A \oplus C \to C \to 0.$$

Definizione 1.2.4. *Un'estensione* E *di* C *per* A **si spezza** *se è congruente all'estensione* $E_0 : 0 \to A \to A \oplus C \to C \to 0$*.*

Osservazione 1.2.3. Ogni estensione di un modulo proiettivo P si spezza quindi Ext(P,A) $= \{0 \to A \to A \oplus P \to P \to 0\}$.

Lemma 1.2.1. *Un' estensione $E(\chi,\sigma)$ si spezza $\Leftrightarrow$ σ ha un'inversa destra oppure χ ha un inversa sinistra.*

Dimostrazione. $'' \Rightarrow ''$ Sia E è congruente a $0 \to A \xrightarrow{\chi} A \oplus C \xrightarrow{\sigma} C \to 0$ allora abbiamo :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \oplus C \arrow[r, bend left, "\pi_C"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[l, bend left, "0\oplus c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi"] & B \arrow[r, "\sigma"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dove $\pi_C(a \oplus c) = c$. Una inversa destra di σ è $\mu = \beta \circ (0 \oplus c) \circ id_C$.

$'' \Leftarrow ''$ Supponiamo che σ abbia un'inversa destra $\mu : C \to B$, allora si ha il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \oplus C \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi"] & B \arrow[r, bend left, "\sigma"] & C \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\mu"] & 0
\end{tikzcd}$$

Definendo $\beta : A \oplus C \to B$ come $\beta(a \oplus c) = \chi(a) + \mu(c)$ si verifica che si ottiene un diagramma commutativo e dunque le due estensioni sono congruenti.

Con un procedimento analogo si può vedere che E è congruente all'estensione della somma diretta $\Leftrightarrow$ χ ha un inversa sinistra. $\square$

1.2.2 I funtori $\mathbf{Ext}^1_R(-, A)$ e $\mathbf{Ext}^1_R(C, -)$

Cominciamo facendo vedere che, fissato un $R-$modulo A, $\mathrm{Ext}^1_R(-, A)$ è un funtore dalla categoria degli $R-$moduli alla categoria degli insiemi.

Mostriamo dunque che data un'estensione $E \in$ Ext(C,A) e un morfismo $\gamma : C' \to C$ allora esiste $E' = \gamma^*(E) = E\gamma \in$ Ext(C$'$,A) tale che $E(id_C) = E$ e $E(\gamma \circ \gamma') = (E\gamma)\gamma'$.

Lemma 1.2.2. *Se E è un'estensione di un $R-$modulo A per un $R-$modulo C e se $\gamma : C' \to C$ è un morfismo , esiste un'estensione E' di C' per A e un morfismo $\Gamma = (id_A, \beta, \gamma) : E \to E'$. La coppia (Γ, E') è unica a meno di congruenze di E'.*

Dimostrazione. Dimostriamo per prima cosa l'esistenza di tale E'. Abbiamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
E' : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi'"] \arrow[d, equal] & \bigcirc \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, dotted, "\beta"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
E : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi"] & B \arrow[r, "\sigma"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

in cui $\bigcirc$ indica uno spazio vuoto in cui inseriremo

$$B' = \{(b \oplus c' : \sigma(b) = \gamma(c')\} \subset B \oplus C'$$

ossia il prodotto fibrato di B e C' su C. Definiamo $\sigma'(b \oplus c') = c'$,
$\chi'(a) = \chi(a) \oplus 0$ e infine $\beta : B' \to B$ tale che $\beta(b \oplus c') = b$. Si verifica facilmente che il diagramma ottenuto è commutativo.
Dimostriamo ora l'unicità di E'. Prendiamo un'altra estensione E'' e un morfismo $\Gamma'' = (1_A, \beta'', \gamma) : E'' \to E$:

$$\begin{tikzcd}
E'' : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi''"] \arrow[d, equal] & B'' \arrow[r, "\sigma''"] \arrow[d, "\beta''"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
E : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi"] & B \arrow[r, "\sigma"] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Definiamo $\beta' : B'' \to B'$ con $\beta'(b'') = \beta''(b'') \oplus \sigma''(b'')$ e abbiamo che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
E'' : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi''"] \arrow[d, equal] & B'' \arrow[r, "\sigma''"] \arrow[d, "\beta'"] & C' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E' : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi'"] & B' \arrow[r, "\sigma'"] & C' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Si ha quindi che $(1_A, \beta', 1_{C'}) : E'' \to E'$ stabilisce una congruenza tra E'' ed E. Dunque (Γ, E') è unica a meno di isomorfismo. $\square$

Definizione 1.2.5. *La costruzione di E' illustrata nel lemma precedente è detta* **pull-back**.

Con un procedimento analogo , mostriamo ora che $\mathrm{Ext}^1_R(C, -)$ è anch'esso un funtore dalla categoria degli $R-$moduli a quella degli insiemi.
Faremo vedere che data $E \in$ Ext(C,A) e un morfismo $\alpha : A \to A'$ allora esiste $E' = \alpha^*(E) = \alpha E \in$ Ext (C',A) tale che $(id_C)E = E$ e $(\alpha \circ \alpha')E = \alpha(\alpha' E)$.

Lemma 1.2.3. *Date $E \in$ Ext(C,A) e $\alpha : A \to A'$, esiste un'estensione E' di A' su C e un morfismo $\Gamma = (\alpha, \beta, 1_C) : E \to E'$. La coppia (Γ, E') è unica a meno di congruenze di E'.*

Dimostrazione. Come nel lemma precedente dimostriamo prima l'esistenza e poi l'unicità. Abbiamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
E : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, dotted, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E' : 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\chi'"] & \bigcirc \arrow[r, "\sigma'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Consideriamo $N = \{-\alpha(a) \oplus \chi(a)\}$, sottomodulo di $A' \oplus B$, e inseriamo $(A' \oplus B)/N$ al posto di $\bigcirc$. Definiamo $\chi'(a) = a' \oplus 0 + N$, $\sigma'(a' \oplus b + N) = \sigma(b)$ e $\beta(b) = 0 \oplus b + N$. Si può verificare che il diagramma ottenuto è commutativo. L'unicità si dimostra in modo analogo al caso del funtore $\mathrm{Ext}(-, A)$. $\square$

Definizione 1.2.6. *La costruzione di E' illustrata nel lemma precedente è detta* **push-out**.

La seguente proposizione è un caso particolare del punto (iii) del teorema (1.1.1), ma non avendo dimostrato che $\mathrm{Ext}(-, M)$ è il funtore derivato destro di $\mathrm{Hom}(-, M)$ procediamo con una prova diretta che utilizza quanto appreso finora sulle estensioni prime.

Proposizione 1.2.4. *Sia data l'estensione*

$$E : 0 \to A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0$$

e sia M un $R-$modulo, allora esiste δ tale che la seguente successione risulta essere esatta:

$$0 \to \mathrm{Hom(C,M)} \to \mathrm{Hom(B,M)} \xrightarrow{f} \mathrm{Hom(A,M)} \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext(C,M)} \xrightarrow{g} \mathrm{Ext(B,M)} \xrightarrow{h} \mathrm{Ext(A,M)}$$

Dimostrazione. L'esattezza in $\mathrm{Hom}(C, M)$ e $\mathrm{Hom}(B, M)$ deriva dal fatto che $\mathrm{Hom}(-, M)$ è un funtore controvariante esatto a sinistra.
Data $\phi \in \mathrm{Hom}(A, M)$ definiamo $\delta(\phi) = \phi E$ con ϕE come in (1.2.3).
Dimostriamo l'esattezza in $\mathrm{Hom}(A, M)$ cioè $\mathrm{Ker}\delta = \mathrm{Im} f$:

$\subseteq$: Sia $\phi : A \to M$ tale che $\delta(\phi) = \phi E$ si spezza, abbiamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
E : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\phi"] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\phi(E) : 0 \arrow[r] & M \arrow[r, bend left, "\chi'"] & B' \arrow[l, bend left, "\psi"] \arrow[r, "\sigma'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con ψ inversa sinistra di $\chi' : M \to B'$. Allora si ha che $\phi = \psi \circ \beta \circ \chi$ quindi $\phi = f(\psi \circ \beta)$, cioè $\phi \in$Imf.

$\supseteq$: Sia $\phi : A \to M$ in Imf, allora esiste $\psi : B \to M$ tale che

$$\phi = f(\psi) = \psi \circ \chi.$$

Facciamo vedere che $\delta(\phi) = \phi E$ si spezza.
Dal lemma (1.2.3) abbiamo che ϕE si ottiene nel seguente modo:

$$\begin{tikzcd}
E : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\phi"'] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, "\psi"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\phi E : 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\chi'"] & B' \arrow[r, "\sigma'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con $B' = M \oplus B/N$.
Definendo $\beta' : (M \oplus B)/N \to M$ come $\beta'(m \oplus b + N) = m + \psi(b)$ si verifica che essa è un'inversa sinistra di χ' e dunque ϕE si spezza per il lemma (1.2.1).

Verifichiamo ora l'esattezza in Ext(C, M), notando che data $E \in$ Ext(C,M) si ha che $g(E) = E\sigma$. Mostriamo quindi che Imδ =Ker$g$:

$\subseteq$: Sia $E' \in$Imδ, per quanto visto prima abbiamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
E : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\phi"] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E' = \phi E : 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & B' \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Applicando g a ϕE abbiamo :

$$\begin{tikzcd}
E : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\phi"] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E' = \phi E : 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\chi'"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "\sigma'"] & C \arrow[r] & 0 \\
g(E')g(\phi E) : 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\chi'"] & B'' \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[u] & B \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Ora dal fatto che B'' non è altro che il prodotto fibrato di B e B' ed esistono mappe $id_B : B \to B$ e $\beta : B \to B'$, per la proprietà universale del prodotto fibrato esiste $\eta : B \to B''$. Tale applicazione η è l'inversa di σ' quindi $g(\phi E)$ si spezza e ϕE $\in$Ker$g$.

$\supseteq$: Sia $E' \in$ Ext(C,M) tale che E' $\in$Ker$g$ e supponiamo che $g(E')$ sia proprio E_0 allora otteniamo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & A \arrow[d, "\chi"] & \\
g(E') : 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \oplus B \arrow[r, bend left, "\pi_B"] \arrow[d, "\beta'"] & B \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
E' : 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\chi'"] & B' \arrow[r, "\sigma'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dove $\mu : B \to M \oplus B$ è tale che $\mu(b) = 0 \oplus b$. Considerando la composizione $\beta' \circ \mu$ otteniamo un applicazione che chiameremo $\beta : B \to B'$ e un diagramma triangolare formato da β, σ e σ' che commuta. Presa $\beta \circ \chi$, poichè il diagramma commuta abbiamo che $\sigma' \circ \beta \circ \chi = \sigma \circ \chi = 0$ e dunque poichè E' è esatto esiste $\alpha : A \to M$ tale che $\beta \circ \chi = \chi' \circ \alpha$. Abbiamo quindi un morfismo $\Gamma(\alpha, \beta, id_C) : E \to E'$ da cui si ricava che $E' = \alpha E \in$ Imδ.

Definiamo ora $h(E') = E'\chi$, con E' $\in$Ext(B, M), e verifichiamo l'esattezza in Ext(B, M). Bisogna far vedere che Im g =Ker h:

$\supseteq$: Sia $E' \in$ Ker h, bisogna trovare F $\in$Ext(C, M) tale che $E' = g(F)$. In particolare cerchiamo il modulo intermedio Z del complesso

$$F : 0 \to M \to Z \to C \to 0.$$

Per capire come scegliere Z consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
h(E') : 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \oplus A \arrow[r, bend left] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[d, "\chi"] \arrow[dl, "k"] & 0 \\
E' : 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\chi'"'] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "\sigma'"'] \arrow[d, dotted, "\pi"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
F : 0 \arrow[r] & M \arrow[r, dotted, "\chi''"'] & Z \arrow[r, dotted, "\sigma''"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

in cui $\mu(a) = 0 \oplus A$ e $k = \phi \circ \mu$.
Osserviamo che k è iniettiva in quanto $\sigma' \circ k = \chi$ che è un'immersione, quindi A può essere visto come un sottomodulo di X.
Prendiamo Z uguale al modulo X/A, π la proiezione al quoziente, $\chi'' = \pi \circ \chi'$ e $\sigma''(x + A) = (\sigma \circ \sigma')(x + A) = (\sigma \circ \sigma')(x)$.
Per prima cosa il diagramma ottenuto commuta per come sono state definite σ'',χ'' e π. L'applicazione σ'' è suriettiva in quanto è la composizione di applicazioni suriettive, mentre $\chi'' = \pi \circ \chi'$ è iniettiva perché χ' è iniettiva e $\chi'(M) \cap k(A) = 0$, per come è definita k. Per mostrare l'esattezza in X/A facciamo vedere che Ker $\sigma'' = M$. Dal fatto che $M \in \mathrm{Ker}(\sigma')$ discende che $M \subseteq$Ker σ'' . D'altra parte sia $x + A \in \mathrm{Ker}\sigma''$ allora si ha che o $x \in$Ker $\sigma = A$ dunque $x + A = 0$ in X/A oppure $x \in \mathrm{Ker}\sigma' = M$.

$\subseteq$: Sia $E' \in$Ext(B, M) tale che esiste $F \in$Ext(C, M) con $g(F) = F\sigma = E'$, applicando h otteniamo:

$$\begin{tikzcd}
h(E') : 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\chi"] & 0 \\
E' : 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
F : 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & Z \arrow[r, "\sigma'"] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Componendo le applicazioni in verticale abbiamo che $h(E')$ non è altro che $F(\sigma \circ \chi)$, inoltre poiché $(\sigma \circ \chi)(A) = 0$ si ha che

$$X = \{z \oplus a : (\sigma \circ \chi)(a) = \sigma'(z)\} = \{z \oplus a : \sigma'(z) = 0\} \cong M \oplus A$$

e quindi $h(E')$ si spezza e $E' \in \text{Ker } h$.

$\square$

1.2.3 Addizione di estensioni

Osservazione 1.2.4. La somma diretta $A \oplus C$ di due moduli può essere vista come un bifuntore di A e C infatti se $\alpha : A \to A'$ e $\gamma : C \to C'$ allora $\alpha \oplus \gamma : A \oplus C \to A' \oplus C'$ possiamo definirlo direttamente ponendo $(\alpha \oplus \gamma)(a \oplus c) = \alpha(a) \oplus \gamma(c)$ oppure come l'unico omomorfismo che rende commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} A & \longleftarrow & A \oplus C & \longrightarrow & C \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha\oplus\gamma}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow \\ A' & \longleftarrow & A' \oplus C' & \longrightarrow & C' \end{array}$$

dove le frecce orizzontali sono le proiezioni sulla prima e sulla seconda coordinata.

Definizione 1.2.7. *Il morfismo **diagonale** per un modulo C è*

$$\Delta = \Delta_C : C \to C \oplus C$$

dove $\Delta(c) = c \oplus c$.

Definizione 1.2.8. *Il morfismo **codiagonale** per un modulo A è*

$$\nabla = \nabla_A : A \oplus A \to A$$

tale che $\nabla(a_1 \oplus a_2) = a_1 + a_2$.

Definizione 1.2.9. *Date due estensioni $E_1 : 0 \to A_1 \xrightarrow{\chi_1} B_1 \xrightarrow{\sigma_1} C_1 \to 0$ ed $E_2 : 0 \to A_2 \xrightarrow{\chi_2} B_2 \xrightarrow{\sigma_2} C_2 \to 0$ definiamo $E_1 \oplus E_2$ come*

$$0 \to A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\chi_1 \oplus \chi_2} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{\sigma_1 \oplus \sigma_2} C_1 \oplus C_2 \to 0.$$

Teorema 1.2.5. *Dati A e C,$R-$moduli, Ext(C, A) è un gruppo abeliano con l'operazione che ad E_1 ed E_2 in Ext(C, A) associa*

$$E_1 + E_2 = \nabla_A(E_1 \oplus E_2)\Delta_C$$

Definizione 1.2.10. *$E_1 + E_2$ definita nel teorema è detta **somma di Baer**.*

Osservazione 1.2.5. Da una semplice verifica si ottiene che l'elemento neutro della somma di Baer è E_0 cioè la classe delle estensioni che si spezzano.

1.3 Successioni regolari, profondità e dimensione proiettiva

Richiamiamo ora alcuni concetti di algebra omologica riprendendo la trattazione di Parti II e III di [2] .

Definizione 1.3.1. *Un $R-$modulo F si dice* **libero** *se è isomorfo alla somma diretta di copie di R.*

Definizione 1.3.2. *Un modulo P si dice* **proiettivo** *se per ogni morfismo suriettivo $\alpha : M \to N$ e ogni $\beta : P \to N$, esiste $\gamma : P \to M$ tale che $\beta = \alpha \circ \gamma$.*
Equivalentemente
Un modulo P si dice **proiettivo** *se* $\mathrm{Hom}(P, -)$ *è un funtore esatto.*

Osservazione 1.3.1. Ogni modulo libero è proiettivo.

Definizione 1.3.3. *Una* **risoluzione proiettiva** *di un modulo M è una successione esatta*

$$\ldots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

in cui gli F_i sono moduli proiettivi.
Nel caso in cui esiste n tale che $F_{n+1} = 0$ e $F_i \neq 0$ per ogni $i = 1, ..., n$, la risoluzione si dice **finita** *ed n è la sua* **lunghezza**.

Definizione 1.3.4. *La* **dimensione proiettiva** *di un modulo M,* **pd M**, *è la minima lunghezza delle risoluzioni proiettive di M.*

Definizione 1.3.5. *Una successione di elementi $x_1, ..., x_n \in R$ è detta una* **successione regolare** *su M o $M-$***successione** *se sono verificate le seguenti condizioni:*

(i) $(x_1, ..., x_n)M \neq M$;

(ii) Per ogni $i = 1, ..., n$, x_i non è uno zero divisore di $M/(x_1, ..., x_{i-1})M$.

Definizione 1.3.6. *Si dice* **profondità** *di un ideale I su un modulo M,* **depth**(I,M)*, la lunghezza di una $M-$successione massimale contenuta in I. Nel caso in cui $M = R$, definiamo* $\mathrm{depth}(I, R)$ =grado I *il* **grado** *di un ideale I. Se $IM = M$ assumiamo per convenzione che* $\mathrm{depth}(I, M) = \infty$.

Osservazione 1.3.2. La definizione è ben posta perché tutte le $M-$successioni massimali contenute in I hanno la stessa lunghezza come vedremo nella proposizione (1.3.10).

Definizione 1.3.7. *Sia S un anello graduato, definiamo come* **depth** S *la lunghezza di una S-successione massimale di elementi omogenei.*

Definizione 1.3.8. *La* **dimensione di Krull***(o semplicemente la* **dimensione***) di un anello R,* **dim** R*, è l'estremo superiore delle lunghezze delle catene di ideali primi in R.*

Notazione 1.3.1. *Sia I un ideale di R, indicheremo con* **dim** I *la dimensione di R/I.*

Definizione 1.3.9. *Sia I un ideale primo, la* **codimensione** *di I,* **codim** I*, è la dimensione dell'anello R_I o equivalentemente l'estremo superiore delle lunghezze delle catene di ideali primi contenuti in I.*

Proposizione 1.3.1. *Sia R un anello e I un suo ideale allora*

$$\text{grado } I \leq \text{codim } I.$$

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione per induzione su $n = \text{grado } I$. Se $n = 1$ allora x_1 non è uno zero divisore e quindi genera un ideale primo $(x_1) \subseteq I$, dunque grado$I$=1 $\leq$codim$I$. Supponiamo l'asserto vero per $n-1$ e dimostriamolo per n. Sia $x_1, ..., x_n$ una $R-$successione regolare di lunghezza massima in I, l'ideale (x_1) è primo perché x_1 non è uno zero divisore. Inoltre o (x_1) è minimale oppure x_1 non potrà essere contenuto in nessun ideale primo minimale, infatti se $x_1 \in P$, con P primo minimale, avremmo che $(x_1) \subseteq P$ dunque $(x_1) = P$. Da ciò discende che, presa una catena di primi contenuti in I, se essa rimane una catena di ideali primi in $R/(x_1)$ allora vuol dire che tutti i primi contengono (x_1), in particolare il primo minimale di quella catena e dunque tale primo dovrà essere (x_1) quindi la catena nel quoziente avrà lunghezza uno di meno in $R/(x_1)$ e codim $I/(x_1) <$ codim I. D'altra parte, considerando $I/(x_1)$ come ideale di $R/(x_1)$, si ha che grado $I/(x_1) = n - 1$ quindi per induzione $n - 1 \leq$ codim $I/(x_1)$ <codim I e grado $I = n \leq$codim I. □

Proposizione 1.3.2. *Sia R un anello locale e $\mathfrak{M}$ il suo ideale massimale. Preso M un R-modulo allora*

$$\text{depth } M \leq \dim R$$

dove depth M =depth $(\mathfrak{M}, M)$.

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione per induzione su n =depth M. Se $n = 1$ allora $x_1 \in \mathfrak{M}$ è una successione regolare, x_1 non è uno zero divisore di M e dunque di R quindi abbiamo che genera un ideale primo $(x_1) \subseteq R$. Da questo concludiamo che depth M=1 $\leq$dim$R$. Supponiamo l'asserto vero per $n - 1$ e dimostriamolo per n. Sia $x_1, ..., x_n$ una $M-$successione regolare di lunghezza massima in R, come prima l'ideale (x_1) è primo perché x_1 non è uno zero divisore. Inoltre o (x_1) è minimale oppure x_1 non potrà essere contenuto in nessun ideale primo minimale, infatti se $x_1 \in P$, con P primo minimale, avremmo che $(x_1) \subseteq P$ dunque $(x_1) = P$. Da ciò discende che, presa una catena di primi contenuti in R, se essa rimane una catena di ideali primi in $R/(x_1)$ allora vuol dire che tutti i primi contengono (x_1), in particolare il primo minimale di quella catena e dunque tale primo dovrà essere (x_1) quindi la catena nel quoziente avrà lunghezza uno di meno in $R/(x_1)$ e dim $R/(x_1) <$ dim R.
D'altra parte, considerando $M/(x_1)$ come $R/(x_1)$-modulo, si ha che depth $M/(x_1) = n - 1$ quindi per induzione $n - 1 \leq$ dim$R/(x_1)$ <dim R e dunque depth $M = n$ $\leq$dim R. □

1.3.1 Complessi di Koszul

Introduciamo ora i complessi di Koszul che sono legati al concetto di successione regolare introdotta nel paragrafo precedente. Osserviamo per prima cosa come essi entrano in relazione nell'individuare se un elemento sia o meno uno zero divisore.
Per maggiori dettagli si veda [1],paragrafi 1-4.

Esempio 1.3.1. Sia R un anello commutativo unitario e sia $x \in R$. Possiamo considerare il complesso:

$$K(x) : 0 \longrightarrow R \xrightarrow{x} R \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

dove $R \xrightarrow{x} R$ indica la moltiplicazione per x. Calcolando l'omologia di questo complesso otteniamo che

$$H_0(K(x)) = ker(0)/Im(x) = R/(x)$$

mentre

$$H_1(K(x)) = ker(x)/Im(0) = (0 : x) = \{r \in R : rx = 0\}.$$

Vediamo quindi che x non è uno zero divisore se e solo se $H_1(K(x)) = 0$. Prendendo un R-modulo M, si utilizza lo stesso procedimento applicato a $K(x) \otimes_R M$ per vedere se x è uno zero divisore per M.

Esempio 1.3.2. Consideriamo ora $x, y \in R$, abbiamo un'applicazione $K(x) \xrightarrow{y} K(x)$, indotta dalla moltiplicazione per y, che possiamo rappresentare nel diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"] & R \arrow[r] \arrow[d, "y"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "x"] & R \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Inoltre è possibile considerare un altro complesso:

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{f} R \otimes R \xrightarrow{g} R \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

dove $g(r_1, r_2) = r_1 x + r_2 y$ e $f(r) = (-ry, -rx)$.
Chiamiamo questo complesso $K(x, y)$ e abbiamo

$$H_0(K(x,y)) = ker(0)/Im(g) = R/(x,y) \qquad H_2(K(x,y)) = ker(f)/Im(0) = (0 : (x,y))$$

$$H_1(K(x,y)) = ker(g)/Im(f) = \{(r_1, r_2) : r_1 x + r_2 y = 0\}/(-rx, -ry).$$

Se x non è uno zero divisore abbiamo che $\{(r_1, r_2) : r_1 x + r_2 y = 0\} \cong (x : y)$ attraverso il morfismo che associa a $(r_1, r_2) \to r_2$. Tramite questo morfismo si ha che $(-rx, -ry)$ è mandato in (x) e dunque $H_1(K(x,y)) = (x : y)/(x)$. Da qui discende che $H_1(K(x,y)) = 0$ se e solo se x, y rispetta la condizione (ii) delle successioni regolari, infatti $(x : y)/(x) = 0$ se e solo se y non è uno zero divisore di $R/(x)$.

I due complessi (1.1) e (1.2) sono esempi di **Complessi di Koszul** di cui diamo ora la costruzione generale.

Definizione 1.3.10. *Sia A un $R-$modulo e sia $f : A \to R$, definiamo il* **Complesso di Koszul** *$K(f)$ ponendo $(K(f))_p = \Lambda^p A$ e definendo $df : \Lambda^p A \to \Lambda^{p-1} A$ come*

$$df(a_1 \wedge \cdots \wedge a_p) = \sum (-1)^{i+1} f(a_i) a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge a_p.$$

Osservazione 1.3.3. Si verifica subito che $df^2 = 0$ e che quindi la definizione è ben posta.

Esempio 1.3.3. Sia $x_1, \ldots, x_s$ una successione di elementi in R.
Definiamo $f : R^s \to R$ come $f(1,0,\ldots,0) = x_1$, $f(0,1,\ldots,0) = x_2$, $\ldots f(0,0,\ldots,1) = x_s$. In questo caso il complesso $K(f)$ si denota come $K(x_1,\ldots,x_s)$ ed è il caso più generale dei complessi visti negli esempi (1.3.1) e (1.3.2).

Esempio 1.3.4. Un caso particolare di $K(x_1,\ldots,x_s)$ si ha con $R = k[x_1,\ldots,x_s]$, dove k è un campo qualsiasi e x_i sono delle indeterminate. Il complesso che si ottiene è la successione esatta:

$$\ldots \longrightarrow \Lambda^p R \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Lambda^2 R \longrightarrow R^n \xrightarrow{f=(x_1,\ldots,x_s)} R \xrightarrow{\pi} R/(x_1,\ldots,x_s) \longrightarrow 0$$

in cui π è la proiezione al quoziente e $f(a_1,...,a_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$.

Prima di enunciare il prossimo lemma mostriamo la costruzione del *Cilindro di Applicazione.*
Presi due complessi $F_\bullet$ e $G_\bullet$ e un morfismo $f_\bullet$

$$\begin{tikzcd}
F_\bullet : \cdots \arrow[r] & F_3 \arrow[r, "\partial F_3"] \arrow[d, "f_3"] & F_2 \arrow[r, "\partial F_2"] \arrow[d, "f_2"] & F_1 \arrow[r, "\partial F_1"] \arrow[d, "f_1"] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & 0 \\
G_\bullet : \cdots \arrow[r] & G_3 \arrow[r, "\partial G_3"] & G_2 \arrow[r, "\partial G_2"] & G_1 \arrow[r, "\partial G_1"] & G_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

possiamo costruire un altro complesso

$$F_{\bullet-1} \oplus G_\bullet : \cdots \longrightarrow F_i \oplus G_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} F_{i-1} \oplus G_i \xrightarrow{\partial_i} F_{i-2} \oplus G_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

dove $\partial_i = \begin{pmatrix} \partial F_{i-1} & 0 \\ f_{i-1} & -\partial G_i \end{pmatrix}$.

Definizione 1.3.11. *Il complesso definito sopra viene detto* **Cilindro di Applicazione**.

Osservazione 1.3.4. Consideriamo il cilindro di applicazione $F_{\bullet-1} \oplus G_\bullet$. Possiamo vedere che esistono dei morfismi da $G_\bullet$ a $F_{\bullet-1} \oplus G_\bullet$ e da $F_\bullet$ a $F_{\bullet-1} \oplus G_\bullet$ tali che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & G_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & G_i \arrow[r] \arrow[d, hook] & G_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & F_i \oplus G_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & F_{i-1} \oplus G_i \arrow[r] \arrow[d] & F_{i-2} \oplus G_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & F_i \arrow[r] \arrow[d] & F_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & F_{i-2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Quindi otteniamo la seguente successione esatta di complessi:

$$0 \to G_\bullet \to G_\bullet \oplus F_{\bullet-1} \to F_{\bullet-1} \to 0$$

e la successione esatta lunga di omologia:

$$\cdots \to H_1(F_{\bullet-1}) \to H_0(G_\bullet) \to H_0(G_\bullet \oplus F_{\bullet-1}) \to H_0(F_{\bullet-1}) \to 0.$$

Lemma 1.3.3. *Consideriamo $f : A \to R$, come nella definizione, e $x \in R$ e definiamo $\bar{f} : A \oplus R \to R$ tale che $\bar{f}((a,r)) = f(a) + rx$. Allora abbiamo che la seguente successione è esatta:*

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_p(K(f)) \arrow[r] & H_p(K(\bar{f})) \arrow[r] & H_{p-1}(K(f)) \arrow[dll, rounded corners, "\pm x"] & & \\
 & H_{p-1}(K(f)) \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & H_0(K(f)) \arrow[r] & H_0(K(\bar{f})) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

In particolare se $x_1, \ldots, x_{s+1} \in R$ e f come in (1.3.3) allora avremo:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_p(K(x_1, \ldots, x_s)) \arrow[r] & H_p(K(x_1, \ldots, x_{s+1})) \arrow[r] & H_{p-1}(K(x_1, \ldots, x_s)) \arrow[dll, rounded corners, "\pm x_{s+1}"] \\
 & H_{p-1}(K(x_1, \ldots, x_s)) \arrow[r] & \ldots & .
\end{tikzcd}$$

Se M è un $R-$modulo, posto $M(x_1, ..., x_s) = K(x_1, ..., x_s) \otimes_R M$, si ha:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_p(M(x_1, \ldots, x_s)) \arrow[r] & H_p(M(x_1, \ldots, x_{s+1})) \arrow[r] & H_{p-1}(M(x_1, \ldots, x_s)) \arrow[dll, rounded corners, "\pm x_{s+1}"] \\
 & H_{p-1}(M, (x_1, \ldots, x_s)) \arrow[r] & \ldots & .
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue direttamente dall'osservazione precedente, una volta verificato che $K(\bar{f})$ è il cilindro di applicazione di $K(f)(-1)$ e $K(f)$, dove $K(f)(-1)$ è tale che $(K(f)(-1))_i = (K(f))_{i-1}$. □

Proposizione 1.3.4. *Se $x_1, \dots, x_s \in R$ è una M-successione allora per ogni $p > 0$ si ha $H_p(M(x_1, \dots, x_s)) = 0$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su s. Il caso $s = 1$ discende dall'esempio (1.3.1). Se l'asserto è vero per s allora usando la successione esatta del lemma (1.3.3) si conclude subito che $H_p(M(x_1, \dots, x_{s+1})) = 0$ per $p > 1$.
Nel caso di $p = 1$ abbiamo

$$0 \to H_1(M(x_1, \dots, x_{s+1})) \to H_0(M(x_1, \dots, x_s)) \xrightarrow{x_{s+1}}$$

$$\longrightarrow H_0(M(x_0, \dots, x_s)) \to H_0(M(x_1, \dots, x_{s+1})) \to 0$$

ma $H_0(M(x_1, \dots, x_s)) = M/(x_1, \dots, x_s)M$ e quindi risulta essere iniettiva

$$H_0(M(x_1, \dots, x_s)) \xrightarrow{x_{s+1}} H_0(M(x_0, \dots, x_s)).$$

Da qui discende che

$$\mathrm{Im}(H_1(M(x_1, \dots, x_{s+1}) \to H_0(M(x_1, \dots, x_s))) = \mathrm{Ker}(x_{s+1}) = 0 \quad \text{e}$$

$$\mathrm{Ker}(H_1(M(x_1, \dots, x_{s+1}) \to H_0(M(x_1, \dots, x_s))) = H_1(M(x_1, \dots, x_{s+1})$$

dunque

$$0 = \mathrm{Im}(0 \to H_1(M(x_1, \dots, x_{s+1}) = H_1(M(x_1, \dots, x_{s+1}).$$

□

Osservazione 1.3.5. In generale non è vero l'inverso di questa proposizione. Si consideri, per esempio, il caso di $R = K[x, y, z]/(y(x-1), yz)$. Gli elementi del quoziente $x + (y(x-1), yz) = \bar{x}$ e $z + (y(x-1), yz) = \bar{z}$ formano una M-successione e quindi $H_p(K(\bar{x}, \bar{z})) = 0$, così anche $H_p(K(\bar{z}, \bar{x})) = 0$ perché si può dimostrare che $K(x_1, ..., x_n) \cong K(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)})$ per ogni permutazione π. Ma $\bar{z}$ è uno zero divisore di R e dunque $\bar{z}, \bar{x}$ non è una M-successione.

Cerchiamo di capire quali sono le condizione sotto le quali si può invertire la proposizione (1.3.4). Per prima cosa citiamo il lemma di Nakayama che utilizzeremo nelle dimostrazioni successive:

Lemma 1.3.5 (Lemma di Nakayama)**.** *Sia R un anello, M un R-modulo finitamente generato e I un ideale contenuto nel radicale di Jacobson, Jac(R), di R. Se $IM = M$ allora $M = 0$.*

Osservazione 1.3.6. Nel caso in cui R è Noëtheriano e M finitamente generato, $H_p(M(x_1, \ldots, x_s))$ è finitamente generato per qualsiasi successione $x_1, \ldots, x_s$. Inoltre se $x_i \in \mathrm{Jac}(R)$ abbiamo che

$$H_p(M(x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_s)) \xrightarrow{x_i} H_p(M(x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_s))$$

è suriettiva se e solo se $H_p(M(x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_s)) = 0$.

Proposizione 1.3.6. *Sia R un anello Noëtheriano, $M \neq 0$ un R-modulo finitamente generato e $x_1, \ldots, x_s \in$ Jac(R) allora:*

(i) se $H_p(M(x_1, \ldots, x_s)) = 0$ per un dato p allora

$$H_{p+k}(M(x_1, ..., x_t)) = 0$$

per ogni $k \geq 0$ e per ogni $1 \leq t \leq s$;

(ii) se $H_1(M(x_1, \ldots, x_s)) = 0$ allora $x_1, \ldots, x_s$ è una M-successione.

Dimostrazione. Il punto (i) si dimostra utilizzando ripetutamente il lemma (1.3.3) e l'osservazione precedente.
Per provare la seconda parte (ii) dobbiamo verificare che siano soddisfatte le proprietà (i) e (ii) di (1.3.5). Abbiamo che $(x_1, \ldots, x_s)\ M \neq M$ perché in caso contrario il lemma di Nakayama (1.3.5) affermerebbe che $M = 0$.
La seconda proprietà è verificata in quanto per il punto (i) si ha che $H_{p+1}(M(x_1, ..., x_t)) = 0$ per ogni $p \geq 0$ e per ogni $1 \leq t \leq s$. □

Corollario 1.3.7. *Sia R è un anello Noëtheriano, M un R-modulo finitamente generato e I un ideale primo di R tale che $M_I = M \otimes_R R_I \neq 0$. Se $x_1, \ldots, x_s$ è una successione di elementi in I che è una M-successione allora $x_1, \ldots, x_s$, considerando x_i come elementi di R_I, è una M-successione.*

1.3.2 La formula di Auslander-Buchsbaum

Teorema 1.3.8 (Formula di Auslander-Buchsbaum). *Sia R un anello locale e P il suo ideale massimale. Se E è un $R-$modulo finitamente generato di dimensione proiettiva finita allora*

$$\text{pd E=depth(P,R)-depth(P,E).}$$

La dimostrazione del precedente teorema segue [1] e necessita dei due lemmi seguenti:

Lemma 1.3.9. *Sia R un anello locale con P ideale massimale, dato E un R-modulo finitamente generato esiste un modulo libero F e un morfismo suriettivo $g : F \to E$ tale che $Ker\ g \subseteq PF$.*

Proposizione 1.3.10. *Sia R un anello Noëtheriano, E un R-modulo finitamente generato e I un ideale di R generato da $x_1, ..., x_n$ tale che $E/IE \neq 0$. Data $y_1, \ldots, y_s$ una E-successione in I allora $s + q = n$, dove q è tale che $H_q(E(x_1, \ldots, x_s)) \neq 0$ e $H_t(E(x_1, \ldots, x_s)) = 0$ per ogni $t \geq q$.*
Inoltre:

$$H_q(E(x_1, \ldots, x_n)) \cong \frac{(y_1, \ldots, y_s)E : I}{(y_1, \ldots, y_s)E}.$$

Dimostrazione. (Teorema 1.3.8)
Consideriamo l'ideale $P = (x_1, ..., x_n)$ e sia q tale che $H_q(K(x_1, ..., x_n)) \neq 0$ e $H_t(K(x_1, ..., x_n)) = 0$ per ogni $t \geq q$, tale q esiste per il lemma (1.3.10) e perché pd$E < \infty$. Prendiamo q_E con la stessa proprietà nel complesso $E(x_1, \ldots, x_n)$. Abbiamo quindi che

$$\text{depth(P,R)} = n - q \quad \text{e} \quad \text{depth(P,M)} = n - q_E$$

e vogliamo mostrare che $\text{pd}(E) = q - q_E$.
Procediamo per induzione su $\text{pd}(E)$. Se $\text{pd}(E) = 0$ allora E è libero e $q_E = q$.
Supponiamo che $\text{pd}(E) \geq 1$ e allora avremo un successione esatta

$$0 \to L \to F \to E \to 0$$

con F modulo libero e $\text{pd}(E) = 1+\text{pd}(L)$.

Ricaviamo da questa successione una successione esatta lunga di omologia:

$$\cdots \to H_{1+q_L}(E(x_1,...,x_n)) \to H_{q_L}(L(x_1,...,x_n)) \to H_{q_L}(F(x_1,...,x_n)) \to$$

$$\to H_{q_L}(E(x_1,...,x_n)) \to H_{q_L-1}(L(x_1,...,x_n)) \to \cdots .$$

Per induzione sappiamo che $\mathrm{pd}(L) = q - q_L$ e quindi ci resta da vedere che $q_E = 1 + q_L$. Abbiamo il caso $q_L > q$ e $q_L = q$.
Se $q_L > q$ allora $H_{q_L}(F(x_1,\ldots,x_n)) = 0$. D'altra parte dal fatto che $H_{q_L}(L(x_1,\ldots,x_n)) \neq 0$ discende che $H_{1+q_L}(E(x_1,\ldots,x_n)) \neq 0$ mentre $H_{t+q_L}(E(x_1,\ldots,x_n)) = 0$ per ogni $t > 1$. Abbiamo quindi dimostrato che $q_E = 1 + q_L$.
Se $q_L = q$ allora $\mathrm{pd}L = 0$ cioè L è libero e per il lemma (1.3.9) possiamo scegliere F tale che $L \subseteq PF$. Sia $y_1,\ldots,y_s$ una R-successione massimale allora essa è anche una F-successione e L-successione e dunque per la proposizione (1.3.10) si ha che:

$$H_q(L(x_1,...,x_n)) = \frac{(y_1,...,y_s)L : P}{(y_1,...,y_s)L}$$

$$H_q(F(x_1,...,x_n)) = \frac{(y_1,...,y_s)F : P}{(y_1,...,y_s)F}$$

e dunque l'applicazione $H_q(L(x_1,...,x_n)) \to H_q(F(x_1,...,x_n))$ è il morfismo naturale

$$\frac{(y_1,...,y_s)L : P}{(y_1,...,y_s)L} \to \frac{(y_1,...,y_s)F : P}{(y_1,...,y_s)F}.$$

Mostrando che tale morfismo non è iniettivo abbiamo che

$$\mathrm{Ker}(H_q(L(x_1,...,x_n)) \to H_q(F(x_1,...,x_n))) = \mathrm{Im}(H_{1+q_L}(E(x_1,...,x_n)) \to H_{q_L}(L(x_1,...,x_n))) \neq 0$$

e dunque $H_{1+q_L}(E(x_1,...,x_n)) \neq 0$.

□

Corollario 1.3.11. *Sia $S = \oplus S_i$ un anello graduato con S_0 campo, S algebra finitamente generata su S_0 e $S_+ = \oplus_{i\geq 1} S_i$ l'ideale omogeneo massimale. Dato M un $S-$modulo graduato finitamente generato con dimensione proiettiva finita, si ha la seguente formula*

$$\text{pd M} = \text{depth}(\text{S}_+,\text{S})\text{-depth}(\text{S}_+,\text{M}).$$

1.3.3 Il teorema di Hilbert-Burch

A conclusione di questa sezione di algebra omologica richiamo il teorema di Hilbert-Burch. La versione e le relative notazioni sono riprese dal capitolo 3 di [3].

Notazione 1.3.2. *Data una matrice M con entrate in un anello Noëtheriano R, indicheremo con $I_t(M)$ l'ideale generato dai determinanti delle sottomatrici $t \times t$ di M.*

Teorema 1.3.12 (Teorema di Hilbert-Burch)**.** *Sia I un ideale in un anello Noëtheriano R che ammette una risoluzione libera di lunghezza 1:*

$$0 \to F \xrightarrow{M} G \to I \to 0. \tag{1.3}$$

Se il rango di F è t allora il rango di G è $t+1$ ed esiste $a \in R$ non zero divisore tale che $I = aI_t(M)$.
Se si guarda M come una matrice rispetto alle basi di F e di G, il generatore di I che è immagine dell'i-esimo vettore della base di G è $\pm a$ volte il determinante della sottomatrice ottenuta togliendo ad M la i-esima riga.
Inoltre grado $I_t(M) = 2$.
Viceversa, dato $a \in R$ non zero divisore e data una matrice M $(t+1) \times t$ ad entrate in R tale che grado$I_t(M) \geq 2$*, l'ideale $I = aI_t(M)$ ammette una risoluzione libera di lunghezza 1 come (1.3).*
Inoltre l'ideale I ha grado 2 se e solo se $a \in U(R)$.

Esempio 1.3.5. Per illustrare il risultato precedente consideriamo il complesso seguente in cui $S = \oplus S_i$ è l'anello graduato $k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ con k campo qualsiasi. Abbiamo che $S(-i)$ è tale che $(S(-i))_j = S_{j-i}$ e
$I = (x_1x_3 - x_2^2, -x_0x_3 + x_1x_2, x_0x_2 - x_1^2)$:

$$\boldsymbol{F} : 0 \longrightarrow S^2(-3) \xrightarrow{\phi_2 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}} S^3(-2) \xrightarrow{\phi_1 = \begin{pmatrix} x_1x_3 - x_2^2 \\ -x_0x_3 + x_1x_2 \\ x_0x_2 - x_1^2 \end{pmatrix}^t} I.$$

Abbiamo che il rango di $S^2(-3)$ è 2 e il rango di $S^3(-2)$ è 3. Inoltre i generatori di I sono esattamente i determinanti delle sottomatrici 2×2 di ϕ_2 e la a del teorema è quindi 1.

1.4 Fibrati lineari, fasci invertibili e divisori

In questa sezione richiamieremo le definizioni di fibrato lineare, fascio invertibile e divisore e studieremo le relazioni che intercorrono tra tali oggetti. Per tutti gli enunciati che non vengono dimostrati in questo capitolo, si rinvia a [10], cap. VI e III, e [4], capitoli 0, sezione 5, e 1, sezione 1.

Consideriamo una varietà algebrica X (su un campo algebricamente chiuso k) non singolare e irriducibile. Chiameremo $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni regolari su X e $\mathcal{M}_X$ il fascio delle funzioni razionali su X.

1.4.1 Divisori

Definizione 1.4.1. *Un* **divisore di Weil** D *su* X *è una combinazione lineare formale finita di chiusi irriducibili di codimensione* 1 *contenuti in* X *cioè*

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i$$

con $a_i \in \mathbb{Z}$ *e* $Y_i \subset X$ *chiuso irriducibile di cosimensione* 1.

Definizione 1.4.2. *Un divisore* $D = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i$ *è* **effettivo**, *e scriviamo* $D \geq 0$, *se* $a_i \geq 0$ *per ogni* i.

Ad ogni funzione razionale $f \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X^*)$ si può associare un divisore nel seguente modo:

$$div(f) = (f) := \sum_{i} v_{Y_i}(f) Y_i$$

dove $v_Y(f)$ è la valutazione della funzione f nell'anello locale $O_{X,Y}$.
Ricordiamo che, essendo X non singolare, tale anello è DVR e quindi esiste la valutazione $v_Y : O_{X,Y} \to \mathbb{Z}$. Inoltre si può verificare che la sommatoria è finita e dunque il divisore (f) è ben definito.

Osservazione 1.4.1. Si noti che $(f) \geq 0$ se e solo se $f \in \Gamma(X, O_X)$.

Definizione 1.4.3. *L'insieme dei divisori di Weil forma un gruppo rispetto all'operazione di addizione e tale gruppo si indica con* **Div(X)**.

Vediamo ora la definizione di un altro tipo di divisori, i *Divisori di Cartier.*

Definizione 1.4.4. *Un* **divisore di Cartier** *su X è una classe di equivalenza di sistemi di coppie $\{(U_i, f_i) : i \in I\}$, dove gli $U_i \subset X$ sono aperti diversi dal vuoto e le $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{M}_X^*)$ sono tali che:*

(i) $\bigcup_i U_i = X$;

(ii) Per ogni i e j si ha $\frac{f_i}{f_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$.

Diciamo che due sistemi di coppie $\{(U_i, f_i) : i \in I\}$ e $\{(V_j, g_j) : j \in J\}$ sono equivalenti se per ogni i e j si ha che $\frac{f_i}{g_j} \in \Gamma(U_i \cap V_j, \mathcal{O}_X^*)$.

Definizione 1.4.5. *L'insieme dei divisori di Cartier forma un gruppo rispetto all'operazione così definita:*

$$\{(U_i, f_i) : i \in I\} + \{(V_j, g_j) : j \in J\} = \{(U_i \cap V_j, f_i g_j) : i \in I, j \in J\}.$$

Tale gruppo si denota con **CaDiv(X)**.

Definizione 1.4.6. *Un divisore $\{(U_i, f_i) : i \in I\}$ è detto* **effettivo** *se è equivalente a $\{(U_i, g_i) : i \in I\}$ con $g_i \in \Gamma(U_i, O_X)$.*

Lemma 1.4.1. *Sia X varietà non singolare allora $Div(X) \cong CaDiv(X)$.*

Dal lemma discende che in una varietà non singolare le due definizioni danno luogo agli stessi divisori e perciò, da ora in avanti, non distingueremo i due tipi e indicheremo il gruppo dei divisori solo con $Div(X)$.
Procediamo dimostrando un risultato che utilizzeremo per costruire la corrispondenza tra divisori, fasci invertibili e fibrati lineari.

Lemma 1.4.2. $Div(X) \cong H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$.

Dimostrazione. Per prima cosa osserviamo che una sezione σ di $H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ può essere espressa come

$$\{(V_\alpha, f_\alpha) : f_\alpha \in \Gamma(V_\alpha, \mathcal{M}_X^*) \text{ t.c. } \frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \Gamma(V_\alpha \cap V_\beta, O_X^*)\}$$

per un ricoprimento aperto $\{V_\alpha\}$ abbastanza piccolo.
Costruiamo ora un morfismo $\phi : Div(X) \to H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$. Per ogni $D \in Div(X)$, possiamo trovare $\{U_\alpha\}$ ricoprimento aperto di X tale che $D = \{(U_\alpha, f_\alpha) : f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{M}_X^*)\}$. Per come sono stati definiti i divisori,

dati α e β si ha che $\frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, O_X^*)$, quindi D, per quanto osservato prima, definisce una sezione di $H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ e $\phi(D) = \{(U_\alpha, f_\alpha) : f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{M}_X^*)\}$.
Viceversa, data una sezione σ di $H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$, essa può essere espressa come $\{(V_\alpha, f_\alpha) : f_\alpha \in \Gamma(V_\alpha)\}$ e quindi definisce il divisore associato a questa rappresentazione. Si verifica subito che l'applicazione appena definita è un isomorfismo di gruppi.

$\square$

1.4.2 Fibrati lineari

Definizione 1.4.7. *Un fibrato lineare E su X è una famiglia di spazi vettoriali $E = \bigcup_{x \in X} E_x$ con $\pi : E \to X$ tale che:*

(i) $\pi(E_x) = x$*;*

(ii) Per ogni x_0 in X esiste un intorno aperto U di x_0 ed un'applicazione biregolare

$$\phi_U = \pi_{|\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}.$$

Osservazione 1.4.2. Possiamo ricoprire X con aperti U_α tali che

$$\phi_\alpha := \phi_{|U_\alpha} : \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\simeq} U_\alpha \times \mathbb{C}.$$

Definizione 1.4.8. Le funzioni ϕ_α vengono chiamate ***banalizzazioni***.

Definizione 1.4.9. *Le* **funzioni di transizione** *relative a ϕ_α sono le funzioni $g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathbb{C}^*$ con $g_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta$, al variare di α e β.*

Osservazione 1.4.3. Tali funzioni hanno le seguenti proprietà:

(i) $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha \cap U_\beta)$;

(ii) $g_{\alpha\beta} g_{\beta\alpha} = id$

(ii) $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = id$.

Dato un fibrato abbiamo dunque una collezione di funzioni $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta}$ che soddisfano le proprietà in (1.4.3), viceversa è possibile vedere che ad una tale collezione di funzioni è associato un fibrato.

Osservazione 1.4.4. Sia E un fibrato e $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di X a cui sono associate le banalizzazioni ϕ_α. Preso $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X^*)$ si ha che $\phi'_\alpha = f_\alpha \phi_\alpha$ definiscono altre banalizzazioni di E e le relative funzioni di transizione sono $g'_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} g_{\alpha\beta}$.
Con una verifica si vede che ogni altra banalizzazione è ottenuta allo stesso modo e dunque abbiamo il seguente lemma

Lemma 1.4.3. *Due collezioni di funzioni regolari $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}$ definiscono lo stesso fibrato se e solo se esiste $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X^*)$ tale che $g'_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} g_{\alpha\beta}$.*

Possiamo dare una struttura di gruppo all'insieme dei fibrati lineari: dati E ed E' a cui sono associate rispettivamente le funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}$, definiamo $E \otimes E'$ il fibrato associato a $\{g_{\alpha\beta} g'_{\alpha\beta}\}$. L' inverso di E è invece il fibrato E^* definito dalle funzioni $\{g_{\alpha\beta}^{-1}\}$.

Notazione 1.4.1. *Il gruppo dei fibrati lineari su X si indica con $Pic(X)$.*

Lemma 1.4.4. $\check{H}^1(\{U_\alpha\}, \mathcal{O}_X^*) = Pic(X)$.

Dimostrazione. Per prima cosa $\{g_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_X^*)\}$ può essere vista come una 1-cocatena di Čech su X a coefficienti in $\mathcal{O}_X^*$ in quanto $\check{C}^1(\{U_\alpha\}, \mathcal{O}_X^*) = \prod \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, O_X^*)$. Inoltre $\{g_{\alpha\beta}\}$ è un cociclo perché $[\delta(g_{\alpha\beta})]_{\alpha\beta\gamma} = g_{\beta\gamma} g_{\alpha\gamma}^{-1} g_{\alpha\beta} = id$ per le proprietà (1.4.3). D'altra parte, per quanto visto sopra, due cocicli $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}$ definiscono lo stesso fibrato se e solo se $\{g_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{'-1}\}$ è un cobordo.

□

Osserviamo che $\check{H}^1(\{U_\alpha\}, \mathcal{O}_X^*) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ in quanto le due definizioni di gruppi di coomologia coincidono su una varietà algebrica non singolare X.

1.4.3 Corrispondenza tra fibrati lineari e divisori

Dato un divisore D su X abbiamo che D può essere rappresentato da un sistema di coppie $\{(U_\alpha, f_\alpha) : f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{M}_X^*)\}$ tali che $\frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_X^*)$. Ponendo $g_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}$ abbiamo che le $g_{\alpha\beta}$ verificano le proprietà delle funzioni di transizione e quindi definiscono un fibrato lineare su X che non varia se al posto di D consideriamo un divisore ad esso equivalente, per quanto visto in (1.4.4).

Definizione 1.4.10. *Il fibrato lineare associato alle $g_{\alpha\beta}$ definite sopra si chiama* **fibrato lineare associato** *a D e si indica con $[D]$.*

In questo modo abbiamo costruito una mappa $[\ ]: Div(X) \to Pic(X)$ che associa ad ogni D il fibrato $[D]$. Tale mappa è un omomorfismo perché si vede subito che $[D + D'] = [D] \otimes [D']$.

Definizione 1.4.11. *Due divisori D e D' su X si dicono* **linearmente equivalenti**, *e scriviamo $D \sim D'$, se $[D] = [D']$ o equivalentemente se esiste $f \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X^*)$ tale che $D = D' + (f)$.*

Tutto quello che abbiamo visto finora può essere unito in un unico in un unico discorso utilizzando il linguaggio dei fasci.
Dati $\mathcal{O}_X^*, \mathcal{M}_X^* e \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*$ abbiamo la successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{O}_X^* \xrightarrow{i} \mathcal{M}_X^* \to \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^* \to 0$$

da cui si ottiene la successione lunga di coomologia

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^0(X, \mathcal{M}_X^*) \to H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to ...$$

identificando $H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ con $Div(X)$ e $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ con $Pic(X)$ otteniamo il morfismo considerato prima:

$$\begin{array}{ccccc} H^0(X, \mathcal{M}_X^*) & \xrightarrow{i^*} & Div(X) & \xrightarrow{j^*} & Pic(X) \\ f & \longrightarrow & (f) & & \\ & & D & \longrightarrow & [D]. \end{array}$$

Definizione 1.4.12. *Dato un fibrato lineare E definiamo una* **sezione (regolare)** *di E su un aperto U di X un morfismo $\sigma : U \to E$ tale che $\sigma(x) \in E_x$ per ogni $x \in U$, cioè $\pi \circ \sigma = id_X$.*

Osservazione 1.4.5. Le sezioni di E formano un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli su X che si indica con $\mathcal{O}(E)$.

Le banalizzazioni ϕ_α di E e le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ inducono degli isomorfismi

$$\phi_\alpha^* : \mathcal{O}(E(U_\alpha)) \to \mathcal{O}(U_\alpha) \tag{1.4}$$

quindi ogni sezione σ di E su U è data dalle funzioni $\sigma_\alpha = \phi_\alpha^*(\sigma) \in \Gamma(U \cap U_\alpha, \mathcal{O}_X)$ tali che $\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta}\sigma_\beta$ in $U \cap U_\alpha \cap U_\beta$.
D'altra parte, se definiamo una **sezione razionale** di E su X come una sezione s del fascio $\mathcal{O}(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X$, abbiamo che s è data dalle funzioni $s_\alpha \in \Gamma(U \cap U_\alpha, \mathcal{M}_X)$ che verificano $s_\alpha = g_{\alpha\beta}s_\beta$ in $U \cap U_\alpha \cap U_\beta$.
Inoltre se $s, s' \not\equiv 0$ sono razionali allora $\frac{s}{s'}$ è una funzione razionale globale su X in quanto in $U_\alpha \cap U_\beta$ si ha che

$$\frac{s_\alpha}{s'_\alpha} = \frac{g_{\alpha\beta}s_\beta}{g_{\alpha\beta}s'_\beta} = \frac{s_\alpha}{s'_\beta}$$

cioè le due restrizioni coincidono nell'intersezione.

Definizione 1.4.13. *Siano $\{s_\alpha \in \Gamma(U \cap U_\alpha)\}$ funzioni razionali che definiscono la sezione razionale s, definiamo il* **divisore associato** *a s il divisore*

$$(s) = \sum v_Y(s_\alpha)Y$$

dove s_α è tale che $U_\alpha \cap Y \neq \emptyset$.

Osservazione 1.4.6. La definizione è ben posta perché se esiste s_β tale che $U_\beta \cap Y \neq \emptyset$ allora $\frac{s_\alpha}{s_\beta} = g_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, O_X^*)$ e dunque $v_Y(s_\alpha) = v_Y(s_\beta)$.

Lemma 1.4.5. *I divisori associati alle sezioni razionali di un fibrato sono tutti linearmente equivalenti.*

Dimostrazione. L'asserto discende dal fatto che date s e s' sezioni razionali allora $\frac{s}{s'}$ è una funzione razionale globale su X e $(\frac{s}{s'}) = (s) - (s')$ cioè $(s) \sim (s')$. □

Lemma 1.4.6. *Dato un divisore D e $[D]$ il fibrato associato si ha che esiste una sezione razionale s di $[D]$ tale che $(s) = D$. Inoltre ogni fibrato E è uguale a $[(s)]$ per una qualsiasi sua sezione razionale globale s.*

Dimostrazione. Se $D \in Div(X)$ allora $D = \{(U_\alpha, f_\alpha) : f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{M}^*)\}$, quindi le f_α danno origine ad una sezione razionale s_f di $[D]$ e $(s_f) = D$. Per la seconda parte vediamo che se $g_{\alpha\beta}$ sono le funzioni di transizione allora una qualsiasi s sezione razionale è tale che $\frac{s_\alpha}{s_\beta} = g_{\alpha\beta}$ dunque $L = [(s)]$. □

Dal lemma discende che c'è una corrispondenza biunivoca tra i divisori di X e i fibrati lineari su X.
Il nostro interesse passa ora ai divisori effettivi linearmente equivalenti ad un divisore dato D. Essi possono essere visti in due modi:

(i) i divisori (σ) con σ sezione di $[D]$;

(ii) i divisori della forma $D + (f)$ con $D + (f) \geq 0$ al variare di $f \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X)$.

Avendo già esaminato il caso (i) passiamo al caso (ii).

Notazione 1.4.2. *Denotiamo con $|D|$ l'insieme dei divisori effettivi linearmente equivalenti a D.*

Definizione 1.4.14. *Sia D un divisore su X, definiamo lo* **spazio delle sezioni globali** *di D l'insieme $\mathcal{L}(D) = \{f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) : D + (f) \geq 0\}$.*

Osservazione 1.4.7. L'insieme $\mathcal{L}(D)$ è uno spazio vettoriale su k.

Nel caso in cui X sia proiettiva abbiamo:

Lemma 1.4.7. $|D| \cong \mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$

Dimostrazione. Costruiamo $\delta : \mathcal{L}(D)^* \to |D|$ ponendo $\delta(f) = (f) + D$. Data $c \in k^*$, cioè costante non nulla, $\delta(cf) = (cf) + D = (f) + D$, viceversa se $D + (f) = D + (f')$ allora $(f) = (f')$ cioè $(\frac{f}{f'}) = 0$ quindi per (1.4.1) $\frac{f}{f'} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$ quindi $\frac{f}{g} = c$.

□

Osserviamo che data una sezione s_0 di $[D]$ tale che $(s_0) = D$, per ogni altra sezione s si ha che $f_s := \frac{s}{s_0}$ è una sezione razionale di $[D]$ mentre $(f_s) = (s) - (s_0) \geq -D$ quindi $f_s \in \mathcal{L}(D)$. D'altra parte, per ogni $f \in \mathcal{L}(D)$, $s := s_0 f$ è una sezione di $[D]$. Abbiamo quindi ottenuto il seguente risultato:

Proposizione 1.4.8. *Dato D divisore di X e s_0 sezione di $[D]$ tale che $(s_0) = D$ si ha che*

$$\mathcal{L}(D) \xrightarrow{\simeq} H^0(X, \mathcal{O}([D]))$$

Notazione 1.4.3. *D'ora in poi indicheremo $\mathcal{O}([D])$ semplicemente con $\mathcal{O}(D)$.*

Notazione 1.4.4. *Denotiamo con $h^0(X, \mathcal{O}(D))$ la dimensione di $H^0(X, \mathcal{O}(D))$ come k spazio vettoriale.*

1.4.4 Fasci invertibili

Definizione 1.4.15. *Un fascio $\mathcal{F}$ di O_X-moduli si dice* **fascio libero** *di rango n se $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X^n = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X$.*

Definizione 1.4.16. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio di $\mathcal{O}_X$ moduli, se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U tale che $\mathcal{F}_{|U}$ è un fascio libero allora $\mathcal{F}$ si dice* **fascio localmente libero***.*

Osservazione 1.4.8. Se $\mathcal{F}$ è localmente libero e X è connessa allora il rango di $\mathcal{F}|_U$ è uguale per ogni aperto U.

Definizione 1.4.17. *Sia X connessa e $\mathcal{F}$ localmente libero allora definiamo il* **rango** *di $\mathcal{F}$ come il rango di $\mathcal{F}|_U$ per un qualsiasi aperto $U \subset X$.*

Definizione 1.4.18. *Un fascio localmente libero di rango* 1 *si dice* **fascio invertibile***.*

Osserviamo che il fascio delle sezioni associato un fibrato lineare L è un fascio invertibile per quanto visto in (1.4). Viceversa si può vedere che ad ogni fascio invertibile corrisponde un fibrato lineare.

1.4.5 Il teorema di Riemann-Roch

Consideriamo ora il caso particolare di X curva irriducibile, non singolare e proiettiva in $\mathbb{P}_k^n$, con k campo algebricamente chiuso.

Osservazione 1.4.9. Un divisore su X sarà della forma $\sum_i a_i P_i$ con P_i punto in X.

Definizione 1.4.19. *Sia $D = \sum_i a_i P_i$ un divisore di X, il suo* **grado***, $\deg D$, è $\sum a_i$.*

Osservazione 1.4.10. L'applicazione definita dal grado *deg*: $Div(X) \to \mathbb{Z}$ è un omomorfismo suriettivo.

Si può dimostrare che:

Teorema 1.4.9. *Per ogni $D \in Div(X)$ si ha che $h^0(X, \mathcal{O}(D))$ è finita e verifica*

$$h^0(X, \mathcal{O}(D)) \leq max\{0,\ deg\ D + 1\}.$$

Denotiamo con ω_X il fascio delle forme differenziali razionali su X. Essendo un fascio invertibile possiamo considerarlo come un fibrato lineare. Ogni sezione razionale di tale fibrato definisce un divisore di X ed inoltre questi divisori sono tutti linearmente equivalenti per quanto visto nel lemma (1.4.5).
La classe di questi divisori è chiamata **divisore canonico** o **classe canonica** e si indica con K_X.

Definizione 1.4.20. *La dimensione dello spazio vettoriale $H^0(X, \mathcal{O}(K_X))$ è detta il* **genere** *di X e si indica con g.*

Teorema 1.4.10. *(Riemann-Roch) Sia D un divisore X allora*

$$h^0(X, \mathcal{O}(D)) = \deg D + h^0(X, \mathcal{O}(K_X - D)) - g + 1.$$

Osservazione 1.4.11. *Applicando il teorema di Riemann-Roch si vede subito che deg$(K_X) = 2g - 2$.*

Capitolo 2

Il teorema di Cayley-Bacharach

In questa sezione presentiamo alcuni teoremi in cui si possono rintracciare delle forme elementari del teorema di Cayley-Bacharach. Consideriamo alcuni risultati dovuti a Pappo di Alessandria, Pascal e Chasles. In seguito analizzeremo il teorema di Cayley-Bacharach e due sue estensioni.
Si fa riferimento alla trattazione dei primi due paragrafi di [7].

2.1 Versioni elementari

2.1.1 Pappo di Alessandria e Pascal

Iniziamo con il matematico greco Pappo di Alessandria (IV d.C.) concentrando la nostra attenzione su un risultato che troviamo nel libro VII delle sue ″Collectiones mathematicae″.

Teorema 2.1.1 (Pappo di Alessandria)**.** *Siano L e M due rette nel piano affine. Si prendano q_1, q_2 e q_3 punti distinti in L e p_1, p_2 e p_3 punti distinti in M, nessuno dei quali è in $L \cap M$. Se per ogni $j \neq k \in \{1, 2, 3\}$ chiamiamo r_{jk} il punto di intersezione tra la retta per p_k e q_j e la retta per p_j e q_k allora i tre punti r_{jk} sono allineati.*

Osservazione 2.1.1. Il teorema è enunciato nel caso del piano euclideo ma appare subito evidente che esso è vero solo se si considera il piano proiettivo.

Ad esempio se si prendono i punti in modo che la retta per p_1 e q_2 sia parallela a quella per p_2 e q_1, il punto r_{12} non esiste a meno di non considerare il punto all'infinito del piano proiettivo.

Il teorema precedente può essere visto come un caso particolare del seguente risultato ottenuto da Pascal a seguito degli studi di Cartesio sullo spazio proiettivo.

Teorema 2.1.2 (Pascal)**.** *Se si iscrive un esagono in una conica C contenuta nel piano proiettivo allora i prolungamenti dei lati opposti dell'esagono si intersecano in tre punti allineati.*

Vediamo subito che il teorema di Pappo discende da questo teorema. Consideriamo l'unione delle due rette L e M come un caso particolare di conica e q_1, q_2, q_3, p_1, p_2 e p_3 sei suoi punti distinti. Tali punti determinano un esagono iscritto nella conica. Per vedere maggiormente il legame con le ipotesi di Pappo scegliamo come lati i segmenti $\overline{p_1q_2}, \overline{q_2p_3}, \overline{p_3q_1}, \overline{q_1p_2}, \overline{p_2q_3}$ e $\overline{q_3p_1}$. In questo modo i lati opposti sono sulle rette per p_j e q_k e per p_k e q_j e i punti r_{jk} risultano essere allineati per il teorema di Pascal.

2.1.2 Il teorema di Chasles

Passiamo ora ad una estensione dei due teoremi precedenti dovuta al matematico francese Michel Chasles. Il risultato di Chasles è sia più semplice sia più interessante di quello di Pascal e comunemente, anche se erroneamente, va sotto il nome di Cayley-Bacharach.

Teorema 2.1.3 (Chasles)**.** *Siano X_1 e X_2 due cubiche proiettive piane, prive di componenti irriducibili comuni, che si intersecano in nove punti distinti $p_1, ..., p_9$. Se X è una qualsiasi cubica proiettiva piana contenente $p_1, ..., p_8$ allora X contiene anche p_9.*

Prima di dimostrare il teorema introduciamo alcune notazioni e definizioni classiche.

Notazione 2.1.1. *Indicheremo con S_n lo spazio dei polinomi omogenei di grado n contenuti in $k[x_0, x_1, x_2]$, con k campo.*

Definizione 2.1.1. *Sia* Γ *un insieme di* m *punti di distinti di* $\mathbb{P}^2$*, diremo che* Γ *impone* ℓ *condizioni alle curve di grado* d *se lo spazio vettoriale delle curve di* $\mathbb{P}^2$ *di grado* d *che contengono* Γ *ha codimensione* ℓ *in* S_d*. Denotiamo questo numero* ℓ *con* $\mathrm{h}_\Gamma(\mathrm{d})$*.*
Inoltre la funzione $h_\Gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *che a* d *associa* $h_\Gamma(d)$ *si chiama* **funzione di Hilbert** *di* Γ*.*

Diremo che un insieme Γ di m punti *impone condizioni indipendenti* alle curve di grado d se $h_\Gamma(d) = m$, mentre *non impone condizioni indipendenti* se $h_\Gamma(d) < m$.

Dimostrazione. (Chasles)
Utilizzando le notazioni precedenti, se chiamiamo $\Gamma = \{p_1, ..., p_9\}$ e $\Gamma' = \{p_1, ..., p_8\}$, dimostrare il teorema vuol dire far vedere che

$$h_\Gamma(3) = h_{\Gamma'}(3).$$

Vediamo subito che i 9 punti di Γ non impongono 9 condizioni alle cubiche perché lo spazio delle cubiche che contengono Γ non ha codimensione 9. Infatti tale spazio ha codimensione minore o uguale a 8 perché contiene tutte le cubiche della forma $AX_1 + BX_2$, le quali hanno codimensione 8. □

Il lemma che segue ci permette di ottenere un risultato più preciso su $h_\Gamma(3)$ e cioè che $h_\Gamma(3) = 8$. Lo enunciamo e dimostriamo nella forma più generale anche se lo utilizzeremo solo nel caso $n = 8$ e $d = 3$.

Lemma 2.1.4. *Sia* $\Omega = \{p_1, ..., p_n\} \subset \mathbb{P}^2$ *una collezione di* $n \geq 2d+2$ *punti distinti. I punti di* Ω *non impongono condizioni indipendenti alle curve di grado* d *se e solo se o* $d + 2$ *dei punti sono allineati oppure* $n = 2d + 2$ *e* Ω *è contenuto in una conica.*

Dimostrazione. Mostriamo separatamente le due implicazioni:

$'' \Leftarrow ''$ Se $d + 2$ punti sono su una retta L allora ogni curva di grado d che contiene tali punti contiene L per il teorema di Bézout. Le curve di grado d che contengono L hanno dimensione uguale alle curve di grado $d - 1$, quindi la codimensione del sottospazio di tali curve è $\binom{2+d}{d} - \binom{d-1+2}{d-1} = d + 1$. I restanti $n - (d + 2)$ punti impongono al massimo $n-(d+2)$ condizioni quindi in totale l'insieme Ω impone al più $n-(d+2)+d+1=n-1<n$ condizioni. Con un ragionamento analogo si può dimostrare il caso $n=2d+2$ e Ω su una conica.

$'' \Rightarrow ''$ Utilizziamo l'induzione prima sul grado d e poi sul numero dei punti n. Per l'ipotesi induttiva possiamo assumere che ogni sottoinsieme proprio di Ω imponga condizioni indipendenti. Quindi con tale ipotesi sui sottoinsiemi propri, rimane da dimostrare che ogni curva di grado d che contiene tutti i punti tranne uno contiene tutto Ω.

Base dell'induzione: se $d=1$ allora $n \leq 4$ e in questo caso n punti non impongono condizioni indipendenti se e solo se o $n=3$ e sono allineati oppure $n=4$ e sono su una conica.

Passo induttivo: prendiamo d arbitrario e $n \leq d+1$. Bisogna far vedere che gli n punti impongono condizioni indipendenti. Se consideriamo l'unione di una curva di grado $d+1-n$, che non passa per p_n, con $n-1$ rette, ciascuna passante per un solo p_i, per $i=1,...,n-1$, otteniamo una curva C che passa per $p_1,...,p_{n-1}$ e non per p_n.

Sia ora $n>d+1$ e supponiamo che $d+1$ punti di Ω siano allineati e siano su una retta L. Indichiamo con Ω' il sottoinsieme costituito dai restanti $n-(d+1) \leq d+1$ punti e diciamo che Ω' non impone condizioni indipendenti sulle curve di grado $d-1$. Se non fosse così potrei prendere una curva di grado $d-1$ che passa per tutti i punti di Ω' tranne uno e considerando l'unione con la retta L avrei una curva di grado d che passa per tutti i punti di Ω tranne uno e questo non è possibile. Per l'ipotesi induttiva, Ω' deve avere $d+1$ punti allineati su una retta M, quindi o L contiene $d+2$ punti oppure $n=2d+2$ e $L \cup M$ è una conica che contiene tutto Ω.

Successivamente supponiamo che la retta L contiene $l \geq 3$ punti di Ω. Per lo stesso motivo di prima gli $n-l$ punti non impongono condizioni indipendenti alle curve di grado $d-1$ e quindi per induzione $d+1$ tra questi sono allineati e posso procedere con lo stesso ragionamento di prima.

Infine se Ω non contiene 3 punti allineati prendo p_1, p_2 e p_3 in Ω e $\Omega' = \Omega - \{p_1, p_2, p_3\}$. Nel caso in cui $\Omega' \cup \{p_i\}$ imponga condizioni indipendenti su curve di grado $d-1$ si può arrivare ad un assurdo procedendo come prima. Si ottiene quindi che $\Omega' \cup \{p_i\}$ non impone condizioni indipendenti e allora non potendo contenere $d+1$ punti allineati, si ha per induzione che $n = 2d+2$ e, per ogni i, $\Omega' \cup \{p_i\}$ è su una conica C_i. Ora se $d = 2$, sei punti non impongono condizioni indipendenti sulle coniche se e solo se sono su una conica. Se $d \geq 3$, Ω' contiene almeno 5 punti e dunque le tre coniche C_i si intersecano in almeno 5 punti e dunque, per Bézout, coincidono con un'unica C che contiene tutto Ω.

$\square$

Possiamo quindi dimostrare che $h_\Gamma(3) = 8$. Poniamo $\Omega = \Gamma'$, $n = 8$ e $d = 3$. Se Ω è contenuto in una conica C allora $|C \cap X_1|$ e $|C \cap X_2|$, dove $|C \cap X_i|$ è la cardinalità dell' intersezione, sono maggiori o uguali a 8, ma per Bézout l'unico modo è che $C \subset X_1 \cap X_2$ e questo è assurdo perché le due curve non hanno componenti in comune per ipotesi. Se invece $d+2 = 5$ punti sono su una retta allora tale retta, sempre per Bézout, è contenuta in X_1 e X_2 e anche questo è assurdo. Da questo discende che $\Omega = \Gamma'$ impone condizioni indipendenti alle cubiche, cioè $h_{\Gamma'}(3) = 8$.

2.2 Cayley e Bacharach

Presentiamo ora il teorema dovuto proprio a Cayley e a Bacharach. La prima formulazione del teorema è stata data da Cayley, comprendeva solo la parte (ii) di (2.2.2) e non era considerato il caso eccezionale. In seguito Bacharach corresse questo enunciato dividendolo in due punti come vedremo in (2.2.2).
La prima dimostrazione proposta usa tecniche abbastanza elementari e il caso più semplice del Teorema Fondamentale delle Funzioni Algebriche di Noether, detto anche il teorema $Af + B\phi$ di Noether.

Le notazioni che useremo sono le seguenti:

Notazione 2.2.1. (i) dato $X \in S_n$ allora $X = 0$ è l'equazione di una curva in $\mathbb{P}^2$ di grado n che, con abuso di notazione, indicheremo sempre con X;

(ii) C^r indica una curva in $\mathbb{P}^2$ di grado r.

Teorema 2.2.1 (Teorema $Af + B\phi$ di Noether)**.** *Si considerino due curve proiettive piane definite dalle equazioni $X_1 = 0$ e $X_2 = 0$, rispettivamente di grado m e n, che si intersecano in mn punti distinti. Una curva C^r che passa per tutti i punti di intersezione di X_1 e X_2 ha equazione della forma $AX_1 + BX_2 = 0$, dove A e B sono polinomi di grado rispettivamente $r - m$ e $r - n$.*

Dimostrazione. Consideriamo tre casi: (i)$r \geq mn$, (ii) $r \geq m + n$ e (iii) $r < m + n$.

(i) In questo caso sono imposte esattamente mn condizioni su C^r in quanto il passaggio per un punto è linearmente indipendente dal passaggio per qualsiasi altro punto. Infatti se supponiamo che le condizioni siano $mn - 1$, prendendo la curva C^r come l'unione di $mn - 1$ rette ognuna passante per un solo punto di questi, si ha che tale curva non contiene l'$mn-$esimo punto. L'equazione di C^r avrà dunque $\frac{1}{2}(r + 1)(r + 2) - mn$ coefficienti arbitrari. Facciamo ora vedere che $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)-mn$ è esattamente la dimensione delle curve che hanno equazione $AX_1 + BX_2 = 0$.
Abbiamo la seguente successione:

$$Ker(f) \hookrightarrow S_{r-m} \oplus S_{r-n} \overset{f=(X_1,X_2)}{\longrightarrow} S_r.$$

L'immagine dell'applicazione f che alla coppia (A, B) associa $AX_1 + BX_2$ è data dalle curve che hanno equazione $AX_1+BX_2 = 0$ e dunque se mostriamo che ha dimensione $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)-mn$ abbiamo concluso la dimostrazione nel caso (i). Il nucleo $Ker(f)$ è costituito da polinomi per cui $AX_1 + BX_2 \equiv 0$, cioè $AX_1 = -BX_2$. Per ipotesi X_2 e X_1

non hanno fattori in comune e dunque $A = XX_2$ e $B = -XX_1$, con $X \in S_{r-m-n}$, quindi $Ker(f) = S_{r-m-n}$. Da questo discende che:

$$\dim(Im(f)) = \dim(S_{r-m} \oplus S_{r-n}) - \dim Ker(f) =$$

$$= \frac{1}{2}(r-m+1)(r-m+2) + \frac{1}{2}(r-n+1)(r-n+2) - \frac{1}{2}(r-n-m+1)(r-n-m+2) =$$

$$= \frac{1}{2}(r+1)(r+2) - mn$$

come volevamo dimostrare.

(ii) Sia ora $r \geq m+n$. Mostreremo l'asserto per induzione discendente. Supponiamo di avere una curva di grado $r-1$ di equazione $F = 0$, che passa per tutti i punti di intersezione, e una retta arbitraria L. Per la curva LF abbiamo per ipotesi induttiva che :

$$LF = AX_1 + BX_2 = (A - X_2X)X_1 + (B + X_1X)X_2 \qquad (2.1)$$

dove X è un polinomio di grado $r-m-n$ che contiene $\frac{1}{2}(r-m-n+1)(r-m-n+2)$ coefficienti arbitrari (si noti che $\frac{1}{2}(r-m-n+1)(r-m-n+2) \leq r-m-n+1$). Imponiamo che la retta L intersechi X_1 in m punti che non sono in X_2, in modo che per 2.1 tali punti siano in B e dunque in $B + X_1X$. In modo analogo imponiamo che L intersechi X_2 in n punti che non sono in X_1 e dunque sono in $A - X_2X$. Scegliendo X tale che $A - X_2X$ intersechi L in altri $r-m-n+1$ punti abbiamo che i punti di intersezione tra $A - X_2X$ e L sono $r-m+1$ e dunque per il teorema di Bézout $A - X_2X = LA'$, con A' polinomio di grado $r-m-1$. Analogamente $B + X_1X = LB'$, con B' polinomio di grado $r-n-1$ e quindi

$$LF = AX_1 + BX_2 = (A - X_2X)X_1 + (B + X_1X)X_2 = LA'X_1 + LB'X_2$$

da cui $F = A'X_1 + B'X_2$.

(iii) Consideriamo $r = m+n-\gamma$ dove $\gamma > 0$, $r \geq m$ e $r \geq n$. Detta $F = 0$ l'equazione della curva C^r che passa per i punti di intersezione, sia $F' = 0$ un'altra curva di grado γ non passante per nessuno degli mn punti. Applicando il punto precedente a FF' si ha:

$$FF' = AX_1 + BX_2 = (A - kX_2)X_1 + (B + kX_1)X_2$$

con k costante arbitraria. I punti di intersezione tra $X_1 = 0$ e $F' = 0$ sono tutti in B, quindi in $B + kX_1$. Infatti $BX_2 = 0$ in $F \cap F'$ implica $B = 0$, perché se così non fosse avremmo che $F' \cap X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Sia ora k tale che $B + kX_1$ intersechi F' in un altro punto, in questo modo per il teorema di Bezoùt si deve avere che $B + kX_1 = F'B'$ con $B' = 0$ curva di grado $m - \gamma$. Da un ragionamento analogo segue che $A - kX_2 = F'A'$ con $A' = 0$ curva di grado $n - \gamma$.
Infine si ha $FF' = A'F'X_1 + B'F'X_2$ quindi $F = A'X_1 + B'X_2$ e questo completa la dimostrazione.

□

Teorema 2.2.2 (Teorema di Cayley-Bacharach)**.** *Siano X_1 e X_2 due curve piane proiettive di grado rispettivamente m e n allora:*

(i) ogni curva C^{m+n-3} che contiene $mn - 1$ punti dell'intersezione $X_1 \cap X_2$, costituita da mn punti distinti, contiene tutto $X_1 \cap X_2$;

(ii) ogni $C^{m+n-\gamma}$ ($\gamma > 3$) che contiene $mn - \frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$ punti di $X_1 \cap X_2$ contiene tutto $X_1 \cap X_2$, tranne il caso particolare in cui i rimanenti $\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$ punti giacciano su una curva $C^{\gamma-3}$.

Dimostrazione. (i) Supponiamo che la curva C^{m+n-3} abbia equazione $W = 0$ e sia $L = 0$ l'equazione di una retta che contiene l'unico punto dell'intersezione $X_1 \cap X_2$ che non è contenuto in C^{m+n-3}. Dal teorema di Noether (2.2.1) si ha che $LW = AX_1 + BX_2$. Supponiamo di aver preso L in modo che intersechi X_2 in n punti di cui solo uno giace anche in X_1. Abbiamo che negli altri $n-1$ punti $A(p)X_1(p) = 0$ con $X_1(p) \neq 0$, cioè tali punti devono essere in A. Poiché A è una curva di grado $n-2$, si ha che $A = LA'$ e quindi anche $B = LB'$, dunque $W = A'X_1 + B'X_2$ cioè C^{m+n-3} contiene $X_1 \cap X_2$.

(ii) Chiamiamo $P_1, P_2, ..., P_{\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)}$ i punti di $X_1 \cap X_2$ che non sono contenuti in $C^{m+n-\gamma}$. Sia $C^{\gamma-3}$ una curva che contiene tutti questi punti tranne che P_1, allora $C^{m+n-\gamma}C^{\gamma-3} = C^{m+n-3}$ contiene tutti i punti di $X_1 \cap X_2$ tranne P_1. Per il punto (i) la curva C^{m+n-3} deve contenere anche P_1.

Ora abbiamo due possibilità:

- $P_1 \in C^{\gamma-3}$ e dunque siamo nel caso eccezionale citato nell'enunciato;
- $P_1 \notin C^{\gamma-3}$ e quindi $P_1 \in C^{m+n-\gamma}$.

Lo stesso argomento usato con P_1 si può applicare a P_2, a P_3 ecc. e arrivando o al caso eccezionale o al caso in cui tutti i $\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$ punti sono in $C^{m+n-\gamma}$.

$\square$

Osservazione 2.2.1. *Il teorema non dà informazioni sul comportamento in $X_1 \cap X_2$ delle curve di grado maggiore o uguale a $m+n-2$. Per vederlo abbiamo bisogno di un risultato più preciso di (2.2.2) che utilizza la coomologia dei fasci e che illustriamo nell'ultima parte del paragrafo.*

Per estendere il teorema di Cayley e Bacharach appena visto sopra abbiamo bisogno di un nuovo approccio più tecnico e meno elementare di quello usato finora, il quale coinvolge divisori, fibrati lineari e fasci invertibili. Cominciamo col richiamare il teorema di Bézout alla luce di questo nuovo linguaggio:

Teorema 2.2.3. *Sia X una curva piana non singolare di grado d e C una curva piana di grado e non contenente X. Il grado del divisore tagliato da C su X è $d \cdot e$.*

Il seguente lemma sarà utilizzato per la dimostrazione di Cayley-Bacharach.

Lemma 2.2.4. *Sia X in $\mathbb{P}^2$ una curva non singolare di grado d e p un punto di X. Ogni divisore effettivo D linearmente equivalente a $(d-3)H+p$ contiene p, dove H è il divisore tagliato da una retta L.*

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che per una curva piana non singolare X il divisore $(d-3)H$ è esattamente il divisore canonico K_X.
Sia p in X allora si ha che:

$$deg(K_X + p) = deg(K_X) + 1 = 2g - 2 + 1 = 2g - 1$$

e dal teorema di Riemann-Roch segue che

$$h^0(X, \mathcal{O}(K_X + p)) = 2g - 1 - g + 1 + h^0(X, \mathcal{O}(-p)) = g + h^0(X, \mathcal{O}(-p)).$$

Il grado di $-p$ è -1, quindi non ci sono divisori effettivi linearmente equivalenti a $-p$ e $h^0(X, \mathcal{O}(-p)) = 0$. Abbiamo dunque

$$h^0(X, \mathcal{O}(K_X + p)) = g = h^0(X, \mathcal{O}(K_X)).$$

Possiamo quindi costruire un isomorfismo di spazi vettoriali tra $H^0(X, \mathcal{O}(K_X))$ e $H^0(X, \mathcal{O}(K_X + p))$ mandando ogni sezione $\sigma \in H^0(X, \mathcal{O}(K_X))$ in $\sigma \frac{1}{f_p}$, dove f_p è una funzione regolare che si annulla in p. Il morfismo è iniettivo e quindi suriettivo perché i due spazi hanno la stessa dimensione. Dalla suriettività ricaviamo che $\frac{1}{f_p}$ sezione di $K_X + p$ è anche sezione di K_X e quindi $K_X + (\frac{1}{f_p}) = K_X - p \geq 0$, ma questo è vero se e solo se $p \in K_X$.

□

Diamo ora una dimostrazione della prima parte del teorema di Cayley-Bacharach che sfrutta le proprietà dei divisori:

Dimostrazione. (Cayley-Bacharach) Per utilizzare Riemann-Roch supponiamo che X_1 sia non singolare. Sia C una curva piana di grado $m + n - 3$ che contiene tutti i punti di $X_1 \cap X_2 = \{p_1, ..., p_{mn}\}$ tranne p_{mn}. Possiamo scrivere il divisore tagliato da C su X_1 come

$$C \cdot X_1 = p_1 + ... + p_{mn-1} + q_1 + ... + q_{m(m-3)+1},$$

inoltre abbiamo che

$$K_{X_1} \sim (m - 3) \cdot H$$

$$p_1 + ... + p_{mn} \sim n \cdot H$$

quindi

$$C \cdot X_1 \sim (m + n - 3) \cdot H.$$

Dunque possiamo riscrivere

$$C \cdot X_1 \sim (m + n - 3) \cdot H \sim n \cdot H - p_{mn} + q_1 + ... + q_{m(m-3)+1}$$

da cui discende che $q_1 + ... + q_{m(m-3)+1} \sim (m - 3) \cdot H + p_{mn} \sim K_{X_1} + p_{mn}$. Per il lemma 2.2.4 $p_{mn} \in \{q_1, ..., q_{m(m-3)+1}\}$ cioè $p_{mn} \in C$ e C contiene interamente $X_1 \cap X_2$. □

Illustriamo ora un teorema più preciso di Cayley-Bacharach, il quale risulta essere una conseguenza di questo risultato:

Teorema 2.2.5. *Siano* X_1 *e* X_2 *due curve in* $\mathbb{P}^2$ *di grado rispettivamente* n *e* m *tali che* $X_1 \cap X_2 = Z$ *sia costituito da* nm *punti distinti. Se indichiamo con* $\mathcal{I}_Z(d)$ *il fascio di ideali di* Z *abbiamo che*

$$H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) = 0 \text{ se } d \geq m+n-2$$

$$H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) \neq 0 \text{ se } d = m+n-3.$$

Dimostrazione. Abbiamo che Z è intersezione completa di due curve e quindi fascio $\mathcal{I}_Z(U)$ è generato localmente da i due polinomi delle curve che costituiscono una successione regolare. Abbiamo quindi la seguente successione esatta corta :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-n-m) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-m) \xrightarrow{g} \mathcal{I}_Z \to 0,$$

dove $f = (X_1, X_2)^t$ e $g = (X_2, -X_1)$. Passando alla successione lunga di coomologia e twistando con d abbiamo:

$$0 \to H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) \to H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-n-m)) \to H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-n)) \oplus H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-m)).$$

Ricordiamo che per le proprietà della coomologia dello spazio proiettivo si ha che:

$$H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-n-m)) = (H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n+m-d-3))^\vee$$

$$H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-n)) \oplus H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-m)) = (H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n-d-3)))^\vee \oplus (H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m-d-3)))^\vee$$

dove $^\vee$ indica il duale dello spazio vettoriale. Quindi possiamo riscrivere la successione di coomologia nel seguente modo:

$$0 \to H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) \to (H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n+m-d-3)))^\vee \to$$

$$\to (H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n-d-3)))^\vee \oplus (H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m-d-3)))^\vee$$

e passando al duale abbiamo :

$$H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n-d-3)) \oplus H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m-d-3)) \to$$

$$\to H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n+m-d-3)) \to (H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)))^\vee \to 0,$$

da cui ricaviamo che se $m+n-d-3<0$ ossia $d \geq m+n-2$ allora

$$H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n+m-d-3)) = 0$$

e quindi per l'esattezza della successione

$$(H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)))^\vee = 0 \quad \text{e} \quad H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) = 0.$$

D'altra parte se $m+n-d-3 = 0 (d = m+n-3)$ allora $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})$ ha dimensione 1 mentre

$$H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n-d-3)) \oplus H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m-d-3)) = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-m)) \oplus H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-n)) = 0$$

quindi $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \to (H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)))^\vee$ è iniettiva e $(H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)))^\vee$ non può essere 0. □

Corollario 2.2.6. *Z impone condizioni indipendenti alle curve di grado d se e solo se $d \geq m+n-2$.*

Dimostrazione. Consideriamo la successione esatta corta:

$$0 \to \mathcal{I}_Z(d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d) \to \mathcal{O}_Z(d) \to 0$$

e la successione lunga di coomologia:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) \arrow[r] & H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) \arrow[r] & H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_Z(d)) \arrow[dll, rounded corners] \\
& H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) \arrow[r] & H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) = 0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Z impone condizioni indipendenti alle curve di grado d se e solo se

$$H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) \to H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_Z(d))$$

è suriettiva perché

$$h_Z(d) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) - h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_Z(d)) = nm.$$

Nel caso in cui $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) = 0$, cioè se $d \geq m+n-2$, questo si verifica. D'altra parte se $d = m+n-3$ allora $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) \to H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_Z(d))$ non è comunque suriettiva perché in caso contrario avremmo che $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) = 0$ ma questo è un assurdo. Se $d < m+n-3$ possiamo comunque vedere che Z non impone condizioni indipendenti. Infatti sia $p \in Z$ e sia A di grado d che passa per $Z - \{p\}$, se consideriamo una retta L che passa per un punto in $Z - \{p\}$ otteniamo la curva $AL^{m+n-3-d}$ di grado $n+m-3$ che non contiene p. Questo è assurdo perché Z non impone condizioni indipendenti alle curve di grado $m+n-3$. □

Osservazione 2.2.2. *Notiamo che il corollario precedente amplia Cayley-Bacharach (2.2.2) in quanto dà informazioni anche sulle condizioni imposte alle curve di grado $d \geq m+n-2$.*

2.2.1 Estensioni di Cayley-Bacharach

In questa sezione mostreremo due estensioni del teorema di Cayley-Bacharach. La prima dovuta proprio a Bacharach considera Γ come unione disgiunta di due suoi sottoinsiemi Γ' e Γ'' e mette in relazione $h_{\Gamma'}(k)$ con $h_{\Gamma''}(s-k)$, dove s è un opportuno intero positivo. La seconda estensione è a sua volta una generalizzazione della precedente e focalizza l'attenzione su n ipersuperfici di grado $d_1, ..., d_n$.
Cominciamo citando un teorema che sarà utile nel corso della trattazione.

Teorema 2.2.7. *Sia X una curva piana non singolare di grado d, C una curva piana di grado k non contenente alcuna componente irriducibile di X e Γ un divisore effettivo su X. La famiglia delle curve piane di grado k contenenti Γ taglia su X il sistema lineare completo dei divisori equivalenti a $C \cdot X - \Gamma$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{I}_\Gamma \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ il fascio di ideali di Γ e $\mathcal{I}_X \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ il fascio di ideali di X. L'ipotesi $\Gamma \subset X$ implica $\mathcal{I}_X \subset \mathcal{I}_\Gamma$ e dunque possiamo considerare la successione esatta corta di fasci:

$$0 \to \mathcal{I}_X(k) \to \mathcal{I}_\Gamma(k) \to (\mathcal{I}_\Gamma/\mathcal{I}_X)(k) \to 0$$

da cui otteniamo la successione esatta lunga di coomologia:

$$0 \to H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_X(k)) \to H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_\Gamma(k)) \to H^0(\mathbb{P}^2, (\mathcal{I}_\Gamma/\mathcal{I}_X)(k)) \to H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_X(k)) \to ...$$

Abbiamo che $H^0(\mathbb{P}^2, (\mathcal{I}_\Gamma/\mathcal{I}_X)(k)) = H^0(X, (\mathcal{I}_\Gamma/\mathcal{I}_X)(k))$ perché $\mathcal{I}_\Gamma/\mathcal{I}_X(k)$ è un fascio su $\mathbb{P}^2$ ottenuto estendendo a zero fuori da X il fascio $\mathcal{I}_\Gamma/\mathcal{I}_X(k)$ visto come sottofascio di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}_X(k) = \mathcal{O}_X(k)$. Inoltre $\mathcal{I}_\Gamma/\mathcal{I}_X(k)$ è isomorfo a $\mathcal{O}_X(-\Gamma)(k)$ e le sue sezioni globali corrispondono ai divisori effettivi linearmente equivalenti a $C \cdot X - \Gamma$. Poiché i divisori associati alle sezioni globali sono tutti linearmente equivalenti, il sistema lineare $C \cdot X - \Gamma$ è completo. D'altra parte il morfismo $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_\Gamma(k)) \to H^0(X, (\mathcal{I}_\Gamma/\mathcal{I}_X)(k))$ risulta essere suriettivo perché $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_X(k)) = 0$ essendo $I_X(k)$ il fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d+k)$. Da ciò discende che ogni sezione globale di $(\mathcal{I}_\Gamma/\mathcal{I}_X)(k)$ è immagine di una sezione globale di $\mathcal{I}_\Gamma(k)$, cioè il sistema lineare completo $C \cdot X - \Gamma$ è tagliato dalle curve di grado k che contengono Γ.

$\square$

Da questo teorema discende un corollario che calcola la funzione di Hilbert per un insieme di punti $\Lambda \subset X$ in relazione agli h^0 dei divisori mH e $mH - \Lambda$:

Corollario 2.2.8. *Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ una curva non singolare di grado d e sia Λ in X un insieme di λ punti allora $h_\Lambda(m) = h^0(X, mH) - h^0(X, mH - \Lambda)$, dove H è il divisore tagliato su X da una retta $L \subset \mathbb{P}^2$.*

Dimostrazione. Dati i fasci $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)$ e $\mathcal{I}_\Lambda(m) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)$, abbiamo che $h_\Lambda(m)$ è uguale a $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) - h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_\Lambda(m))$, cioè alla differenza tra la dimensione dello spazio curve di grado m in $\mathbb{P}^2$ e la dimensione del sottospazio delle curve di grado m che contengono Λ. Dal fatto che $\mathcal{O}_\Lambda(m) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}_\Lambda(m)$ abbiamo:

$$0 \to \mathcal{I}_\Lambda(m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m) \to \mathcal{O}_\Lambda(m) \to 0,$$

inoltre

$$\mathcal{O}_\Lambda(m) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}_\Lambda(m) \cong (\mathcal{O}_X/(\frac{\mathcal{I}_\Lambda}{\mathcal{I}_X}))(m)$$

$$\mathcal{I}_\Lambda/\mathcal{I}_X \cong \mathcal{O}_X(-\Lambda)(m) \cong \mathcal{O}_X(mH - \Lambda)$$

$$\mathcal{O}_X(mH) \cong \mathcal{O}_X(m) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}_X(m)$$

quindi otteniamo un'altra successione esatta corta:

$$0 \to \mathcal{O}_X(mH - \Lambda) \to \mathcal{O}_X(mH) \to \mathcal{O}_\Lambda(m) \to 0.$$

Uniamo queste due successioni nel seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_\Lambda(m) \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_\Lambda(m) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_X(m) \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m) \arrow[r] & \mathcal{O}_X(mH) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & & \mathcal{O}_X(mH-\Lambda) \arrow[u] & \\
 & & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

che passando alla coomologia diventa:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(\mathcal{I}_\Lambda(m)) \arrow[r] & H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0(\mathcal{O}_\Lambda(m)) & \\
0 \arrow[r] & H^0(\mathcal{I}_X(m)) \arrow[r] & H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) \arrow[r] & H^0(\mathcal{O}_X(mH)) \arrow[r] \arrow[u] & H^1(\mathcal{I}_X(m)) \\
 & & & H^0(\mathcal{O}_X(mH-\Lambda)) \arrow[u] & \\
 & & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

dove $H^i(\cdot)$ indica $H^i(\mathbb{P}^2, \cdot)$.

D'altra parte per quanto già visto nel lemma precedente,

$$H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_X(m)) = 0$$

quindi $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) \to H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_X(mH))$ è suriettiva. Dunque la commutatività del diagramma ci permette di affermare che

$$h_\Lambda(m) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) - h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_\Lambda(m)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_X(mH)) - h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_X(mH-\Lambda)).$$

Sempre per quanto visto in 2.2.7, abbiamo che $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_X(mH)) = H^0(X, \mathcal{O}_X(mH))$ e $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_X(mH-\Lambda)) = H^0(X, \mathcal{O}_X(mH-\Lambda))$ quindi possiamo concludere:

$$h_\Lambda(m) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_X(mH)) - h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_X(mH-\Lambda)) = h^0(X, mH) - h^0(X, mH-\Lambda).$$

$\square$

Arriviamo ora ad enunciare l'estensione dovuta a Bacharach :

Teorema 2.2.9 (Bacharach). *Siano $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}^2$ curve di grado rispettivamente m ed n e supponiamo che si intersechino in mn punti distinti.*
Sia $\Gamma = X_1 \cap X_2 = \{p_1, ..., p_{mn}\}$ e scriviamo $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$, cioè come unione di due sottoinsiemi disgiunti. Sia $s = m + n - 3$, se $k \leq s$ è un intero non negativo, allora $h_\Gamma(k) - h_{\Gamma'}(k) = |\Gamma''| - h_{\Gamma''}(s - k)$, dove $|\Gamma''|$ indica la cardinalità di Γ''.

Osservazione 2.2.3. Vediamo che la parte (i) del teorema di Cayley-Bacharach (2.2.2) è semplicemente il caso $k = s$ e $\Gamma'' = \{p_{mn}\}$. Infatti ogni $p \in \Gamma$, in particolare p_{mn}, impone una sola condizione ai polinomi di grado zero e quindi

$$|\Gamma''| - h_{\Gamma''}(s - s) = 1 - 1 = 0,$$

cioè non ci sono curve di grado $m+n-3$ che si annullano in Γ' se non quelle che si annullano in tutto Γ. Inoltre si può ricavare anche la parte (ii) di (2.2.2) ponendo Γ'' uguale all'insieme dei $\frac{1}{2}(\gamma - 1)(\gamma - 2)$ punti rimanenti.

Osservazione 2.2.4. Il teorema appena enunciato ha anche un'altra conseguenza. Ogni curva di grado $s - 1 = m + n - 4$ che contiene tutti i punti di Γ tranne 2 contiene tutto Γ. Inoltre esiste una curva di grado $s - 1$ che contiene $\Gamma - \{p, q, r\}$ e non si annulla in tutto Γ se e solo se i tre punti p, q e r sono allineati.

Dimostrazione. (2.2.9) Supponiamo ancora una volta che X_1 sia non singolare. Sia H il divisore tagliato da una retta L su X_1 e consideriamo anche Γ', Γ'' e Γ come divisori su X_1. Da 2.2.7 abbiamo che la famiglia di curve di grado k contenenti Γ' taglia su X_1 il sistema lineare $k \cdot H - \Gamma'$ mentre la famiglia delle curve di grado k che contengono Γ taglia $k \cdot H - \Gamma \sim (k-n) \cdot H$. Indichiamo $h^0(X, \cdot)$ con $h^0(\cdot)$ e per il teorema di Riemann-Roch (1.4.10) e 2.2.8 abbiamo che:

$$h_\Gamma(k) - h_{\Gamma'}(k) = h^0(k \cdot H) - h^0(k \cdot H - \Gamma) - h^0(k \cdot H) + h^0(k \cdot H - \Gamma') =$$

$$= h^0(k \cdot H - \Gamma') - h^0(k \cdot H - \Gamma) = h^0(k \cdot H - \Gamma') - h^0((k - n) \cdot H) =$$

$$= km - |\Gamma'| + h^0(K_X - k \cdot H + \Gamma') - (k - n)d - h^0(K_X - (k - n)H) =$$

$$= mn - |\Gamma'| + h^0((m - 3 - k) \cdot H + \Gamma') - h^0((m - 3 - k + n) \cdot H) =$$

$$= |\Gamma''| + h^0((s-k)H - n \cdot H + \Gamma') - h^0((s-k) \cdot H) =$$

$$= |\Gamma''| - [h^0((s-k) \cdot H) - h^0((s-k)H - \Gamma'')] = |\Gamma''| - h_{\Gamma''}(s-k).$$

□

Enunciamo infine la seconda estensione di (2.2.2):

Teorema 2.2.10. *Siano* $X_1, ..., X_n$ *ipersuperfici in* $\mathbb{P}^n$ *di grado rispettivamente* $d_1, ..., d_n$ *che si intersecano trasversalmente. Sia* $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ *l'intersezione e siano* Γ' *e* Γ'' *due sottoinsiemi disgiunti. Poniamo* $s = \sum d_i - n - 1$. *Se* $k \leq s$ *è un intero non negativo allora* $h_\Gamma(k) - h_{\Gamma'}(k) = |\Gamma''| - h_{\Gamma''}(s-k)$.

Dimostrazione. Supponiamo che $X = X_1 \cap ... \cap X_{n-1}$ sia non singolare. La dimostrazione è analoga a quella di 2.2.9 a meno di qualche cambiamento. In questo caso abbiamo che $\Gamma \sim d_n \cdot H$, quindi dobbiamo sostituire n con d_n. Inoltre nel caso generale $K_X \sim (\sum_{i=1}^{n-1} d_i - n - 1) \cdot H$ e quindi al posto di $m-3$ avremo $s - d_n$. □

Capitolo 3

Fibrati vettoriali

Nel teorema di Cayley-Bacharach (2.2.2) vediamo che i punti nell'intersezione di due curve hanno una proprietà particolare, ossia tutte le curve di un dato grado che contengono tutti questi punti tranne uno contengono anche il punto che rimane. A partire da questo caso specifico possiamo definire la proprietà di Cayley-Bacharach per un sistema di punti e in seguito generalizzarla agli schemi zero-dimensionali, cosa di cui ci occuperemo in questo capitolo.
Consideriamo una superficie proiettiva non singolare X. Indichiamo con L un fibrato di rango 1 su X e con Z un sottoschema zero-dimensionale di X. Riprendiamo la trattazione presente in [12], paragrafo 3.

3.1 La proprietà di Cayley-Bacharach

Definizione 3.1.1 (Proprietà C-B)**.** *Il sottoschema Z soddisfa la* **proprietà di Cayley-Bacharach** *rispetto al fibrato $L \otimes K_X$ se dato un sottoschema $Z' \subset Z$ con $h^0(X, \mathcal{O}_{Z'}) = h^0(X, \mathcal{O}_Z) - 1$ allora per ogni $s \in H^0(X, L \otimes K_X)$ tale che $s|_{Z'} = 0$ si ha $s|_Z = 0$.*

Teorema 3.1.1. (Teorema di Cayley-Bacharach per fibrati)
Sia Z un sottoschema ridotto zero-dimensionale di X. Allora Z ha la proprietà di Cayley-Bacharach rispetto al fibrato $L \otimes K_X$ se e solo se esistono un fibrato E di rango 2 e una sezione $s \in H^0(X, E)$ tali che $\det E = L$ e $Z(s) = Z$, dove $Z(s)$ è lo schema di annullamento di s.

Osservazione 3.1.1. Dal teorema segue che se Z soddisfa la proprietà di Cayley-Bacharach rispetto a $L \otimes K_X$ allora Z è localmente intersezione completa. Infatti , essendo della forma $Z(s)$ con $s \in H^0(X, E)$, Z è localmente definito da due equazioni.

Per dimostrare il teorema studiamo prima le condizioni per cui esistono dei tali E ed s a partire dal fibrato lineare L e dal sottoschema zero-dimensionale Z, cioè spostiamo l'attenzione sulla seguente domanda:

Quando esistono un fibrato E su X di rango 2 e una sezione $s \in H^0(X, E)$ tali che $\det E = L$ e $Z(s) = Z$?

La risposta a questa domanda prevede l'utilizzo della *costruzione di Serre* che andiamo ad illustrare nel paragrafo seguente.

3.2 La corrispondenza di Serre

Fissiamo un fibrato lineare L su X e un sottoschema zero-dimensionale $Z \subset X$ non necessariamente ridotto. L'idea di Serre è quella di costruire il fibrato E tramite un'estensione di $L \otimes \mathcal{I}_Z$ per $\mathcal{O}_X$, dove $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_X$ è il fascio di ideali di Z.
Una tale estensione è un elemento dello spazio vettoriale $Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)$ cioè è una successione esatta corta del tipo:

$$e : 0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}^e \to L \otimes \mathcal{I}_Z \to 0$$

dove $\mathcal{F}^e$ è un $\mathcal{O}_X-$modulo di rango 2 privo di torsione in quanto sia $\mathcal{O}_X$ che $L \otimes \mathcal{I}_Z$ sono privi di torsione. Se $\mathcal{F}^e$ fosse localmente libero, quindi un fibrato vettoriale, l'omomorfismo $\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}^e$ definirebbe una sezione s tale che $Z(s) = Z$. Inoltre si può verificare che in tale caso $\det \mathcal{F}^e = L$.
Dunque per rispondere alla domanda iniziale bisogna capire quando il fascio $\mathcal{F}^e$ è localmente libero. Iniziamo dando una condizione affinché non sia localmente libero:

Proposizione 3.2.1. *Sia data $e \in Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)$. Il corrispondente fascio $\mathcal{F}^e$ non è localmente libero se e solo se esiste un sottoschema proprio $Z' \subset Z$(eventualmente vuoto) tale che*

$$e \in Im\{Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'}, \mathcal{O}_X) \to Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)\}.$$

Osservazione 3.2.1. Notiamo che il morfismo

$$i : Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'}, \mathcal{O}_X) \to Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)$$

esiste ed è ben definito. Infatti $Z' \subset Z$ implica che $\mathcal{I}_Z$ è contenuto in $\mathcal{I}_{Z'}$ e quindi abbiamo un'iniezione da $L \otimes \mathcal{I}_Z$ a $L \otimes \mathcal{I}_{Z'}$, a partire da questa applicazione possiamo costruire i mediante l'operazione di pull-back come illustrato in 1.2.2.

Richiamiamo alcuni risultati sui fasci liberi e sui fasci coerenti che intervengono nella dimostrazione della proposizione (3.2.1). Per le dimostrazioni e una trattazione più dettagliata si rinvia a [8] pag 71 e seguenti.

Notazione 3.2.1. *Indichiamo con $\mathcal{F}_x$ la spiga del fascio nel punto $x \in X$, mentre con Supp($\mathcal{F}$) denotiamo il supporto di $\mathcal{F}$ cioè l'insieme dei punti $x \in X$ tali che $\mathcal{F}_x \neq 0$.*

Lemma 3.2.2. *Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci localmente liberi di rango 2. Allora per ogni morfismo iniettivo $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ si ha che Supp($\mathcal{G}/\mathcal{F}$) ha codimensione pura uguale a 1 oppure è vuoto.*

Dimostrazione. Se ϕ è un isomorfismo allora $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ è il fascio nullo e quindi $Supp(\mathcal{G}/\mathcal{F}) = \emptyset$. Se ϕ non è un isomorfismo allora esiste $x \in X$ tale che $\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ non è suriettiva, cioè esiste un aperto affine U, con $x \in U$, tale che $\phi|_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ non è suriettiva. Poiché entrambi i fasci sono localmente liberi abbiamo che $\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{O}_U \oplus \mathcal{O}_U \cong \mathcal{G}|_U$ quindi

$$\phi|_U : \mathcal{O}_U \oplus \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U \oplus \mathcal{O}_U.$$

Questo ci permette di rappresentare $\phi|_U$ con una matrice 2×2 di funzioni regolari su U la quale ha determinante nullo in x perché ϕ_x non è suriettiva. Il luogo dei punti dove si annulla il determinante di questa matrice ha codimensione pura uguale a 1. D'altra X può essere ricoperta da un numero finito di aperti affini e quindi l'unione dei luoghi dove si annullano tali determinanti, che è Supp $\mathcal{F}/\mathcal{G}$, ha codimensione pura uguale a 1. $\square$

Lemma 3.2.3. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente.*
Si ha che $\mathrm{pd}(\mathcal{F}_x) \geq q$ se e solo se per ogni $i < q$ si ha $\mathcal{E}xt^i_{O_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)_x = 0$

Lemma 3.2.4. *Sia X una varietà di dimensione n allora per ogni i si ha*

$$dim(Supp(\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)) \leq n - i.$$

Sia $S(\mathcal{F})$ l'insieme dei punti in cui $\mathcal{F}$ non è localmente libero. Dal lemma (3.2.3) abbiamo che

$$S(\mathcal{F}) = \bigcup_{i=1}^{n} Supp(\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X))$$

quindi $S(\mathcal{F})$ è un chiuso e $codim(S(\mathcal{F})) \geq 1$.

Definizione 3.2.1. *Un fascio coerente $\mathcal{F}$ è detto un* **fascio di k-esime sizigie** *se esiste una successione esatta*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{O}_X^{\oplus p_1} \to \mathcal{O}_X^{\oplus p_2} \to \cdots \to \mathcal{O}_X^{\oplus p_k}.$$

Proposizione 3.2.5. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente che è localmente di $k-$esima sizigie allora $codim(S(\mathcal{F})) > k$.*

Lemma 3.2.6. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente privo di torsione. Allora per ogni $x \in X$ esiste un aperto U che contiene x e tale che $\mathcal{F}|_U \hookrightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus r}$ per qualche r. Il minimo di tali r al variare di $x \in X$ si dice* **rango** *di $\mathcal{F}$.*

Corollario 3.2.7. *Se il fascio $\mathcal{F}$ è coerente e privo di torsione allora*

$$codim S(\mathcal{F}) \geq 2.$$

Dimostrazione. Dal lemma 3.2.6 segue che $\mathcal{F}$ è un fascio di $1-$sizigie e applicando 3.2.5 si ottiene la disuguaglianza voluta. □

Consideriamo il fascio $\mathcal{F}^{\vee\vee}$, ossia il fascio $\mathcal{H}om(\mathcal{F}^{\vee}, \mathcal{O}_X)$ dove $\mathcal{F}^{\vee} = \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$. Abbiamo un'applicazione $\mu : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\vee\vee}$ e il suo nucleo $ker(\mu)$ è un fascio tale che

$$(ker(\mu))_x = \{a \in \mathcal{F}_x \ : \ fa = 0 \ con \ f \in \mathcal{O}_{X,x} \setminus \{0\}\},$$

cioè abbiamo che μ è iniettiva se e solo se $\mathcal{F}$ è privo di torsione.

Definizione 3.2.2. *Un fascio coerente $\mathcal{F}$ si dice* **riflessivo** *se μ è un isomorfismo.*

Lemma 3.2.8. *Se $\mathcal{F}$ è coerente e riflessivo allora codim$(S(\mathcal{F})) \geq 3$.*

Come immediata conseguenza abbiamo:

Corollario 3.2.9. *I fasci riflessivi e coerenti su una superficie sono localmente liberi.*

Dimostrazione. (Proposizione [3.2.1]) Mostriamo le due implicazioni separatamente:

$''\Rightarrow''$: Supponiamo che $\mathcal{F}^e$ non sia localmente libero. Allora possiamo considerare il morfismo $\mu : \mathcal{F}^e \to (\mathcal{F}^e)^{\vee\vee}$ che risulta essere iniettivo perché $\mathcal{F}^e$ è privo di torsione($\mathcal{F}^e$ è il termine medio di una successione esatta corta in cui gli estremi $\mathcal{O}_X$ e $L\otimes\mathcal{I}_Z$ sono privi di torsione). Componendo $\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}^e$ e μ otteniamo un morfismo da $\mathcal{O}_X$ a $(\mathcal{F}^e)^{\vee\vee}$ che ha come conucleo $L \otimes \mathcal{I}_{Z'}$ per qualche sottoschema $Z' \subset X$. Il sottoschema Z' è dato dai punti in cui si annulla la sezione $s' \in \Gamma(X, (\mathcal{F}^e)^{\vee\vee})$ definita da $\mathcal{O}_X \to (\mathcal{F}^e)^{\vee\vee}$, inoltre $Z' \subset Z$ perché s' è composizione della sezione $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}^e)$ definita dalla mappa $\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}^e$ con μ. Tutte queste considerazioni portano ad avere il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{F}^e \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & L \otimes \mathcal{I}_Z \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r] & (\mathcal{F}^e)^{\vee\vee} \arrow[r] \arrow[d] & L \otimes \mathcal{I}_{Z'} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \tau \arrow[r, equal] \arrow[d] & \tau \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

dove i conuclei di μ e i sono uguali perché

$$\tau = coker(i) = \frac{L \otimes \mathcal{I}_Z}{L \otimes \mathcal{I}_{Z'}} \cong \frac{\mathcal{F}^e/\mathcal{O}_X}{(\mathcal{F}^e)^{\vee\vee}/\mathcal{O}_X} \cong \frac{\mathcal{F}^e}{(\mathcal{F}^e)^{\vee\vee}} = coker(\mu).$$

Da questo diagramma si ricava che l'estensione e è nell'immagine del morfismo $Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'}, \mathcal{O}_X) \to Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)$.

D'altra parte $(\mathcal{F}^e)^{\vee\vee}$ è localmente libero e quindi τ è diverso da zero perché è un fascio finito che ha supporto nei punti in cui $\mathcal{F}^e$ non è localmente libero. Ciò implica che il conucleo di i è diverso da zero cioè $\mathcal{I}_Z$ è strettamente contenuto in $\mathcal{I}_{Z'}$ e dunque Z' è contenuto propriamente in Z.

$'' \Leftarrow''$: Supponiamo che esista un sottoschema proprio $Z' \subset Z$ tale che e sia nell'immagine di $Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'}, \mathcal{O}_X) \to Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)$, cioè si abbia:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{F}^e \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & L \otimes \mathcal{I}_Z \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & L \otimes \mathcal{I}_{Z'} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \tau \arrow[r, equal] \arrow[d] & \tau \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd} .$$

Come prima abbiamo che μ e i sono iniettive e i loro conuclei sono uguali ad uno stesso fascio τ. Tale fascio ha supporto di codimensione 2 perché esso è costituito da punti di Z.

Per completare la dimostrazione facciamo vedere che $\mathcal{F}^e$ deve essere non localmente libero, in caso contrario sarebbe violata la condizione $codim(Supp(\tau)) = 2$.

Il fascio $\mathcal{E}$ è privo di torsione (perché $\mathcal{O}_X$ e $L \otimes \mathcal{I}_{Z'}$ sono privi di torsione) e quindi possiamo considerare l'inclusione $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee}$ ottenendo per composizione un'iniezione da $\mathcal{F}^e \to \mathcal{E}^{\vee\vee}$. Abbiamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}^e \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{E}^{\vee\vee} & \mathcal{E} \arrow[l] \arrow[d] \\
 & \tau.
\end{tikzcd}$$

Se $\mathcal{F}^e$ è localmente libero allora ϕ è un morfismo iniettivo tra fibrati di rango 2 quindi $Supp(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{F}^e)$ o è vuoto oppure ha codimensione pura 1. D'altra parte

$$Supp(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{F}^e) = Supp(\mathcal{E}/\mathcal{F}^e) \cup Supp(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E})$$

dove $codim(Supp(\mathcal{E}/\mathcal{F}^e)) = codim(\tau) = 2$ e $codim(Supp(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E})) \geq 2$, ma questo porta ad una contraddizione con il fatto che $Supp(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{F}^e)$ o è vuoto oppure ha codimensione pura 1.

□

Corollario 3.2.10. *Sia Z sia uno schema finito ridotto. Esiste un'estensione $e \in Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z)$ con $\mathcal{F}^e$ localmente libero se e solo se per ogni sottoschema proprio $Z' \subset Z$ (incluso $Z' = \emptyset$) si ha che l'immagine di $Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'}, \mathcal{O}_X)$ è un sottospazio proprio di $Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)$.*

Dimostrazione. Dimostreremo che la condizione è sufficiente in quanto la proposizione precedente ha già verificato che essa è necessaria. Se tutti i sottoschemi propri Z' di Z sono tali che l' immagine di $Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'}, \mathcal{O}_X)$ è un sottospazio proprio di $Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)$ abbiamo due possibilità o

$$Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X) \setminus \bigcup_{Z'} Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'}, \mathcal{O}_X) \neq \emptyset$$

e quindi esiste un'estensione e di questo tipo, oppure

$$\bigcup_{Z'} Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'}, \mathcal{O}_X) = Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)$$

e quindi una tale e non esiste. L'ipotesi che Z sia ridotto esclude la seconda eventualità in quanto il numero di sottoschemi propri Z' di Z è finito e quindi l'unione degli spazi vettoriali corrispondenti $Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'}, \mathcal{O}_X)$ non può esaurire tutto $Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)$. □

Osservazione 3.2.2. Si vede che è sufficiente verificare la condizione solo per i sottoschemi Z' del tipo $Z \setminus \{x\}$. Infatti preso un sottoschema qualsiasi Z'', esiste $Z' = Z \setminus \{x\}$ tale che $Z'' \subset Z'$ e quindi si può considerare il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'}, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "\phi"] & Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X) \\ Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z''}, \mathcal{O}_X). \arrow[u, "\mu"] \arrow[ur, "\phi'"'] & \end{tikzcd}$$

Nel caso in cui Z' verifica la condizione del corollario abbiamo che ϕ ha come immagine un sottospazio proprio di $Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)$ e questo è vero anche per ϕ' perché è data dalla composizione di μ e ϕ.

La costruzione di Serre illustrata in questo paragrafo definisce una relazione tra i sottoschemi di X di dimensione zero e i fasci localmente liberi di rango 2 su X. Tale relazione è detta ***corrispondenza di Serre***.

3.3 Il teorema di Cayley-Bacharach per i fibrati

Prima di procedere con la dimostrazione del teorema di Cayley-Bacharach(3.1.1) richiamiamo due importanti risultati ([14] p.235,[12] p. 16):

Teorema 3.3.1. *Sia $\mathcal{L}$ un fascio localmente libero di rango finito e $\mathcal{L}^\vee$ il suo duale. Allora per ogni $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ fasci di $\mathcal{O}_X-$moduli abbiamo:*

$$Ext^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) \cong Ext^i(\mathcal{F}, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{G}).$$

Teorema 3.3.2 (Dualità di Serre-Grothendieck)**.** *Se $\mathcal{G}$ è un fascio coerente su X allora c'è un isomorfismo naturale $Ext^1(\mathcal{G}, K_X) \to H^1(X, \mathcal{G})^\vee$.*

Dimostrazione. (Teorema di Cayley-Bacharach per fibrati)
Come abbiamo già osservato precedentemente, un fibrato E di rango 2 con le caratteristiche richieste esiste solo se tra le estensioni di $L \otimes \mathcal{I}_Z$ per $\mathcal{O}_X$ ve ne è una il cui fascio corrispondente $\mathcal{F}^e$ è localmente libero e si può vedere che questa condizione è anche necessaria. Per il corollario 3.2.10 questo accade se e solo se per ogni sottoschema $Z' = Z \setminus \{x\}$ si ha che non è suriettiva la seguente mappa

$$Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'}, \mathcal{O}_X) \to Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X). \tag{3.1}$$

Per il teorema (3.3.1) abbiamo i seguenti isomorfismi:

$$Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X) = Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z \otimes K_X, K_X)$$

$$Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'}, \mathcal{O}_X) = Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'} \otimes K_X, K_X).$$

Applicando ora il teorema di dualità (3.3.2) abbiamo che alla non suriettività della mappa (3.1) corrisponde la non iniettività di

$$H^1(X, L \otimes \mathcal{I}_Z \otimes K_X) \to H^1(X, L \otimes \mathcal{I}_{Z'} \otimes K_X) \tag{3.2}$$

per ogni $x \in X$.
Tale mappa si trova nella successione lunga di coomologia associata alla seguente successione esatta corta:

$$0 \to L \otimes \mathcal{I}_Z \otimes K_X \xrightarrow{f} L \otimes \mathcal{I}_{Z'} \otimes K_X \xrightarrow{g} L \otimes \mathcal{O}_x \otimes K_X \to 0.$$

Infatti abbiamo:

$$\cdots \longrightarrow H^0(X, L \otimes \mathcal{I}_Z \otimes K_X) \xrightarrow{f_0^*} H^0(X, L \otimes \mathcal{I}_{Z'} \otimes K_X) \xrightarrow{g_0^*} H^0(X, L \otimes \mathcal{O}_x \otimes K_X) \xrightarrow{d^*} H^1(X, L \otimes \mathcal{I}_Z \otimes K_X) \xrightarrow{f_1^*} H^1(X, L \otimes \mathcal{I}_{Z'} \otimes K_X) \longrightarrow \cdots$$

dove d^* è il morfismo di connessione e $\mathcal{O}_x$ è il fascio quoziente $\mathcal{I}_{Z'}/\mathcal{I}_Z$.
Da (3.2) segue che f_1^* non è iniettiva e quindi d^* non è identicamente zero. Inoltre $H^0(X, L \otimes \mathcal{O}_x \otimes K_X) \cong \mathbb{C}$ e dunque $d^*(\mathbb{C})$ è uno spazio di dimensione 1. Da questo si ricava che d^* è iniettiva e g_0^* è la mappa nulla, da cui abbiamo che $H^0(X, L \otimes \mathcal{I}_Z \otimes K_X)$ e $H^0(X, L \otimes \mathcal{I}_{Z'} \otimes K_X)$ sono isomorfi.
Per concludere osserviamo che una sezione $s \in H^0(X, L \otimes K_X)$ che si annulla in Z' è contenuta in $H^0(X, L \otimes \mathcal{I}_{Z'} \otimes K_X)$ il quale è isomorfo a $H^0(X, L \otimes \mathcal{I}_Z \otimes K_X)$ e quindi s si annulla in tutto Z.

□

Capitolo 4

Ulteriori considerazioni in $\mathbb{P}^2$

In questo capitolo consideriamo il caso in cui $X = \mathbb{P}^2$. Nella prima parte vediamo se esiste una relazione tra la proprietà di Cayley-Bacharach e le intersezioni complete. In seguito ci concentriamo su un aspetto più algebrico guardando alla matrice di Hilbert-Burch associata a un sistema di punti di $\mathbb{P}^2$, la quale permette di dare una condizione necessaria e sufficiente affinché tali punti siano intersezione completa di due curve. Infine trattiamo i fibrati di rango 2 su $\mathbb{P}^2$ che sono presenti nell'enunciato del teorema di Cayley-Bacharach per fibrati. Ne studiamo le proprietà in alcuni casi particolari.

4.1 La proprietà di C-B e le intersezioni complete

Per prima cosa vogliamo far vedere che un insieme di punti intersezione completa di due curve, considerati nel teorema di Cayley-Bacharach (2.2.2),verificano la proprietà di Cayley-Bacharach rispetto a dei particolari fibrati.
Siano quindi X_1 e X_2 due curve, di grado m e n rispettivamente, e sia $Z = X_1 \cap X_2$. Facciamo vedere che Z soddisfa la proprietà C-B rispetto al fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m+n-3) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m+n) \otimes K_{\mathbb{P}^2}$.
Vogliamo applicare il teorema di Cayley-Bacharach per fibrati (3.1.1) a Z, quindi è necessario trovare un fibrato E di rango 2 e una sua sezione globale s tale che $Z = Z(s)$ e $\det E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m+n)$.
A questo punto consideriamo il fibrato $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$ e la sua sezione $s = (s_1, s_2)$ con s_1 polinomio omogeneo che definisce X_1 e s_2 polinomio

omogeneo che definisce X_2. Vediamo che det $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m+n)$ e $Z(s) = Z$, in quanto Z è il luogo dei punti dove si annullano entrambi i polinomi.
Da questo ricaviamo il seguente risultato:

Lemma 4.1.1. *Condizione necessaria affinché un sistema di* d *punti Z sia intersezione completa è che esistano due interi* m *e* n *tali che* d=mn *e Z soddisfi la proprietà di Cayley-Bacharach (3.1.1) per il fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m+n-3)$.*

Viene naturale chiedersi se la condizione data è anche sufficiente per dimostrare se un insieme di punti sia intersezione completa di due curve. La risposta è no e il seguente controesempio lo dimostra:

Esempio 4.1.1 (Controesempio)**.** Si consideri un insieme Z costituito da $d = 9$ punti su una conica C irriducibile. Se scegliamo $m = n = 3$ abbiamo che $mn = 9 = d$. Inoltre Z soddisfa la proprietà di Cayley-Bacharach per il fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3+3-3) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(6) \otimes K_{\mathbb{P}^2}$ perché ogni cubica che contiene 8 di tali punti contiene anche il nono (per il teorema di Bézout essa contiene tutta la conica). D'altra parte Z non è intersezione completa di due cubiche perché due cubiche che si intersecano in quei nove punti contengono, sempre per Bézout, tutta la conica quindi non hanno intersezione completa.

Deduciamo che la proprietà di C-B è necessaria ma non sufficiente perché un gruppo di mn punti Z sia intersezione completa. Dunque tale condizione non risulta essere tanto utile per verificare se Z è intersezione completa ma, come vedremo nell'ultima parte del capitolo, è interessante soprattutto in relazione all'esistenza di particolari fibrati vettoriali.

4.2 Matrici associate a punti di $\mathbb{P}^2$

Al fine di affrontare la questione dell'intersezione completa e trovare un condizione necessaria e sufficiente applichiamo ora il teorema di Hilbert-Burch per trovare la matrice della risoluzione dell'ideale $I = I(Z)$. In particolare calcoliamo i gradi dei polinomi che costituiscono le entrate della matrice in quanto essi costituiscono degli invarianti per Z. Per utilizzare Hilbert-Burch è utile richiamare la seguente proposizione([3]pp.32 e seguenti):

Proposizione 4.2.1. *L'ideale omogeneo I di un insieme finito di punti Z di $\mathbb{P}^2$ ammette una risoluzione libera di lunghezza 1.*

Notazione 4.2.1. *L'ideale omogeneo $I(Z)$ è l'ideale dei polinomi omogenei che si annullano in Z.*

Dimostrazione. Utilizziamo la formula di Auslander-Buchsbaum per anelli graduati(1.3.11) con $S = K[x_0, x_1, x_2]$, anello dei polinomi su un campo K, e S/I il suo quoziente. Abbiamo che:

$$pd\ S/I = depth(S_+,S)\text{-}depth(S_+,S/I)$$

dove S_+ è l'ideale massimale omogeneo (x_0, x_1, x_2).
D'altra parte $dim\ S/I = 1$. Infatti gli ideali primi di S/I sono gli ideali primi che contengono I e corrispondono ai chiusi irriducibili contenuti in Z i quali sono costituiti dai singoli punti. Dunque le catene di primi contengono un solo ideale primo ed hanno lunghezza 1.
Inoltre $depth\ S/I\ \leq dim\ S/I$ perché

$$depth\ S/I \geq dim\ S - grado\ I \geq 3 + dim\ S/I - dim\ S = 3 + dim\ S/I - 3 = dim\ S/I$$

in cui la seconda disuguaglianza discende dal fatto che per (1.3.1)

$$grado\ I \geq codim\ I = dim\ S - dim\ S/I.$$

Da quanto appena detto e da $dim\ S/I = 1$ segue che $depth\ S/I \leq 1$.
Osserviamo ora che l'ideale I è intersezione degli ideali primi dei singoli punti di Z cioè $I = \bigcap_{i=1} P_i$, quindi gli unici primi associati a I sono i P_i. Poiché nessuno di essi è l'ideale omogeneo massimale S_+ abbiamo che esiste un elemento di S_+ che non è uno zero divisore di S/I e dunque $depth\ S/I > 0$.
Da questo segue che $depth\ S/I > 0$ quindi $depthS/I = 1$ e

$$pd\ S/I = 3 - 1 = 2.$$

Consideriamo ora una risoluzione di S/I del seguente tipo:

$$0 \to E \to F \to S \to S/I \to 0.$$

Dall'esattezza dei morfismi ricaviamo che $\mathrm{Im}(F \to S) = \ker(S \to S/I) = I$ e quindi possiamo ricavare una risoluzione di lunghezza 1 per I:

$$0 \to E \to F \to I \to 0.$$

$\square$

Prima di utilizzare Hilbert-Burch abbiamo bisogno del concetto di risoluzione minimale:

Definizione 4.2.1. *Un risoluzione libera di un $S-$modulo graduato L*

$$0 \to F_n \xrightarrow{\delta_n} \cdots \xrightarrow{\delta_i} F_{i-1} \to \cdots \xrightarrow{\delta_1} F_0 \xrightarrow{\delta_0} L \to 0$$

si dice **minimale** *se* $\mathrm{Im}(\delta_i)$ *è contenuta in* S_+F_{i-1}.

Si può dimostrare che le risoluzioni minimali esistono e sono uniche a meno di isomorfismo. Un modo per costruire una tale risoluzione è il seguente: si consideri il modulo graduato e finitamente generato L e sia $\{m_1, ..., m_k\}$ un insieme minimale di generatori omogenei . Possiamo costruire un morfismo dal modulo libero F_0 generato da $\{m_1, ..., m_k\}$ a L mandando i generatori di F_0 nei generatori di L. Se il nucleo di questo morfismo è un modulo libero allora ho ottenuto una risoluzione libera minimale:

$$0 \to Ker\ \phi \to F_0 \xrightarrow{\phi} L \to 0$$

se invece $Ker\ \phi$ non è libero applico su di esso lo stesso ragionamento fatto su L e così via.
Inoltre vale il lemma:

Lemma 4.2.2. *Se L è un $S-$modulo finitamente generato e graduato allora la dimensione proiettiva di L è uguale alla lunghezza di una risoluzione libera minimale.*

Possiamo ora applicare Hilbert-Burch(1.3.12) per ottenere il seguente risultato:

Corollario 4.2.3. *Per ogni insieme finito di punti $Z \subset \mathbb{P}^2$ esiste una matrice M $k+1 \times k$ tale che $I = I(Z)$ sia generato dai minori di ordine k della matrice M.*

Il precedente corollario ha un'importante conseguenza:

Lemma 4.2.4. *Sia Z un insieme finito di punti di $\mathbb{P}^2$. Allora Z è intersezione completa se e solo se la matrice M della risoluzione minimale di $I(Z)$ è 2×1.*

Dimostrazione. Se Z è un insieme finito di punti di $\mathbb{P}^2$ allora esiste una risoluzione minimale di lunghezza 1 di $I(Z)$ per (4.2.3) e (4.2.2). Inoltre associata alla risoluzione vi è una matrice M che è $k + 1 \times k$ ed è tale che i generatori minimali di $I(Z)$ sono multipli dei k determinanti delle sottomatrici ottenute togliendo a M la $i-$esima riga, per $i = 1, ..., k + 1$.
Ne deduciamo che Z è intersezione completa di due curve se e solo se M è 2×1, perché questo accade se e solo se $I(Z)$ ha due generatori minimali. □

Il lemma fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché Z sia intersezione completa. Resta da capire come calcolare la matrice M nel caso in cui non si conosca una risoluzione di $I(Z)$. Denotiamo $I(Z)$ con I e consideriamo una risoluzione libera graduata minimale di S/I ottenuta da una risoluzione minimale di I:

$$0 \to F \to G \to S \to S/I \to 0.$$

La risoluzione ha lunghezza 2 per (4.2.1) e per (4.2.2) F e G hanno rispettivamente rango t e $t + 1$, dunque M è una matrice $t + 1 \times t$. Scriviamo

$$G = \bigoplus_{1}^{t+1} S(-a_i) \text{ e } F = \bigoplus_{1}^{t} S(-b_i)$$

dove $S(-a)$ con $a \in \mathbb{Z}$ indica il modulo libero di rango 1 con generatore di grado a. Per il teorema di Hilbert-Burch i gradi dei generatori minimali di I sono gli interi a_i quindi l'entrata (i, j) della matrice M ha grado $b_j - a_i$.
Poniamo attenzione ai gradi delle entrate (i, i) e $(i+1, i)$ che sono le entrate delle due diagonali principali. Indichiamo $e_i = b_i - a_i$ e $f_i = b_i - a_{i+1}$ e assumiamo che $a_1 \geq a_2... \geq a_{t+1}$ e $b_1 \geq b_2... \geq b_t$. Notiamo che a_i, b_i, e_i e f_i sono invarianti di Z perché le risoluzioni minimali sono uniche a meno di isomorfismo.
Enunciamo senza dimostrare il seguente risultato:

Proposizione 4.2.5. *Sia*

$$\boldsymbol{F} : 0 \to \bigoplus_{1}^{t} S(-b_i) \xrightarrow{M} \sum_{1}^{t+1} S(-a_i) \to S$$

una risoluzione libera graduata e minimale di S/I *e siano* a_i *e* b_i *ordinati come sopra. Allora :*

1. $e_i \geq 1$ *e* $f_i \geq 1$*;*

2. $a_i = \sum_{j<i} e_j + \sum_{j \geq i} f_j$

3. $b_i = a_i + e_i$ *e per ogni* $i = 1, ..., t$ *si ha che* $\sum_1^t b_i = \sum_1^{t+1} a_i$

4. $f_i \geq e_i,\ f_i \geq e_{i+1}$.

Abbiamo ora tutti gli strumenti per calcolare in alcuni casi le dimensioni e i gradi della matrice M e quindi capire se Z è intersezione completa. Iniziamo con un esempio in cui vale la proprietà C-B ma i punti non sono intersezione completa.

Esempio 4.2.1. (Sei punti in posizione generale, *si veda la definizione 4.3.4*) Consideriamo l'insieme Z costituito da 6 punti in posizione generale. Per definizione abbiamo che i 6 punti non sono allineati e nessuna conica non nulla passa per tutto Z(le coniche contengono al più 5 punti di Z per (ii) di 4.3.4). D'altra parte esiste sicuramente una cubica non identicamente zero che contiene Z perché lo spazio di tali curve ha dimensione 10. Abbiamo quindi che $a_{t+1} = 3$. Dal fatto che $a_{t+1} = e_1 + ... + e_t$ segue che possiamo avere tre casi:

- $t = 1$ e $e_1 = 3$, quindi abbiamo che la matrice è 2×1 cioè Z è intersezione completa di una cubica e una conica, ma questo non è possibile perché abbiamo detto che una conica non può contenere tutti i punti di Z;

- $t = 2$ e $e_1 = 1$, $e_2 = 2$ o viceversa, allora Z non è intersezione completa perché la matrice è 3×2;

- $t = 3$ e $e_1 = e_2 = e_3 = 1$ allora la matrice è 4×3 e quindi Z non è intersezione completa.

Osserviamo che la condizione necessaria data dal lemma (4.1.1) è verificata. Infatti se $m = 2$ e $n = 3$ abbiamo che C-B è soddisfatta per $m + n - 3 = 2$ in quanto $t_n = 2$ e C-B vale per $t_n + 2 = 4$ e dunque per 2. Nonostante ciò usando il lemma (4.2.4) abbiamo visto che Z non è intersezione completa.

Diamo un altro esempio in cui calcoliamo le dimensioni di M e vediamo se dei punti in $\mathbb{P}^2$ sono intersezione completa.

Esempio 4.2.2. (Punti su una conica irriducibile)
Sia $Z \subset \mathbb{P}^2$ un insieme finito di n punti non allineati ma che giacciono su una conica definita da un polinomio di secondo grado omogeneo $q(x_0, x_1, x_2)$. Con le notazioni della proposizione precedente abbiamo che $a_{t+1} = 2$ perché a_{t+1} è il grado più basso di un generatore di $I = I(Z)$. Utilizzando il punto 2 si ha che $a_{t+1} = \sum_1^t e_i = 2$ quindi o $t = 1$ ed $e_1 = 2$ oppure $t = 2$ ed $e_1 = e_2 = 1$. Distinguiamo i due casi:

$t = 1$ Z è intersezione completa di una conica e una curva di grado $a_1 = d$ per qualche intero d. Per Bézout abbiamo che $n = 2d$ e la matrice ha la seguente forma(indichiamo solo i gradi delle entrate):

$$M = \begin{pmatrix} 2 \\ d \end{pmatrix}.$$

$t = 2$ Si ha che $a_3 = 2$, $e_1 = e_2 = 1$ e $f_1 \geq 1$ e $f_2 \geq 1$. Supponiamo che la conica su cui per ipotesi giacciono i punti si riferisca ad a_3. Dal teorema di Hilbert-Burch abbiamo che il polinomio $q(x_0, x_1, x_2)$ è multiplo del determinante della sottomatrice M' 2×2 costituita dalla prime due righe di M. Poiché q è irriducibile si ha che le quattro entrate di M' sono tutte diverse da zero. L'entrata $(1, 2)$ ha grado $b_2 - a_1 = e_2 + a_2 - f_1 - f_2 = e_2 + e_1 + f_2 - f_1 - f_2 = e_1 + e_2 - f_1 \leq 1$, più precisamente $e_1 + e_2 - f_1 = 1$ perché se fosse 0 allora per la minimalità della risoluzione libera dovremmo avere la costante nulla e questo non è possibile perché q è irriducibile. Da questo ricaviamo che $f_1 = 1$, $a_1 = a_2 = 1 + f_2$ e $b_2 = b_1 = 2 + f_2$, abbiamo quindi la seguente matrice(sono indicati i gradi):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ f_2 & f_2 \end{pmatrix}.$$

Quindi Z non è intersezione completa ma è intersezione di una conica con due curve di grado $f_2 + 1$.

4.3 Esempi di fibrati di rango 2

Il teorema di Cayley-Bacharach per fibrati si può interpretare come una condizione necessaria e sufficiente affinché esistano fibrati di rango 2 di un particolare tipo. Lo scopo di questo paragrafo è di studiare le caratteristiche di tali fibrati in alcuni casi particolari. Per maggiori dettagli si veda [11].

Definizione 4.3.1. *Un fibrato E di rango 2 su $\mathbb{P}^2$ si dice* **associato** *a un insieme di punti Z se esiste una sezione $s \in H^0(\mathbb{P}^2, E)$ tale che $Z(s) = Z$. Inoltre dato L fibrato lineare, l'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati associati a Z e di determinante L si denota con $\mathbb{E}(L, Z)$.*

Notiamo subito che i fibrati presenti nel teorema di Cayley-Bacharach sono proprio quelli che appartengono a $\mathbb{E}(L, Z)$, in particolare il teorema fornisce una condizione per cui $\mathbb{E}(L, Z)$ sia non vuoto.
Per prima cosa caratterizziamo gli elementi di $\mathbb{E}(L, Z)$ tramite le *classi di Chern.*

Un fibrato lineare L è del tipo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a)$ e dunque possiamo indicare $\mathbb{E}(\mathcal{O}(a), Z)$ con $\mathbb{E}(a, Z)$. Abbiamo quindi le seguenti definizioni:

Definizione 4.3.2. *La* **prima classe di Chern** *del fibrato E si indica con c_1 ed è un intero tale che* $\det E = \mathcal{O}(c_1)$.

Definizione 4.3.3. *La* **seconda classe di Chern** *di E si indica con c_2 ed è un intero tale che $c_2 = h^0(\mathbb{P}^2, O_{\mathbb{P}^2}|_Z)$.*

Se indichiamo con n il numero di punti in Z abbiamo:

$$E \in \mathbb{E}(a, Z) \text{ se e solo se } c_1(E) = a \text{ e } c_2(E) = n.$$

Proposizione 4.3.1. *L'insieme $\mathbb{E}(a, Z)$ è diverso dal vuoto se e solo se Z soddisfa la proprietà di Cayley-Bacharach rispetto al fibrato $\mathcal{O}(a) \otimes K_{\mathbb{P}^2}$.*

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dal teorema di Cayley-Bacharach per fibrati (3.1.1). □

Dalla definizione di proprietà di C-B discende che se un insieme di punti Z soddisfa C-B per il fibrato $O_{\mathbb{P}^2}(a) \otimes K_{\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a-3)$ allora, , per ogni $p \in Z$, ogni curva di grado minore o uguale ad $a-3$ che contiene $Z \setminus \{p\}$ contiene Z. Consideriamo ora il massimo di questi interi a cioè introduciamo la seguente notazione:

Notazione 4.3.1. *Sia $Z = \{z_1, \cdots, z_n\}$. Denotiamo con a_Z il più grande intero a tale che per ogni i, $1 \leq i \leq n$, tutte le curve di grado $a-3$ che contengono $Z \setminus \{z_i\}$ contengono anche z_i.*

Corollario 4.3.2. *L'insieme $\mathbb{E}(a, Z)$ è non vuoto se e solo se $a \leq a_Z$.*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente $\mathbb{E}(a, Z)$ è non vuoto se e solo se Z soddisfa C-B per il fibrato $\mathcal{O}(a)_{\mathbb{P}^2} \otimes K_{\mathbb{P}^2}$. Per quanto osservato sopra questo significa che, per ogni $p \in Z$, ogni curva di grado minore o uguale ad $a-3$ che contiene $Z \setminus \{p\}$ contiene Z e questo accade se e solo se $a \leq a_Z$ per definizione di a_Z. □

Cerchiamo di dare un limite superiore e un limite inferiore per a_Z.

Lemma 4.3.3. *Se $n \geq 2$ allora $3 \leq a_Z \leq n+1$. Inoltre $a_Z = 3$ se e solo se $n-1$ punti sono allineati e $a_Z = n+1$ se e solo se tutti i punti sono allineati.*

Dimostrazione. Per prima cosa osserviamo che $a_Z - 3 \geq 0$ e quindi $a_Z \geq 3$ perché una costante che si annulla in almeno un punto è a fortiori zero e quindi si annulla in qualsiasi altro punto.
D'altra parte le curve di grado $n+2-3 = n-1$ sicuramente non hanno la proprietà richiesta, infatti basta prendere l'unione di $n-1$ rette ognuna che contiene un unico punto di $Z - \{z_i\}$ e otteniamo una curva di grado $n-1$ che non contiene z_i. Quindi $3 \leq a_Z \leq n+1$.
Inoltre abbiamo che $a_Z = 3$ se e solo se ogni retta che contiene $n-1$ di tali

punti non contiene l'n-esimo, cioè esattamente $n-1$ punti sono allineati. Facciamo vedere ora che $a_Z = n+1$ se e solo se tutti i punti sono allineati.

- Se gli n punti sono allineati allora le curve di grado $n-2$ che contengono $n-1$ di tali punti contengono anche l'n-esimo. Sia r la retta che contiene tutto Z. Una curva di grado $n-2$ che contiene $n-1$ punti interseca r proprio in questi $n-1$ punti e quindi per Bézout la retta è una componente irriducibile della curva che quindi contiene tutto Z. Abbiamo quindi che $a_Z - 3 = n-2$ cioè $a_Z = n+1$.

- Supponiamo che $a_Z = n+1$. Indichiamo con k il numero dei punti allineati e mostriamo che $k = n$. Se $k < n$ indichiamo con r la retta per questi k punti e abbiamo per ipotesi che qualsiasi curva di grado $n-2$ che contiene $n-1$ punti contiene Z. Se prendiamo l'unione di r con una curva di grado $n-2$ che contiene $n-1$ punti tra cui i k punti allineati otteniamo una curva di grado $n-1$ che passa per $n-1$ punti ma anche per l'n-esimo punto per l'ipotesi su a_Z. Questo non è possibile perché vorrebbe dire che $a_Z \geq n+2$, quindi l'unico modo è che $k = n$.

$\square$

4.3.1 Coomologia dei fibrati

Passiamo ora alla coomologia dei fibrati in $\mathbb{E}(a, Z)$.
Sia $E \in \mathbb{E}(a, Z)$ allora consideriamo la successione esatta associata ad una sezione s di E che si annulla in Z:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{s} E \longrightarrow \mathcal{I}_Z(a) \longrightarrow 0.$$

Da $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(t)) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{Z}$ e $H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(t)) = 0$ per $t \geq -2$, passando alla successione lunga di coomologia, segue che

$$h^0(\mathbb{P}^2, E(t)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(t)) + h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(a+t)) \text{ per ogni } t \in \mathbb{Z},$$

mentre

$$h^1(\mathbb{P}^2, E(t)) = h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(a+t)) \text{ per ogni } t \geq -2.$$

Per calcolare $h^0(\mathbb{P}^2, E(t))$ e $h^1(\mathbb{P}^2, E(t))$ è dunque necessario calcolare $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(a+t))$ e $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(a+t))$.

Osservazione 4.3.1. Sia n il numero di punti di Z allora per qualsiasi intero d vale la seguente disuguaglianza:

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) \geq \max\{0, (\frac{(d+1)(d+2)}{2} - n)\}$$

dove $(\frac{(d+1)(d+2)}{2} - n)$ è la differenza tra la dimensione delle curve di grado d e la cardinalità di Z mentre $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d))$ è la dimensione delle curve di grado d che contengono Z.

Dimostrazione. Se $n \geq \frac{(d+1)(d+2)}{2}$ allora la disuguaglianza è banale. Supponiamo quindi che $n < \frac{(d+1)(d+2)}{2}$. Nel caso in cui i punti impongono condizioni indipendenti si ha un'uguaglianza. Nel caso contrario le condizioni imposte, $h_Z(d)$, sono meno di n quindi $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - h_Z(d) \geq \frac{(d+1)(d+2)}{2} - n$. □

Nel caso in cui la (4.3.1) sia un'uguaglianza il calcolo di $h^0(\mathbb{P}^2, E(t))$ e $h^1(\mathbb{P}^2, E(t))$ è immediato. Un esempio di punti con questa proprietà è dato dai punti in *posizione generale* che analizziamo nel prossimo paragrafo.

Punti in posizione generale

Indichiamo con t_n il più piccolo intero tale che

$$\frac{(t+1)(t+2)}{2} \geq n.$$

Definizione 4.3.4. *Un insieme di n punti Z si dice in posizione generale quando sono verificate le due condizioni seguenti:*

(i) per ogni intero p, tutte le curve di grado p contengono al più $\frac{(p+1)(p+2)}{2} - 1$ punti di Z;

(ii) per ogni $z \in Z$ esiste una curva C di grado t_n tale che $C \cap Z = Z \setminus \{z\}$.

Osservazione 4.3.2. Se i punti sono in posizione generale allora la proprietà di C-B vale per $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(t_n - 1)$ e non per $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(t_n)$ quindi $a_Z = t_n + 2$. Infatti per (ii) esiste una curva di grado t_n che contiene esattamente $Z \setminus \{p\}$ quindi C-B non vale per $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(t_n)$. D'altra parte ogni curva di grado $t_n - 1$ che contiene $n-1$ punti deve essere identicamente 0 per (i) e quindi contiene tutto Z.

Enunciamo senza dimostrazione il seguente lemma:

Lemma 4.3.4. *Se Z è in posizione generale allora anche ogni sottoinsieme $Z' \subset Z$ è in posizione generale.*

Proposizione 4.3.5. *Un insieme Z è in posizione generale se e solo se per ogni d e ogni $Z' \subset Z$ (4.3.1) è un' uguaglianza. Ossia i punti in posizione generale impongono condizioni indipendenti a tutte le curve di grado d tali che $\frac{(d+1)(d+2)}{2} > n$*

Dimostrazione. Supponiamo che (4.3.1) sia un'uguaglianza e facciamo vedere che Z è in posizione generale. Dobbiamo far vedere che sono verificate (i) e (ii) della definizione (4.3.4).
Per quanto riguarda (i) abbiamo che preso un sottoinsieme Z' di Z con $m = \frac{(p+1)(p+2)}{2} - 1 + k$ con $k \geq 1$ punti di Z allora:

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(t_n)) = \max\{0, \frac{(p+1)(p+2)}{2} - m = 1 - k\} = 0$$

cioè non esistono curve di grado p che contengono più di $\frac{(p+1)(p+2)}{2} - 1$ punti di Z.
Anche la proprietà (ii) è soddisfatta. Per (i) le curve di grado t_n contengono al più $n-1$ punti di Z. Inoltre essendo vera l'uguaglianza(4.3.1), abbiamo che

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z\setminus\{z\}}(t_n)) = \frac{(t_n+1)(t_n+2)}{2} - (n-1) > 0$$

poiché $\frac{(t_n+1)(t_n)+2}{2} \geq n$. Quindi lo spazio delle curve di grado t_n che contengono $Z \setminus \{z\}$ non è vuoto e dunque esiste una curva con la proprietà richiesta.
Viceversa assumiamo che Z sia in posizione generale. Per il lemma precedente basterà dimostrare che vale l'uguaglianza per Z e da questo seguirà che vale anche per qualsiasi suo sottoinsieme.
Fissato d, proviamo la tesi per induzione sul numero di punti n. Se $n = 1$ allora il risultato è banalmente vero. Supponiamo che l'uguaglianza sia verificata per $Z' = \{z_1, ..., z_{n-1}\}$. Allora abbiamo la seguente catena di disuguaglianze:

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2} - n \leq h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) \leq h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(d)) = \max\{0, \frac{(d+1)(d+2)}{2} - n + 1\}$$

dove la seconda disuguaglianza dipende dal fatto che $\mathcal{I}_Z(d) \subset \mathcal{I}_{Z'}(d)$.
Nel caso in cui $n \geq \frac{(d+1)(d+2)}{2} + 1$ allora $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) = 0$ e abbiamo finito.
Se invece $n \leq \frac{(d+1)(d+2)}{2}$ allora

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2} - n \leq h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) \leq h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(d)) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - n + 1.$$

Mostriamo ora che $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) \neq h^0(\mathcal{I}_{Z'}(d))$ in modo da ottenere l'uguaglianza. Abbiamo che $d \geq t_n$ perché $\frac{(d+1)(d+2)}{2} \geq n$ e t_n è il più piccolo intero con questa proprietà. Inoltre esiste una curva di grado t_n, quindi anche di grado d, che contiene Z' ma non Z dunque $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) \neq h^0(\mathcal{I}_{Z'}(d))$. □

Corollario 4.3.6. *Sia Z un insieme di n punti in posizione generale. Allora per ogni intero d si ha che $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) = \max\{0, n - \frac{(d+1)(d+2)}{2}\}$.*

Dimostrazione. Consideriamo la successione esatta corta $0 \to \mathcal{I}_Z(d) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d) \xrightarrow{g} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}_Z(d) \to 0$. Passando alla coomologia abbiamo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) \arrow[r, "f^*"] & H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) \arrow[r, "g^*"] & H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}_Z(d)) \arrow[dll, "d^*"] . \\ & H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) \arrow[r] & H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}_Z(d)) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Per prima cosa osserviamo che $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) = 0$ e quindi,essendo la successione esatta, si ha che:

$$h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}_Z(d)) - dim(Ker(d^*)) =$$

$$= h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}_Z(d)) - dim(Im(g^*)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}_Z(d)) - (h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) - dim(Ker(g^*))) =$$
$$= h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}_Z(d)) - [h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) + dim(Im(f^*)] = n - \frac{(d+1)(d+2)}{2} + h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) =$$

$$= n - \frac{(d+1)(d+2)}{2} + \max\{0, \frac{(d+1)(d+2)}{2} - n\} = \max\{0, n - \frac{(d+1)(d+2)}{2}\}$$

dove l'ultima uguaglianza è vera per la proposizione precedente.

□

I risultati dimostrati finora ci permettono di provare l'esistenza di insiemi di punti in posizione generale.

Proposizione 4.3.7. *Per ogni intero n esiste un insieme Z di n punti in posizione generale.*

Dimostrazione. Utilizziamo l'induzione su n. Se $n = 1$ allora abbiamo subito che Z è in posizione generale. Supponiamo che sia vero per n e quindi esista $Z = \{z_1, \cdots, z_n\}$in posizione generale.
Cerchiamo condizioni su $z \notin Z$ per cui $Z \cup \{z\}$ sia in posizione generale. Dalla proposizione precedente abbiamo che per ogni sottoinsieme Z' di Z costituito da $\frac{(p+1)(p+2)}{2} - 1$ punti esiste una sola curva di grado p che li contiene. Infatti $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(p)) = \max\{0, \frac{(p+1)(p+2)}{2} - \frac{(p+1)(p+2)}{2} + 1\} = 1$. La condizione che imponiamo su z è quindi:

(C1) z non appartiene all'unione finita delle curve di grado p che contengono un qualsiasi Z'.

In questo modo la proprietà (i) della definizione (4.3.4) è verificata da $Z \cup \{z\}$.
D'altra parte $\frac{(t_{n+1}+1)(t_{n+1}+2)}{2} \geq n + 1$ e quindi ogni curva di grado t_{n+1} contiene per (i) al più n punti. Possiamo scegliere una curva γ di grado t_{n+1} che non contiene z e imporre una seconda condizione su z :

(C2) z non appartiene a γ.

Da qui segue che $Z \cup \{z\}$ verifica la proprietà (ii) per z. Mostriamo che vale anche per $z_1, ..., z_n$. Abbiamo che applicando (ii) a Z nel punto z_i, esiste una curva di γ_i di grado t_n che contiene $Z \setminus \{z_i\}$. Se indichiamo sempre con γ e γ_i le equazioni delle due curve corrispondenti abbiamo che $\gamma_i(z)\gamma - \gamma(z)\gamma_i$ è l'equazione di una curva di grado t_n che contiene $(Z \setminus \{z_i\}) \cup \{z\}$. Per avere una curva di grado t_{n+1} basterà moltiplicarla per una retta qualsiasi che contiene z e non z_i. $\square$

Possiamo ora calcolare $h^0(\mathbb{P}^2, E(t))$ e $h^1(\mathbb{P}^2, E(t))$ nel caso di $E \in \mathbb{E}(a, Z)$ con $a \leq a_Y = t_n + 2$ e Z insieme di punti in posizione generale, infatti abbiamo che:

$$h^0(\mathbb{P}^2, E(t)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(t)) + \max\{0, (\frac{(a+t+1)(a+t+2)}{2} - n)\} \text{ per ogni } t \in \mathbb{Z}$$

$$h^1(\mathbb{P}^2, E(t)) = \max\{0, n - \frac{(a+t+1)(a+t+2)}{2}\} \text{ per ogni } t \geq -2.$$

Bibliografia

[1] D.A.Buchsbaum. Lectures on regular local rings. *Category Theory,Homology Theory and their Application (Battelle Institute Conference, Seattle, Wash.(1968))*, I:13–32, 1969.

[2] D.Eisenbud. *Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry*. Springer-Verlag, 1995.

[3] D.Eisenbud. *The geometry of Syzygies*, pages 32–47. Springer, 2005.

[4] P.Griffiths e J.Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley Classics Library, 1994.

[5] Q.Ren e J.Richter-Gebert e B.Sturmfels. Cayley-bacharach formulas, arxiv:1405.6438 [math.ag]. 2014.

[6] J.G.Semple e L.Roth. *Introduction to algebraic geometry*, pages 94–100. Clarendon Press, 1949.

[7] D.Einsenbud e M.Green e J.Harris. Cayley-bacharach theorem and conjectures. *Bull. AMS*, 33:295–310, 1996.

[8] C.Okonek e M.Schneider e H.Spindler. *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*. Modern Birkhäuser Classics, 1988.

[9] E.Davis e P.Maroscia. Complete intersections in $\mathbb{P}^2$. cayley-bacharach characterization. *Lecture Notes in Mathematics*, 1902:253–269, 1984.

[10] I.R.Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1977.

[11] J.Brun. Les fibrés de rang deux sur $\mathbb{P}^2$ et leurs sections. *Bull. Soc. Math. France*, 107:457–473, 1979.

[12] R. Lazarsfeld. Lectures on linear series. *IAS/Park City Math. Ser., 3, Complex algebraic geometry AMS*, 107:161–219, 1997.

[13] M.Chasles. *Traité des sections coniques*. Gauthier-Villars, Paris, 1885.

[14] R.Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1977.

[15] S.MacLane. *Homology*, pages 63–72. Springer, 1995.