



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Specialistica in Matematica

presentata da

Paola Stolfi

## **Superfici Algebriche Razionali**

Relatore

Prof. Edoardo Sernesi

Il Candidato

Il Relatore

Anno Accademico 2010-2011

Luglio 2011

Parole chiave: Trasformazioni monoidali, Trasformazioni cremoniane, Superfici di Del Pezzo, Superfici rigate.

Classificazione AMS:14E05,14J26.

## **Ringraziamenti**

La persona che desidero vivamente ringraziare per aver reso possibile il presente lavoro è il mio relatore, il Professor Edoardo Sernesi. Grazie al suo aiuto e alla sua costante guida e disponibilità, ho avuto la possibilità di conoscere e approfondire svariati argomenti, reperire materiale ed organizzare l'intero progetto di tesi.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Teoria dell'intersezione sulle superfici</b>	<b>7</b>
1.1 Notazioni e terminologia . . . . .	7
1.2 Fasci invertibili e divisori . . . . .	8
1.3 Fascio canonico e genere geometrico . . . . .	13
1.4 Geometria sulle superfici . . . . .	14
1.5 Il teorema di Riemann-Roch . . . . .	17
<b>2 Applicazioni sulle superfici</b>	<b>21</b>
2.1 Applicazioni razionali . . . . .	21
2.2 Trasformazioni monoidali . . . . .	22
2.3 Sistemi lineari e applicazioni razionali . . . . .	25
2.4 Risoluzione di applicazioni razionali . . . . .	27
2.5 Trasformazioni cremoniane . . . . .	31
2.5.1 Trasformazioni quadratiche . . . . .	33
2.5.2 Trasformazione di De Jonquières . . . . .	34
<b>3 Superfici di Del Pezzo</b>	<b>39</b>
3.1 Superfici di Del Pezzo . . . . .	39
3.1.1 Modello anticanonico . . . . .	47
3.2 Superfici di Del Pezzo di grado 4 . . . . .	54
3.3 Superfici di Del Pezzo di grado 3 . . . . .	58
3.4 Superfici di Del Pezzo di grado 2 . . . . .	60
3.4.1 Involuzione di Geiser . . . . .	62
3.5 Superfici di Del Pezzo di grado 1 . . . . .	63

3.5.1	Involuzione di Bertini . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Superfici rigate razionali</b>	<b>68</b>
4.1	Superfici rigate razionali . . . . .	68
4.2	Equazioni determinanti delle superfici rigate . . . . .	78
4.3	Esempi . . . . .	83
4.4	La superficie di Veronese . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Criterio di razionalità di Castelnuovo</b>	<b>89</b>
5.1	Criterio di razionalità di Castelnuovo . . . . .	89
	<b>Bibliografia</b>	<b>95</b>

# Introduzione

Questa tesi si propone di passare in rassegna alcune famiglie di esempi classici di superfici algebriche. Per motivi di spazio e per la loro maggiore importanza si è scelto di concentrarsi sulle superfici razionali e su alcune costruzioni geometriche ad esse collegate.

In questo elaborato viene perciò sviluppata una parte della teoria della classificazione delle superfici.

Lo studio delle superfici algebriche e più in generale delle varietà algebriche dal punto di vista degli invarianti birazionali è nato con il matematico italiano Luigi Cremona (1830-1903). Molti dei suoi studi infatti, si concentrarono sulle trasformazioni birazionali del piano e dello spazio, tanto che adesso vengono chiamate trasformazioni cremoniane.

Sebbene i primi esempi di questo tipo di trasformazioni risalgano a Poncelet (1822), a Plücker (1830), e a Steiner (1832), Cremona è stato il primo a formalizzare tale nozione e ad usarla in modo sistematico per lo studio delle varietà algebriche.

Seguendo gli studi di Cremona, Brill e Noether in *Über die algebraische Funktionen und die Anwendung in der Geometrie* (1873), introdussero il nuovo linguaggio geometrico per lo studio delle curve, basato sui sistemi lineari. Grazie a questo nuovo linguaggio, Brill e Noether danno una dimostrazione algebrico-geometrica del teorema di Riemann-Roch. Noether estese questo linguaggio anche alle superfici, considerando perciò sistemi lineari di curve, e definendo anche per le superfici il sistema canonico  $K$ . Nello stesso periodo, Clebsch e Noether raggiunsero i primi risultati riguardanti la teoria delle superfici algebriche. Vennero introdotti gli invarianti birazionali delle superfici, genere geometrico  $p_g$  e genere aritmetico  $p_a$  e dopo aver di-

mostrato che  $p_g \geq p_a$  venne introdotto il numero non negativo  $q = p_g - p_a$ , detto irregolarità .

Noether si addentrò anche nello studio della razionalità delle superfici, cercando criteri generali, infatti nel 1870 enunciò il suo criterio di razionalità che afferma che una superficie è razionale se e solo se contiene un sistema lineare di dimensione positiva di curve razionali.

Gli studi di Noether vennero in seguito raccolti dai matematici italiani di quel periodo, C. Segre, E. Bertini, G. Castelnuovo e F. Enriques. Loro introdussero il *metodo iperspaziale*, fornendo un'interpretazione geometrica dei sistemi lineari di curve su una superficie. Essi passarono dal concetto di curva  $C$  al concetto di sistema lineare di divisori  $|C|$ , definirono il sistema canonico e svilupparono tutta la teoria dell'intersezione, fino ad arrivare alla formula di aggiunzione la quale afferma che per ogni curva della superficie il sistema lineare completo  $|K + C|$  taglia su  $C$  i divisori canonici di  $C$ . Applicando tutta questa nuova teoria, essi arrivarono a dare una dimostrazione del teorema di Riemann-Roch per le superfici.

Castelnuovo ed Enriques contribuirono profondamente con i loro studi alla classificazione delle superfici. Il loro metodo per lo studio delle superfici era basato sull'analisi delle famiglie di curve che appartengono alla superficie; in tale analisi il concetto di sistema lineare ampio risultò di fondamentale importanza. Il genere geometrico venne reinterpretato come il massimo numero di curve canoniche linearmente indipendenti e si definirono altri invarianti birazionali, i plurigeneri  $p_i$ , che equivalgono al massimo numero di curve  $i$ -canoniche linearmente indipendenti. Questi nuovi invarianti risultarono immediatamente di fondamentale importanza nella classificazione delle superfici, in quanto permisero di costruire modelli molto semplici detti modelli minimali, ai quali ogni altra superficie si può ricondurre. Esempi importanti superfici sono quelle studiate dal matematico Pasquale Del Pezzo (1859-1936) in *Sulle superficie dell'ordine  $n$  immerse negli spazi di  $n+1$  dimensioni* (1885) e in *Sulle superficie dell' $n^{\text{mo}}$  ordine immerse nello spazio di  $n$  dimensioni* (1887).

Tutto questo materiale viene raccolto nelle due memorie di Enriques *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche* (1893) e *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (1906). Con tutta questa teoria

a disposizione, Castelnuovo ed Enriques affrontarono in modo moderno la classificazione delle superfici, cioè tramite la distinzione delle classi di equivalenza birazionale delle superfici minimali in base agli invarianti  $p_i$ ,  $p_a$  e  $q$ . Nel 1896 Enriques inviò una lettera a Castelnuovo in cui fornì un controesempio alla congettura di Noether che sosteneva che condizione necessaria e sufficiente affinché una superficie fosse razionale era  $p_g = q = 0$ . Il controesempio che Enriques aveva prodotto era una superficie di grado sei in  $\mathbb{P}^3$  con punti doppi lungo gli spigoli di un tetraedro, per cui era soddisfatta la condizione  $p_g = q = 0$  ma per cui  $p_2 = 1$ , superficie che in seguito verrà chiamata superficie di Enriques.

È proprio lo studio di questa superficie a condurre Castelnuovo alla dimostrazione del suo criterio di razionalità secondo il quale una superficie è razionale se e solo se  $q = p_2 = 0$ . Questo risultato rispose anche al problema di Lüroth per le superfici, cioè al chiedersi se una varietà unirazionale sia anche razionale. Lüroth e Clebsch avevano dimostrato che per le curve la risposta è affermativa. Il criterio di Castelnuovo dunque risponde in modo affermativo nel caso delle superfici.

Il criterio di Castelnuovo è il fulcro della classificazione delle superfici. A tale progetto, iniziato da Castelnuovo ed Enriques, a partire dal 1900 si unirono F. Severi e altri allievi della scuola italiana.

Gli argomenti trattati in questa tesi sono in particolare i seguenti.

Nel primo capitolo vengono date nozioni preliminari, necessarie ad analizzare le superfici razionali. Vengono richiamati i concetti di divisori e fasci invertibili e ne vengono date le principali proprietà e risultati. In particolare si mette in evidenza il concetto di divisore molto ampio su una varietà, come un divisore che definisce un'immersione della varietà in uno spazio proiettivo. Successivamente si definisce il fascio canonico  $\omega$  e i divisori  $K$ . Vengono poi definiti il genere geometrico  $p_g(X) = \dim H^0(X, \omega_X)$  e il genere aritmetico  $p_a(X) = (-1)^r(\chi(\mathcal{O}_X) - 1)$ , che sono invarianti birazionali. Il penultimo paragrafo di questo capitolo è dedicato alla geometria delle superfici, vengono perciò definiti il numero di intersezione e l'autointersezione di divisori. Infine nell'ultimo paragrafo si enuncia il teorema di Riemann-Roch per le curve, teorema 1.5.1, con le relative conseguenze per il calcolo del grado del divisore canonico conoscendo il genere geometrico. A seguire si trovano la

formula di aggiunzione e il teorema di Riemann-Roch per le superfici.

Nel secondo capitolo, dopo aver fissato la terminologia riguardante le applicazioni razionali, viene analizzato un particolare tipo di applicazioni birazionali, le trasformazioni monoidali o scoppimento di un insieme finito di punti su una superficie. Vedremo che i morfismi birazionali tra superfici si fattorizzano tramite trasformazioni monoidali. Spiegheremo come avere informazioni sui numeri di intersezione di una superficie ottenuta tramite una trasformazione monoidale, in base ai numeri di intersezione della superficie di partenza, come cambia il divisore canonico tramite una trasformazione monoidale e vedremo il concetto di trasformata stretta e totale di una curva. Un altro concetto molto importante che troveremo, sempre inerente le trasformazioni monoidali, è quello di punti infinitamente vicini. A conclusione del paragrafo sulle trasformazioni monoidali, troviamo il criterio di contrazione Castelnuovo, teorema 2.2.4 il quale afferma che se  $Y$  è una  $(-1)$ -curva, detta anche curva eccezionale di prima specie, cioè una curva razionale avente autointersezione  $(-1)$ , su una superficie  $X$  allora esistono una superficie  $X_0$  e un punto  $P_0 \in X_0$  tale che  $X$  è isomorfa allo scoppimento di  $X_0$  in  $P_0$  e  $Y$  è la curva eccezionale.

Successivamente viene trattata la relazione che intercorre tra i sistemi lineari e le applicazioni razionali. Si passa poi a definire la risoluzione di applicazioni razionali, e si vedrà che per ogni applicazione razionale esiste sempre una risoluzione e più in particolare questa risoluzione è definita da una successione finita di trasformazioni monoidali. Verranno definite le configurazioni eccezionali e un nuovo spazio, detto spazio gonfiato di una superficie  $X$ , che comprende i punti di  $X$  e tutti i suoi punti infinitamente vicini. Nel paragrafo successivo vengono introdotte le trasformazioni cremoniane del piano proiettivo, cioè le trasformazioni birazionali  $\mathbb{P}^2$ , e vengono date le condizioni affinché un sistema lineare definisca una trasformazione cremoniana, tali sistemi vengono chiamati sistemi omaloidali. Nei paragrafi successivi troviamo due esempi di trasformazioni cremoniane, le trasformazioni quadratiche e le trasformazioni di De Jonquières.

Nel terzo capitolo vengono definite le superfici di Del Pezzo e le superfici di Del Pezzo deboli, vengono studiate alcune delle loro proprietà, ad esempio, proposizione 3.1.1, il fatto che contraendo una curva eccezionale di prima

specie su una superficie di Del Pezzo debole si ottiene ancora una superficie di Del Pezzo debole, oppure se si scoppia un punto che non giace su una  $(-2)$ -curva, su una superficie di Del Pezzo debole tale che  $K^2 \geq 2$  si ottiene di nuovo una superficie di Del Pezzo debole. Come conseguenza di quanto appena detto, viene dimostrato, corollario 3.1.1, che dallo scoppio su  $\mathbb{P}^2$  di un insieme di  $r \leq 8$  punti che soddisfano certe condizioni, cioè che risultano essere in posizione quasi generale o generale, si ottiene una superficie di Del Pezzo debole o di Del Pezzo . Si passa poi ad analizzare il modello anticanonico delle superfici di Del Pezzo, modello che risulta essere minimale e che viene effettivamente usato per studiare queste superfici. Si prendono poi in considerazione alcune superfici di Del Pezzo particolari, e cioè quelle di grado quattro, tre, due e uno. Nel paragrafo in cui è stata studiata la superficie di Del Pezzo di grado due, abbiamo inserito anche lo studio di una trasformazione cremoniana, l'involuzione di Geiser. Il motivo per il quale è stata inserita in questo paragrafo è il seguente. Lo scoppio su  $\mathbb{P}^2$  dell'insieme dei punti che definisce una superficie di Del Pezzo di grado due insieme alla contrazione delle  $(-2)$ -curve di questa superficie risulta essere la risoluzione dell'involuzione di Geiser. Allo stesso modo, nel paragrafo riguardante le superfici di Del Pezzo di grado uno, è stato inserito lo studio dell'involuzione di Bertini, anch'essa una trasformazione cremoniana che in questo caso però si può definire tramite il modello antibanonico della superficie di Del Pezzo di grado uno.

Il quarto capitolo tratta le superfici rigate razionali, si dà dunque la definizione di superficie rigata e geometricamente rigata e si dimostra il teorema di Noether-Enriques, teorema 4.1.1, che ci dice che una superficie geometricamente rigata è una superficie rigata. Si dimostra che le superfici rigate razionali possono essere rappresentate tramite un sistema lineare su  $\mathbb{P}^2$ ; tale sistema lineare è del tipo  $C^n [(n-1)^1, 1^{n-1}]$  cioè un sistema lineare di curve di grado  $n$  passanti semplicemente per  $n-1$  punti e per un punto con molteplicità  $n-1$ . Inoltre viene dimostrato che queste superfici possono essere rappresentate anche tramite fibrati vettoriali di rango due, cioè  $\mathbb{F}_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ . A partire da questa rappresentazione, viene dimostrato che per  $n \neq 1$ ,  $\mathbb{F}_n$  non ha curve eccezionali di prima specie, perciò è minimale, invece per  $n = 1$  equivale allo scoppio di  $\mathbb{P}^2$  in un punto.

Vengono poi descritte le equazioni determinantal e analizzato il caso delle curve razionali. Infine viene dimostrato come anche le superfici razionali rigate possano essere descritte da equazioni determinantal, e vengono analizzati i casi per  $n = 2, 3$ . L'ultimo paragrafo di questo capitolo è dedicato ad analizzare la superficie di Veronese. Abbiamo inserito lo studio di questa superficie nel capitolo delle superfici rigate perché è l'unico esempio di superficie normale di grado  $d$  in  $\mathbb{P}^{d+1}$  con  $d = 4$ , come le superfici razionali rigate. Vengono analizzate le superfici che si ottengono dalla superficie di Veronese proiettandola da un punto appartenente o non alla superficie. Da questo studio si arriva perciò alla superficie di Steiner.

Il quinto ed ultimo capitolo è interamente dedicato alla dimostrazione del criterio di razionalità di Castelnuovo, preceduta da alcuni risultati preliminari che vengono poi usati nel corso della dimostrazione del teorema. Uno di questi risultati, proposizione 5.1.3, è di particolare importanza e ci dice che una superficie minimale con  $q = 0$  e  $p_2 = 0$  ha una curva razionale normale tale che  $C^2 \geq 0$ . Da questo risultato discende anche la dimostrazione del teorema che afferma che le superfici razionali minimali sono  $\mathbb{P}^2$  e le superfici rigate  $\mathbb{F}_n$  con  $n \neq 1$ . Per ultimo si dimostra che il criterio di razionalità di Castelnuovo risponde in modo affermativo al problema di Lüroth per le superfici.

# Capitolo 1

## Teoria dell'intersezione sulle superfici

### 1.1 Notazioni e terminologia

Sia  $k$  un campo algebricamente chiuso.

Sia  $X$  uno schema, cioè uno spazio anellato  $(X, \mathcal{O}_X)$  in cui ogni punto ha un intorno  $U$  tale che lo spazio anellato  $(U, \mathcal{O}_{X|U})$  è isomorfo a  $\text{Spec}A$  dove  $A$  è un anello. Uno schema  $X$  su un anello  $B$  si dice di *tipo finito*, o *algebrico*, se ammette un ricoprimento finito di aperti affini

$$X = \bigcup U_i \text{ dove } U_i = \text{Spec}A_i$$

tale che  $A_i$  sono algebre finitamente generate su  $B$ .

Ricordiamo che il *morfismo diagonale* è l'unico morfismo  $\Delta : X \rightarrow X \times_k X$  la cui composizione con entrambe le proiezioni  $p_1, p_2 : X \times_k X \rightarrow X$  coincide con la funzione identità. L'immagine  $\Delta(X)$  è detta *diagonale*. Uno schema  $X$  su  $k$  è *separato* se la diagonale è chiusa.

Uno schema  $X$  si dice *ridotto* se l'anello  $\mathcal{O}_X(U)$  è privo di elementi nilpotenti per ogni aperto affine  $U$ .

**Definizione 1.1.1.** *Se  $X$  è uno schema ridotto, separato e di tipo finito allora diciamo che  $X$  è una varietà.*

Una curva è una varietà irriducibile di dimensione uno.

Una superficie è una varietà irriducibile di dimensione due.

D'ora in poi  $X$  sarà sempre una varietà.

Utilizzeremo inoltre le seguenti *notazioni*:

$\mathcal{O}$  fascio delle funzioni regolari

$\mathcal{O}^*$  fascio degli elementi invertibili di  $\mathcal{O}$

$\mathcal{K}$  fascio degli anelli totali delle frazioni di  $\mathcal{O}$

$\mathcal{K}^*$  fascio degli elementi invertibili di  $\mathcal{K}$

$\mathcal{O}_X$  fascio delle funzioni regolari su una varietà  $X$

$\Gamma(X, \mathcal{F})$  sezioni globali del fascio  $\mathcal{F}$

$H^i(X, \mathcal{F})$   $i$ -esimo gruppo di coomologia

$D_s$  divisore degli zeri della sezione globale  $s$  di un fascio invertibile

Per tutti gli enunciati che non vengono dimostrati in questo capitolo, si rinvia a [7] capitoli 2,4,5.

## 1.2 Fasci invertibili e divisori

Ricordiamo che un *divisore di Cartier* su una varietà  $X$  è una sezione globale del fascio  $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$ ; diciamo che un divisore di Cartier è *principale* se è nell'immagine dell'applicazione naturale  $\Gamma(X, \mathcal{K}^*) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$ . Possiamo perciò descrivere un divisore di Cartier  $D$  su uno schema  $X$  nel modo seguente:

$$D = \left\{ (f_i, U_i) : X = \bigcup U_i, f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*) \wedge \forall i, j, f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*) \right\}.$$

Il prodotto nello spazio  $(\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$  si denota con la somma. Due divisori di Cartier  $D_1$  e  $D_2$  sono *linearmente equivalenti* se la loro differenza è principale, in tal caso scriviamo  $D_1 \sim D_2$ ; il gruppo dei divisori di Cartier modulo equivalenza lineare è denotato  $\text{CaCl}(X)$ .

Un *divisore di Weil*  $D$  su una varietà  $X$  è un elemento del gruppo abeliano libero generato dalle sottovarietà di codimensione uno, quindi lo possiamo descrivere come

$$D = \sum n_i Y_i$$

dove  $n_i \in \mathbb{Z}$  e  $Y_i$  sono sottovarietà di  $X$  di codimensione uno.

Se  $X$  è una varietà normale allora il gruppo dei divisori di Cartier  $\Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$  è isomorfo al gruppo dei divisori di Weil  $\text{Div}(X)$  e i divisori principali di Cartier corrispondono ai divisori principali di Weil. A causa di questo isomor-

fismo spesso identificheremo un divisore di Weil con il corrispettivo divisore di Cartier e parleremo di divisore senza specificare se sia di Weil o di Cartier. Prima di definire la relazione che sussiste tra i divisori di Cartier e i fasci invertibili, è utile richiamare la definizione di fasci liberi. Sia  $\mathcal{F}$  un fascio di  $\mathcal{O}_X$ -moduli,  $\mathcal{F}$  è *libero di rango  $n$*  se è isomorfo a  $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X$  per qualche  $n$ . Se per ogni punto di  $X$  esiste un intorno  $U$  tale che  $\mathcal{F}|_U$  è libero di rango  $n$  allora diciamo che  $\mathcal{F}$  è *localmente libero di rango  $n$* .

Un fascio *invertibile* è un fascio localmente libero di rango uno. Il *gruppo di Picard*  $\text{Pic}(X)$  è definito come il gruppo delle classi di isomorfismo di fasci invertibili con l'operazione  $\otimes$ .

Dato un divisore di Cartier  $D$  possiamo considerare il fascio  $\mathcal{L}(D)$  associato a  $D$ .  $\mathcal{L}(D)$  è il sotto- $\mathcal{O}_X$ -modulo di  $\mathcal{K}$  generato da  $f_i^{-1}$  su  $U_i$ . Il fascio  $\mathcal{L}(D)$  ha le seguenti importanti proprietà.

**Proposizione 1.2.1.** *Sia  $X$  una varietà. Allora:*

1. *Per ogni divisore di Cartier  $D$ ,  $\mathcal{L}(D)$  è un fascio invertibile su  $X$ . L'applicazione  $D \mapsto \mathcal{L}(D)$  è una corrispondenza biunivoca tra i divisori di Cartier su  $X$  e i sotto-fasci invertibili di  $\mathcal{K}$ ;*
2.  $\mathcal{L}(D_1 - D_2) \cong \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$ ;
3.  $D_1 \sim D_2$  se e solamente se  $\mathcal{L}(D_1) \cong \mathcal{L}(D_2)$ .

Segue immediatamente da queste proprietà che c'è un omomorfismo iniettivo tra i gruppi  $\text{CaCl}(X)$  e  $\text{Pic}(X)$ . Inoltre se  $X$  è una varietà normale, allora l'omomorfismo  $\text{CaCl}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$  è un isomorfismo.

Ricordiamo che un divisore di Cartier  $D$  su  $X$  è detto *effettivo* se può essere rappresentato da  $\{(f_i, U_i)\}$  dove tutte le  $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ ; in questo caso definiamo il sottoschema di codimensione uno,  $Y$  associato a  $D$ , come il sottoschema chiuso definito dal fascio di ideali  $\mathcal{I}$  localmente generato da  $f_i$ . Abbiamo così una corrispondenza biunivoca tra i divisori di Cartier effettivi su  $X$  e sottoschemi chiusi localmente principali  $Y$ , cioè sottoschemi il cui fascio di ideali è localmente generato da un singolo elemento.

**Proposizione 1.2.2.** *Sia  $D$  un divisore di Cartier effettivo su una varietà  $X$ , e sia  $Y$  il sottoschema chiuso localmente principale associato a  $D$ . Allora  $\mathcal{I}_Y \cong \mathcal{L}(-D)$ .*

In teoria dell'intersezione la classe dei fasci molto ampi gioca un ruolo importante. Un fascio invertibile  $\mathcal{L}$  su una varietà  $X$  è *molto ampio* se esiste un'immersione  $i : X \rightarrow \mathbb{P}^r$  per qualche  $r$ , tale che  $i^*(\mathcal{O}(1)) \cong \mathcal{L}$ . Diciamo che un divisore di Cartier è molto ampio se lo è il suo fascio associato.

Osserviamo che una varietà  $X$  è proiettiva se e solamente se  $X$  è propria ed esiste un fascio molto ampio su  $X$ . Infatti se  $X$  è proiettiva allora  $X$  è propria. Inoltre c'è un'immersione chiusa  $i : X \rightarrow \mathbb{P}^r$  per qualche  $r$ , perciò  $i^*(\mathcal{O}(1))$  è un fascio invertibile molto ampio su  $X$ . Viceversa se  $X$  è propria e  $\mathcal{L}$  è un fascio invertibile molto ampio, allora  $\mathcal{L} \cong i^*(\mathcal{O}(1))$  per qualche immersione  $i : X \rightarrow \mathbb{P}^r$ , inoltre  $i$  è un'immersione chiusa e perciò  $X$  è proiettiva.

Introduciamo ora la nozione di fasci generati da sezioni globali che, come vedremo, sono collegati ai fasci molto ampi.

**Definizione 1.2.1.** *Sia  $X$  una varietà, e sia  $\mathcal{F}$  un fascio di  $\mathcal{O}_X$ -moduli.  $\mathcal{F}$  è generato da sezioni globali se esiste una famiglia di sezioni globali  $\{s_i\}_{i \in I}$ ,  $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ , tale che per ogni  $x \in X$ , l'immagine di  $s_i$  in  $\mathcal{F}_x$ , genera  $\mathcal{F}_x$  come un  $\mathcal{O}_X$ -modulo.*

**Teorema 1.2.1.** *Sia  $X$  una varietà su  $k$ .*

1. *Se  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  è un  $k$ -morfismo, allora  $\varphi^*(\mathcal{O}(1))$  è un fascio invertibile su  $X$ , che è generato dalle sezioni globali  $s_i = \varphi^*(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .*
2. *Viceversa, se  $\mathcal{L}$  è un fascio invertibile su  $X$ , e se  $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$  sono sezioni globali che generano  $\mathcal{L}$ , allora esiste un unico  $k$ -morfismo  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  tale che  $\mathcal{L} \cong \varphi^*(\mathcal{O}(1))$  e  $s_i = \varphi^*(x_i)$  tramite questo isomorfismo.*

Vediamo adesso un criterio per stabilire se un morfismo è un'immersione chiusa. Questa proposizione ci sarà molto utile quando parleremo di sistemi lineari.

**Proposizione 1.2.3.** *Sia  $X$  una varietà proiettiva su  $k$ , e sia  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  il morfismo corrispondente a  $\mathcal{L}$  e  $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$  come sopra. Sia  $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$  il sottospazio generato da  $s_i$ . Allora  $\varphi$  è un'immersione chiusa se e solamente se:*

1. gli elementi di  $V$  separano i punti, cioè per ogni coppia di punti  $P, Q \in X$ , esiste  $s \in V$  tale che  $s \in \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P$  ma  $s \notin \mathfrak{m}_Q \mathcal{L}_Q$ , e viceversa,
2. gli elementi di  $V$  separano i vettori tangenti, cioè per ogni punto  $P \in X$ , l'insieme  $\{s \in V : s_P \in \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P\}$  genera il  $k$ -spazio vettoriale  $\mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P / \mathfrak{m}_P^2 \mathcal{L}_P$ .

Questa proposizione ci dà un metodo per stabilire se un fascio invertibile  $\mathcal{L}$  su una varietà proiettiva  $X$  è molto ampio.

Un *sistema lineare completo* su una varietà proiettiva è l'insieme di tutti i divisori effettivi linearmente equivalenti ad un divisore dato  $D_0$ , ed è denotato  $|D_0|$ .

Sia  $D_0$  un divisore e  $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}(D_0)$  il suo fascio associato, allora per ogni sezione  $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ , il divisore degli zeri  $(s)_0$  è un divisore effettivo linearmente equivalente a  $D_0$ ; viceversa, ogni divisore effettivo linearmente equivalente a  $D_0$  è della forma  $(s)_0$  per qualche  $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ , inoltre due sezioni  $s, s' \in \Gamma(X, \mathcal{L})$  hanno lo stesso divisore degli zeri se e solo se esiste  $\lambda \in k^*$  tale che  $s' = \lambda s$ , infatti se  $(s)_0 = (s')_0$  allora  $s$  e  $s'$  corrispondono alle funzioni razionali  $f, f' \in K$  tali che  $(f/f') = 0$ , quindi  $f/f' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$ ; ma allora poiché  $X$  è una varietà proiettiva si ha  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$  e quindi  $f/f' \in k^*$ . Questo ci dice che  $|D_0|$  è in corrispondenza biunivoca con  $(\Gamma(X, \mathcal{L}) - \{0\})/k^*$ ; questa corrispondenza fornisce a  $|D_0|$  una struttura di spazio proiettivo su  $k$ .

Un *sistema lineare*  $\mathfrak{d}$  su  $X$  è un sottoinsieme di un sistema lineare completo  $|D_0|$  che è un sottospazio lineare della struttura di spazio proiettivo di  $|D_0|$  sopra descritta. Allora  $\mathfrak{d}$  corrisponde ad un sottospazio vettoriale  $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ , dove  $V = \{s \in \Gamma(X, \mathcal{L}) : (s)_0 \in \mathfrak{d}\} \cup \{0\}$ . La dimensione dello spazio lineare  $\mathfrak{d}$  equivale alla dimensione come varietà proiettiva, perciò  $\dim \mathfrak{d} = \dim V - 1$ .

In base a quanto appena detto, possiamo dire che un punto  $P \in X$  è un punto base di  $\mathfrak{d}$  se e solo se  $s_P \in \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P$  per ogni  $s \in V$ . In particolare,  $\mathfrak{d}$  non ha punti base se e solo se  $\mathcal{L}$  è generato dalle sezioni locali in  $V$ .

Possiamo allora riparafrasare quanto affermato nella proposizione precedente in termini di sistemi lineari.

Sia  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  un morfismo che corrisponde al sistema lineare, senza punti base,  $\mathfrak{d}$ . Allora  $\varphi$  è un'immersione chiusa se e solo se:

- $\mathfrak{d}$  separa i punti, cioè, per ogni coppia di punti  $P, Q \in X$ , esiste un divisore  $D \in \mathfrak{d}$  tale che  $P \in \text{Supp}D$  e  $Q \notin \text{Supp}D$ ,
- $\mathfrak{d}$  separa i vettori tangenti, cioè, dato un punto  $P \in X$  e un vettore tangente  $t \in T_P(X) = (\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^\vee$ , esiste un divisore  $D \in \mathfrak{d}$  tale che  $P \in \text{Supp}D$ , ma  $t \notin T_P(D)$ .

**Teorema 1.2.2.** *Sia  $X$  una varietà proiettiva su  $k$ , sia  $\mathcal{O}(1)$  un fascio invertibile molto ampio su  $X$ , e sia  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -modulo coerente. Allora esiste un intero  $n_0$  tale che per ogni  $n \geq n_0$ , il fascio  $\mathcal{F}(n)$  può essere generato da un numero finito di sezioni globali.*

Il teorema appena enunciato ci porta a definire i fasci invertibili ampi. Diciamo che un fascio invertibile  $\mathcal{L}$  su una varietà  $X$  è *ampio* se per ogni fascio coerente  $\mathcal{F}$  su  $X$ , esiste un intero  $n_0 \geq 0$  tale che per ogni  $n \geq n_0$ , il fascio  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$  è generato dalle sue sezioni globali.

**Teorema 1.2.3.** *Sia  $X$  una varietà, e sia  $\mathcal{L}$  un fascio invertibile su  $X$ . Allora  $\mathcal{L}$  è ampio se e solo se  $\mathcal{L}^m$  è molto ampio per qualche  $m \geq 0$ .*

Come abbiamo visto i divisori molto ampi su una varietà  $X$  definiscono un'immersione di  $X$  in  $\mathbb{P}^r$  per qualche  $r$ ; poter immergere una varietà in uno spazio proiettivo è un fatto molto utile perché ci permette di applicare alla varietà risultati e proprietà validi solo per gli spazi proiettivi, il che semplifica notevolmente lo studio della varietà. È questo il motivo per il quale in questo capitolo ci siamo soffermati molto sui divisori molto ampi.

Un esempio di quanto appena detto, è il teorema di Bertini, di seguito enunciato, che si applica agli spazi proiettivi e che in seguito useremo su superfici immergibili in uno spazio proiettivo tramite un divisore molto ampio.

**Teorema 1.2.4.** *Sia  $X$  una sottovarietà chiusa e nonsingolare di  $\mathbb{P}^n$ . Allora esiste un iperpiano  $H \subset \mathbb{P}^n$ , non contenente  $X$  e tale che la sottovarietà  $H \cap X$  è regolare in ogni punto. Inoltre, l'insieme degli iperpiani aventi questa proprietà formano un sottoinsieme aperto denso del sistema lineare completo  $|H|$ , considerato come uno spazio proiettivo.*

### 1.3 Fascio canonico e genere geometrico

**Definizione 1.3.1.** Sia  $X$  una varietà nonsingolare di dimensione  $n$  su  $k$ . Il fascio tangente di  $X$  è definito come  $\mathcal{T}_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$ . Definiamo il fascio canonico  $\omega_X$  di  $X$  come l' $n$ -esima potenza esterna del fascio di differenziali, cioè  $\omega_X = \bigwedge^n \Omega_{X/k}$ .

Enunciamo il seguente teorema, utile nel calcolo del fascio canonico dello spazio proiettivo  $\mathbb{P}^n$ .

**Teorema 1.3.1.** Sullo spazio proiettivo  $\mathbb{P}^n$  si ha una successione esatta di fasci:

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n/k} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

la cui duale

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 0$$

è detta successione di Eulero.

Se prendiamo l' $n$ -esima potenza esterna di (1.1), otteniamo che  $\omega_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$ .

Il fascio canonico è un fascio invertibile, perciò possiamo associargli una classe di equivalenza lineare di divisori. Definiamo un *divisore canonico*  $K_X$  come un qualunque divisore nella classe di equivalenza lineare che corrisponde al fascio canonico  $\omega_X$ .

**Definizione 1.3.2.** Sia  $Y$  una sottovarietà nonsingolare di una varietà nonsingolare  $X$  su  $k$ . Sia  $\mathcal{I}$  il fascio di ideali che definisce  $Y$ . Il fascio localmente libero  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$  è detto fascio conormale di  $Y$  in  $X$ . Il suo duale  $\mathcal{N}_{Y/X} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_Y)$  è detto il fascio normale di  $Y$  in  $X$ . Tale fascio è localmente libero di rango  $r = \text{codim}(Y, X)$ .

**Proposizione 1.3.1.** Sia  $Y$  una sottovarietà nonsingolare di codimensione  $r$  in una varietà nonsingolare  $X$  su  $k$ . Allora  $\omega_Y = \omega_X \otimes \bigwedge^r \mathcal{N}_{Y/X}$ . Nel caso in cui  $r = 1$ , consideriamo  $Y$  come un divisore, e sia  $\mathcal{L}$  il fascio invertibile associato su  $X$ . Allora  $\omega_Y = \omega_X \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y$ .

Se  $X$  è una varietà nonsingolare e proiettiva su  $k$  allora definiamo il *genere geometrico* di  $X$  come  $p_g(X) = \dim_k \Gamma(X, \omega_X)$ ; tale numero è un intero

non negativo ed è un invariante birazionale.

Ricordiamo che  $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ , cioè lo 0-esimo gruppo di coomologia di un fascio  $\mathcal{F}$  equivale al gruppo delle sezioni globali di tale fascio. Possiamo quindi definire il genere geometrico di  $X$  come la dimensione dello 0-esimo gruppo di coomologia del fascio canonico:  $p_g(X) = \dim_k H^0(X, \omega_X)$ . Vogliamo ora focalizzare la nostra attenzione sul genere geometrico di una curva, sia dunque  $C$  una curva nonsingolare. La dualità di Serre ci dice che  $H^1(X, \mathcal{O}_X)$  e  $H^0(X, \omega_X)$  sono spazi vettoriali duali l'uno dell'altro. Conseguenza immediata è che  $\dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X) = \dim_k H^0(X, \omega_X) = p_g(X)$ . Ricordiamo inoltre che se  $X$  è una varietà proiettiva di dimensione  $r$  su un campo  $k$  si definisce il *genere aritmetico*  $p_a$  nel modo seguente:

$$p_a(X) = (-1)^r (\chi(\mathcal{O}_X) - 1) \text{ dove } \chi(\mathcal{O}_X) = \sum (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{O}_X)$$

$\chi(\mathcal{O}_X)$  è detta la *caratteristica di Eulero* di  $\mathcal{O}_X$ .

Quindi il genere aritmetico di una curva  $C$  nonsingolare e connessa è uguale alla dimensione del primo gruppo di coomologia, cioè  $p_a(C) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ . Risulta allora immediato, dall'osservazione fatta precedentemente, che nel caso di curve nonsingolari e connesse il genere aritmetico e geometrico coincidono.

Sia ora  $X$  una varietà irriducibile, la *normalizzazione* di  $X$  è una varietà normale irriducibile  $\tilde{X}$  tale che esiste un'applicazione regolare  $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$  finita e birazionale.

Se  $C$  è una curva irriducibile qualsiasi, allora  $\tilde{C}$  è nonsingolare e si definisce il genere geometrico  $p_g(C) = p_g(\tilde{C}) = p_a(\tilde{C})$ .

## 1.4 Geometria sulle superfici

In questo paragrafo lavoreremo sulle superfici. D'ora in poi, con il termine superficie intenderemo sempre una superficie proiettiva nonsingolare a meno che non sia specificato diversamente.

Sia  $X$  una superficie. Siano  $C$  e  $C'$  curve distinte, e sia  $P \in C \cap C'$ , allora si definisce la *molteplicità di intersezione in  $P$*  di  $C$  e  $C'$ , denotata  $(C.C')_P$ , come la lunghezza di  $\mathcal{O}_{P,X}/(f, g)$ , dove  $f$  e  $g$  sono le equazioni locali rispettivamente di  $C$  e  $C'$  in  $P$ . Qui la lunghezza equivale alla dimensione di un

$k$ -spazio vettoriale. Se  $(C.C')_P = 1$  allora si dice che  $C$  e  $C'$  si *intersecano trasversalmente* in  $P$ , questo equivale a dire che le equazioni locali  $f$  e  $g$  di  $C$  e  $C'$  in  $P$  generano l'ideale massimale  $\mathfrak{m}_P$  di  $\mathcal{O}_{P,X}$ . Questo implica che  $C$  e  $C'$  sono entrambe nonsingolari in  $P$ .

Definiamo allora il *numero di intersezione* di due curve distinte  $C$  e  $C'$  come

$$C.C' = \sum_{P \in C \cap C'} (C.C')_P.$$

Osserviamo che se le curve  $C$  e  $C'$  si intersecano trasversalmente in ogni  $P \in C \cap C'$  allora  $C.C' = \#(C \cap C')$ , cioè il loro numero di intersezione è uguale al numero dei punti in cui si intersecano.

**Proposizione 1.4.1.** *Siano  $C$  e  $C'$  due curve distinte. Allora:*

$$C.C' = \deg_C(\mathcal{L}(C') \otimes \mathcal{O}_C). \quad (1.2)$$

Osserviamo che il secondo membro della (1.2) è ben definito anche quando  $C = C'$ . Pertanto si può definire l'auto-intersezione

$$C^2 = \deg_C(\mathcal{L}(C) \otimes \mathcal{O}_C).$$

Ci ricordiamo che il fascio normale di  $C$  su  $X$  è definito come  $\mathcal{N}_{C/X} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_C)$ , dove il fascio di ideali  $\mathcal{I}$  di  $C$  su  $X$  è  $\mathcal{L}(-C)$ . Allora  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \cong \mathcal{L}(-C) \otimes \mathcal{O}_C$  e perciò il suo duale  $\mathcal{N}_{C/X} = \mathcal{L}(C) \otimes \mathcal{O}_C$ , otteniamo quindi che  $C^2 = \deg_C \mathcal{N}_{C/X}$ .

**Proposizione 1.4.2.** *Siano  $C$  e  $C'$  due curve distinte. Allora:*

$$C.C' = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-C)) - \chi(\mathcal{O}_X(-C')) + \chi(\mathcal{O}_X(-C - C'))$$

*Dimostrazione.* Consideriamo i due complessi di fasci

$$\mathcal{O}_X(-C) \rightarrow \mathcal{O}_X \quad (1.3)$$

$$\mathcal{O}_X(-C') \rightarrow \mathcal{O}_X \quad (1.4)$$

Tensorizzandoli otteniamo il complesso

$$\mathcal{O}_X(-C - C') \rightarrow \mathcal{O}_X(-C) \oplus \mathcal{O}_X(-C') \rightarrow \mathcal{O}_X. \quad (1.5)$$

Poiché i complessi (1.3) e (1.4) sono risoluzioni di  $\mathcal{O}_C$  e  $\mathcal{O}'_C$  con  $\mathcal{O}_X$ -moduli localmente liberi, allora la coomologia di (1.5) consiste dei fasci

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}'_C).$$

Se  $x \in X$  e  $f, g$  sono equazioni locali di  $C$  e  $C'$  in  $x$  allora si dimostra che

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_x}(\mathcal{O}_x/(f), \mathcal{O}_x/(g)) = 0 \quad i > 0.$$

Questo implica che (1.5) è una risoluzione di  $\mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}'_C$  che ha come fibra  $\mathcal{O}_x/(f, g)$  in  $x$ . Perciò il fascio è nullo eccetto che nei punti di intersezione di  $C$  e  $C'$ , che denotiamo  $x_1, \dots, x_n$ , e in tali punti è  $\mathcal{O}_{x_i}/(f_i, g_i)$ .

Quindi

$$\begin{aligned} C.C' &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}'_C) = \chi(\mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}'_C) = \\ &= \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-C) \oplus \mathcal{O}_X(-C')) + \chi(\mathcal{O}_X(-C - C')) = \\ &= \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-C)) - \chi(\mathcal{O}_X(-C')) + \chi(\mathcal{O}_X(-C - C')). \end{aligned}$$

□

Siano adesso  $D = \sum n_i C_i$  e  $D' = \sum m_j C'_j$  due divisori su  $X$ , allora definiamo il *numero di intersezione*  $D.D'$  estendendolo per linearità:

$$D.D' = \left( \sum_i n_i C_i \right) \cdot \left( \sum_j m_j C'_j \right) = \sum_{i,j} n_i m_j C_i.C'_j$$

In base a quanto appena definito si ha il seguente teorema.

**Teorema 1.4.1.** *L'applicazione*

$$\mathrm{Div}(X) \times \mathrm{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z} \quad (D, D') \mapsto D.D'$$

*è bilineare e soddisfa le seguenti condizioni:*

1. *se  $D$  e  $D'$  sono curve non singolari che si intersecano trasversalmente, allora  $D.D' = \#(D \cap D')$ , cioè  $D.D'$  equivale al numero dei punti di  $D \cap D'$ ,*
2. *l'applicazione è simmetrica:  $D.D' = D'.D$ ,*
3. *l'applicazione è additiva:  $(D_1 + D_2).D' = D_1.D' + D_2.D'$ ,*

4. *l'applicazione dipende solo dalle classi di equivalenza lineare: se  $D_1 \sim D_2$  allora  $D_1 \cdot D' = D_2 \cdot D'$ .*

Poiché il numero di intersezione di due divisori dipende solo dalle loro classi di equivalenza lineare allora ha senso definire il numero di intersezione di due fasci invertibili.

Siano  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  due fasci invertibili su  $X$  allora

$$\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{L}_1^{-1}) - \chi(\mathcal{L}_2^{-1}) + \chi(\mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2^{-1}).$$

## 1.5 Il teorema di Riemann-Roch

In questo paragrafo enunciamo il teorema di Riemann-Roch sulle curve e sulle superfici, e vedremo alcuni risultati derivanti da questi teoremi.

Iniziamo con il caso delle curve. Sia  $C$  una curva nonsingolare e sia  $D \in \text{Div}(C)$ ; rappresentiamolo nella forma  $D = \sum n_i P_i, P_i \in C$  cioè come un divisore di Weil. Il *grado* di  $D$  è il numero  $\sum n_i$ . Diciamo che  $D$  è *effettivo* se  $n_i \geq 0$  per ogni  $i$ . Denotiamo  $l(D) = \dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D))$ . Dunque la dimensione del sistema lineare completo  $|D|$  è  $l(D) - 1$ .

**Teorema 1.5.1.** *Sia  $D$  un divisore su una curva  $C$  di genere  $p_g$ . Allora*

$$l(D) - l(K_C - D) = \text{deg}(D) + 1 - p_g$$

dove  $K_C$  è il divisore canonico della curva  $C$  e il divisore  $K_C - D$  corrisponde al fascio invertibile  $\omega_C \otimes \mathcal{L}(D)^\vee$

Per la dualità di Serre si ha che gli spazi vettoriali  $H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(D)^\vee)$  e  $H^1(C, \mathcal{L}(D))$  sono duali l'uno dell'altro. Sappiamo inoltre che la caratteristica di Eulero di un fascio  $\mathcal{F}$  su una curva è data dalla seguente formula

$$\chi(\mathcal{F}) = \dim H^0(C, \mathcal{F}) - \dim H^1(C, \mathcal{F}).$$

In seguito a quanto appena detto, osserviamo che il teorema di Riemann-Roch 1.5.1 ci dice che

$$\chi(\mathcal{L}(D)) = \text{deg}(D) + 1 - p_g$$

Tramite il teorema 1.5.1 possiamo calcolare il grado del divisore canonico su una curva. Infatti poniamo  $D = K_C$  e applichiamo la formula del teorema ricordando che  $l(K_C) = p_g$  e che  $l(0) = 1$ , otteniamo allora che

$$p_g - 1 = \deg(K_C) + 1 - p_g$$

perciò

$$\deg K_C = 2p_g - 2.$$

Una conseguenza del teorema di Riemann-Roch per le curve, di fondamentale importanza nello studio delle superfici, è la seguente formula detta *Formula di Aggiunzione*. Tale formula sarà infatti utilizzata ripetutamente nei prossimi capitoli.

**Proposizione 1.5.1.** *Sia  $C$  una curva nonsingolare di genere  $p_g$  sulla superficie  $X$ , e sia  $K_X$  è il divisore canonico su  $X$ , allora:*

$$2p_g - 2 = C.(C + K_X).$$

Passiamo ora al caso delle superfici. Sia  $X$  una superficie e  $D$  un suo divisore. Usiamo le stesse notazioni che sono state introdotte per le curve, cioè  $l(D) = \dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D))$ ; come sopra, risulta  $l(D) = \dim |D| + 1$ . Introduciamo inoltre la seguente notazione:  $s(D) = \dim H^1(X, \mathcal{L}(D))$ .

**Teorema 1.5.2.** *Se  $D$  è un divisore su una superficie  $X$ , allora*

$$l(D) - s(D) + l(K_X - D) = \frac{1}{2}D.(D - K_X) + 1 + p_a$$

Anche nel caso delle superfici possiamo riformulare il teorema usando la caratteristica di Eulero. Infatti, applicando di nuovo la dualità di Serre, gli spazi vettoriali  $H^0(X, \mathcal{L}(D)^\vee \otimes \omega_X)$  e  $H^2(X, \mathcal{L}(D))$  risultano duali l'uno dell'altro e perciò hanno la stessa dimensione. Ricordando che nel caso di un fascio  $\mathcal{F}$  su una superficie  $X$  la caratteristica di Eulero è data da

$$\chi(\mathcal{L}(D)) = \dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D)) - \dim H^1(X, \mathcal{L}(D)) - \dim H^2(X, \mathcal{L}(D))$$

allora il teorema di Riemann-Roch 1.5.2 ci dice che

$$\chi(\mathcal{L}(D)) = \frac{1}{2}D.(D - K_X) + 1 + p_a.$$

Un'altra conseguenza del teorema 1.5.2 è la seguente disuguaglianza detta *disuguaglianza di Riemann-Roch*

$$l(D) + l(K_X - D) \geq \frac{1}{2} [D^2 - K_X \cdot D] + p_a$$

che può anche essere scritta nel modo seguente

$$\dim |D| + \dim |(K_X - D)| + 1 \geq n - \pi + 1 + p_g - q$$

dove  $n = D^2$  è l'autointersezione di  $D$ ,  $\pi = \frac{1}{2} [D^2 + K_X \cdot D] + 1$  è detto il *genere virtuale di  $D$*  e  $q = p_g - p_a$  è detta l'*irregolarità di  $D$* .

Dal teorema di Riemann-Roch deriva un'altra formula molto importante che vedremo subito dopo aver introdotto alcuni concetti preliminari.

Sia  $X$  una varietà. Un *ciclo di codimensione  $r$*  su  $X$  è un elemento del gruppo abeliano generato dalle sottovarietà chiuse irriducibili di  $X$  di codimensione  $r$ . Perciò possiamo scrivere un ciclo come  $Y = \sum n_i Y_i$  dove  $Y_i$  sono sottovarietà e  $n_i \in \mathbb{Z}$ .

Per ogni sottovarietà  $V$  di  $X$  sia  $f : \tilde{V} \rightarrow V$  la normalizzazione di  $V$ , allora possiamo parlare di divisori di Weil ed equivalenza lineare su  $\tilde{V}$ . Se  $D$  e  $D'$  sono divisori di Weil linearmente equivalenti su  $\tilde{V}$  diciamo che  $f_*(D)$  e  $f_*(D')$  sono *razionalmente equivalenti* su  $X$ .

Sia  $A^r(X)$  il gruppo dei cicli di codimensione  $r$  su  $X$  modulo equivalenza razionale.

Denotiamo  $A(X) = \bigoplus_{r=0}^n A^r(X)$ , dove  $n = \dim(X)$ , il gruppo graduato  $A(X)$  ha una struttura di anello, e viene chiamato *anello di Chow di  $X$* . Notiamo che  $A^0(X) = \mathbb{Z}$ .

Sia  $\mathcal{E}$  un fascio localmente libero di rango  $r$  su  $X$ , sia  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$  il proiettificato e sia  $\xi \in A^1(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$  la classe del divisore corrispondente a  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ . Sia  $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$  la proiezione. Allora  $\pi^*$  rende  $A(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$  un  $A(X)$ -modulo libero di rango  $r$  generato da  $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{r-1}$ . Usando queste notazioni definiamo le classi di Chern.

**Definizione 1.5.1.** *Sia  $\mathcal{E}$  un fascio localmente libero di rango  $r$  su una varietà quasiproiettiva nonsingolare  $X$ . Per ogni  $i = 0, 1, \dots, r$  definiamo l' $i$ -esima classe di Chern  $c_i(\mathcal{E}) \in A^i(X)$  tramite le seguenti condizioni:*

$$c_0(\mathcal{E}) = 1$$

e

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i \pi^* c_i(\mathcal{E}) \cdot \xi^{r-i} = 0$$

in  $A^r(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ .

Sia ora  $X$  una superficie,  $\mathcal{E} = \mathcal{L}(D)$  e  $\mathcal{T}_X$  il fascio tangente di  $X$ . Denotiamo adesso  $c_1$  e  $c_2$  le classi di Chern del fascio tangente  $\mathcal{T}_X$ . Notiamo che poiché  $\mathcal{T}_X$  è il duale di  $\Omega_X$  e  $c_1(\Omega_X) = c_1(\wedge^2 \Omega_X)$  e  $\wedge^2 \Omega_X = \omega_X$  è proprio  $\mathcal{L}(K_X)$ , si ha che  $c_1(\mathcal{T}_X) = -K_X$ .

Definiamo

$$\text{ch}(\mathcal{E}) = 1 + D + \frac{1}{2}D^2$$

la *caratteristica esponenziale di Chern* di  $X$ , e

$$\text{td}(\mathcal{T}_X) = 1 - \frac{1}{2}K_X + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) = 1 - \frac{1}{2}K_X + \frac{1}{12}(K_X^2 + c_2)$$

la *classe di Todd* di  $\mathcal{T}_X$ .

Il teorema di Hilzebruch-Riemann-Roch ci dice che

$$\chi(\mathcal{E}) = \text{deg}(\text{ch}(\mathcal{E}) \cdot \text{td}(\mathcal{T}_X))_2$$

dove  $()_2$  denota la componente di grado due in  $A(X) \otimes \mathbb{Q}$ . Perciò denotando con  $D^2$  sia la sua classe in  $A^2(X)$  che il suo grado, si ha

$$\chi(\mathcal{L}(D)) = \frac{1}{2}D \cdot (D - K_X) + \frac{1}{12}(K_X^2 + c_2).$$

In particolare se  $D = 0$  si ottiene

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}(K_X^2 + c_2)$$

o equivalentemente

$$K_X^2 + c_2 = 12(p_g - q + 1).$$

## Capitolo 2

# Applicazioni sulle superfici

### 2.1 Applicazioni razionali

Prima di iniziare con l'argomento che verrà trattato in questo capitolo, è utile definire cosa si intende in questo elaborato con il termine morfismo birazionale e isomorfismo, per evitare confusione nel seguito.

Siano  $X$  e  $X'$  due varietà. Un'applicazione razionale di  $X$  in  $X'$  è una classe di equivalenza di coppie  $(U, \varphi)$  tale che  $U \subset X$  è aperto e non vuoto e  $\varphi : U \rightarrow X'$  è un morfismo, dove due coppie  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  si dicono equivalenti se  $\varphi|_{U \cap V} = \psi|_{U \cap V}$ . Il dominio di  $\varphi$ , indicato con  $\text{dom}(\varphi)$ , è l'unione di tutti gli aperti  $U_i$  al variare di  $(U_i, \varphi_i)$  tra tutti i rappresentanti di  $\varphi$ . Un'applicazione razionale viene indicata con la notazione  $\varphi : X \dashrightarrow X'$ .

Sia  $P \in X$ , diciamo che un'applicazione razionale  $\varphi$  è regolare in  $P$  se  $P \in \text{dom}(\varphi)$ . Una applicazione regolare o morfismo è un'applicazione razionale che è regolare in ogni punto di  $X$ , cioè  $\text{dom}(\varphi) = X$ .

Una applicazione birazionale è un'applicazione razionale che ammette una inversa razionale. Cioè siano  $\varphi : X \dashrightarrow X'$  e  $\phi : X' \dashrightarrow X$  due applicazioni razionali, siano  $U = \text{dom}(\varphi)$  e  $V = \text{dom}(\phi)$ , allora se su  $\varphi^{-1}(V) \cap U$  l'applicazione  $\phi \circ \varphi : X \dashrightarrow X$  è un rappresentante dell'identità allora  $\varphi$  è un'applicazione birazionale.

Date due varietà  $X$  e  $X'$ , se esiste un'applicazione birazionale  $\varphi : X \rightarrow X'$  allora si dice che  $X$  e  $X'$  sono birazionalmente equivalenti e si usa la seguente notazione  $X \cong_{bir} X'$ .

Un *morfismo birazionale* è un'applicazione regolare che ammette una inversa razionale.

Una *applicazione biregolare* o *isomorfismo* è un'applicazione regolare che ammette una inversa regolare.

Se  $X$  è una varietà di dimensione  $n$  tale che esiste un'applicazione birazionale  $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$  allora si dice che  $X$  è *razionale*.

Come si deduce dal titolo di questa tesi, il nostro studio è rivolto alle superfici razionali e cioè alle superfici che sono birazionalmente equivalenti a  $\mathbb{P}^2$ .

**Teorema 2.1.1.** *Sia  $X$  una varietà irriducibile e nonsingolare e sia  $\varphi : \dashrightarrow \mathbb{P}^m$  un'applicazione razionale. Allora  $\text{codim}_X(X \setminus \text{dom}(\varphi)) \geq 2$ .*

Se  $X$  è una superficie allora il teorema appena enunciato ci dice che il complementare in  $X$  del  $\text{dom}(\varphi)$  è un insieme finito i cui elementi sono detti *punti fondamentali* di  $\varphi$ .

## 2.2 Trasformazioni monoidali

Sia  $X$  una superficie e sia  $P \in X$  un punto nonsingolare. La *trasformazione monoidale centrata in  $P$*  o *scoppiamento in  $P$*  è definita nel modo seguente. Sia  $U \subset X$  un aperto affine tale che  $P \in U$ , siano  $u_0, u_1$  funzioni regolari su  $U$  tali che le equazioni  $u_0 = u_1 = 0$  abbiano  $P$  come unica soluzione e tali che formino un sistema locale di parametri di  $X$  in  $P$ . Consideriamo il prodotto  $U \times \mathbb{P}^1$ , e la sottovarietà  $\tilde{U} \subset U \times \mathbb{P}^1$  definita dall'equazione

$$u_1(x)t_0 = u_0(x)t_1$$

dove  $[t_0, t_1] \in \mathbb{P}^1$ .

La proiezione  $\pi : U \times \mathbb{P}^1 \rightarrow U$  induce un isomorfismo tra  $\tilde{U} \setminus \pi^{-1}(\{P\})$  e  $U \setminus \{P\}$ . Definiamo  $\tilde{X} = X \setminus \{P\} \cup \tilde{U}$  incollate lungo gli aperti  $U \setminus \{P\} = \tilde{U} \setminus \pi^{-1}(\{P\})$ . Allora l'applicazione regolare  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  indotta da  $\pi : U \times \mathbb{P}^1 \rightarrow U$  è lo scoppiamento di  $X$  in  $P$ .

Dalla definizione segue che  $\pi$  induce un isomorfismo tra  $\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(\{P\})$  e  $X \setminus \{P\}$  e che l'immagine inversa di  $P$  è una curva  $E$  che chiameremo *curva eccezionale*.

Richiamiamo alcuni risultati riguardanti lo scoppiamento di punti.

**Proposizione 2.2.1.** *Sia  $X$  una superficie, sia  $P \in X$  un punto, e sia  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  la trasformazione monoidale centrata in  $P$ . Allora:*

1.  $\pi$  è un morfismo birazionale, proiettivo e suriettivo;
2.  $\tilde{X}$  è una superficie proiettiva.

**Teorema 2.2.1.** *Sia  $X$  una superficie nonsingolare, e sia  $P \in X$  un punto. Sia  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  la trasformazione monoidale centrata in  $P$  e sia  $E$  la curva eccezionale. Allora:*

1.  $\tilde{X}$  è nonsingolare;
2.  $E \cong \mathbb{P}^1$ ;
3. tramite tale isomorfismo il fascio normale  $\mathcal{N}_{E/\tilde{X}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ .

Conseguenza immediata del teorema appena enunciato è che la curva eccezionale  $E$  ha auto-intersezione  $E^2 = -1$ , infatti nel capitolo precedente abbiamo definito l'autointersezione di una curva  $C$  come  $C^2 = \deg_C(\mathcal{N}_{C/X})$ , quindi poiché  $\mathcal{N}_{E/\tilde{X}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$  si ha che

$$E^2 = \deg_E(\mathcal{N}_{E/\tilde{X}}) = \deg_{\mathbb{P}^1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) = -1.$$

**Teorema 2.2.2.** *Sia  $f : X' \rightarrow X$  un morfismo birazionale di superfici. Sia  $P$  un punto fondamentale di  $f^{-1}$ . Allora  $f$  si fattorizza attraverso la trasformazione monoidale  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  centrata in  $P$ .*

Il seguente teorema ci mostra come è determinata la teoria dell'intersezione su  $\tilde{X}$ .

**Proposizione 2.2.2.** *Le applicazioni naturali  $\pi^* : \text{Pic}X \rightarrow \text{Pic}\tilde{X}$  e  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}\tilde{X}$  definita da  $1 \mapsto 1 \cdot E$  inducono un isomorfismo  $\text{Pic}\tilde{X} \cong \text{Pic}X \oplus \mathbb{Z}$ . La teoria dell'intersezione su  $\tilde{X}$  è determinata dalle seguenti regole:*

1. se  $C, D \in \text{Pic}X$ , allora  $(\pi^*C) \cdot (\pi^*D) = C \cdot D$ ;
2. se  $C \in \text{Pic}X$ , allora  $(\pi^*C) \cdot E = 0$ ;
3.  $E^2 = -1$ ;

4. infine, se  $\pi_* : \text{Pic}\tilde{X} \rightarrow \text{Pic}X$  denota la proiezione sul primo fattore, allora se  $C \in \text{Pic}X$  e  $D \in \text{Pic}\tilde{X}$ , allora  $(\pi^*C).D = C.(\pi_*D)$ .

Notiamo che il fascio canonico su  $\tilde{X} \setminus E$  e  $X \setminus \{P\}$  è lo stesso, questo ci suggerisce che  $K_{\tilde{X}} = \pi^*K_X + nE$ . Per determinare  $n$  possiamo usare la formula di aggiunzione e la proposizione appena enunciata, infatti, applicando la formula di aggiunzione (proposizione 1.5.1), si ha che  $-2 = E.(E + K_{\tilde{X}})$  questo ci dice che  $K_{\tilde{X}}.E = -1$  quindi  $-1 = E.(\pi^*K_X + nE)$  e perciò per il secondo punto della proposizione precedente si ha che  $n = 1$ . Perciò

$$K_{\tilde{X}} = \pi^*K_X + E.$$

Sia  $C$  un divisore effettivo di  $X$ , cioè una curva. La *trasformata stretta* o *propria*  $\tilde{C}$  di  $C$  è definita come la chiusura in  $\tilde{X}$  di  $\pi^{-1}(C \setminus \{P\})$ , cioè

$$\tilde{C} = \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{P\})}$$

Chiamiamo  $\pi^*C$  la *trasformata totale* di  $C$ . Da ciò risulta immediato che  $\tilde{C}$  può essere ottenuta da  $\pi^*C$  eliminando  $E$ .

Ricordiamo che se  $C$  è un divisore di Cartier su una superficie  $X$  e se  $f$  è un'equazione locale di  $C$  nel punto  $P$ , allora si definisce la *molteplicità* di  $C$  in  $P$ , denotata  $\mu_P(C)$ , come il più grande intero  $r$  tale che  $f \in \mathfrak{m}_P^r$ , dove  $\mathfrak{m}_P \subseteq \mathcal{O}_{P,X}$  è l'ideale massimale.

**Proposizione 2.2.3.** *Sia  $C$  un divisore effettivo su  $X$ , sia  $P$  un punto di molteplicità  $r$  su  $C$ , e sia  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  la trasformazione monoidale centrata in  $P$ . Allora*

$$\pi^*(C) = \tilde{C} + rE.$$

Risulta immediato che  $\tilde{C}.E = r$  e che  $p_a(\tilde{C}) = p_a(C) - \frac{1}{2}r(r-1)$ , usando le stesse notazioni della proposizione.

Ricordiamo che con l'espressione *divisore con intersezioni normali* si intende un divisore  $D$  tale che ogni sua componente irriducibile sia nonsingolare e tale che, date comunque due componenti irriducibili  $Y_1, Y_2$  di  $D$  che si intersecano in un punto  $P$ , le equazioni locali  $f_1, f_2$  delle  $Y_i$  facciano parte di un sistema regolare di parametri in  $P$ .

**Teorema 2.2.3.** *Sia  $C$  una curva su una superficie  $X$ . Allora esiste una successione finita di trasformazioni monoidali  $X' = X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 = X$ , tale che se  $f : X' \rightarrow X$  è la loro composizione, allora l'immagine inversa totale  $f^{-1}(C)$  è un divisore con intersezioni normali.*

Quando si usano le trasformazioni monoidali è molto importante introdurre il concetto di punti infinitamente vicini.

**Definizione 2.2.1.** *Sia  $X$  una superficie. Allora ogni punto su  $X'$ , superficie ottenuta da  $X$  tramite una successione finita di trasformazioni monoidali, è detto punto infinitamente vicino di  $X$ . Se  $g : X'' \rightarrow X'$  è un'ulteriore successione di trasformazioni monoidali, e se  $Q'' \in X''$  è un punto nell'insieme aperto in cui  $g$  è un isomorfismo, allora identifichiamo  $Q''$  con  $g(Q'')$  come punti infinitamente vicini di  $X$ . In particolare, tutti i punti ordinari di  $X$  sono inclusi tra i punti infinitamente vicini. Diciamo che " $Q$  è infinitamente vicino a  $P$ " se  $P$  giace su qualche  $X'$  e  $Q$  giace sulla curva eccezionale  $E$  ottenuta scoppiando  $P$ . Se  $C$  è una curva in  $X$ , e  $Q' \in X'$  è un punto infinitamente vicino di  $X$ , diciamo che  $Q'$  è un punto infinitamente vicino di  $C$  se  $Q'$  giace sulla trasformata stretta di  $C$  su  $X'$ .*

Concludiamo questo paragrafo sulle trasformazioni monoidali con un teorema molto importante che ci servirà nei prossimi capitoli, il criterio di contrazione di Castelnuovo.

**Teorema 2.2.4.** *Se  $C$  è una curva su una superficie  $X$  con  $C \cong \mathbb{P}^1$  e  $C^2 = -1$  allora esiste un morfismo  $f : X \rightarrow X_0$  su una superficie proiettiva nonsingolare e un punto  $P \in X_0$  tale che  $X$  è isomorfa tramite  $f$  alla trasformazione monoidale di  $X_0$  centrata in  $P$ , e  $C$  è la curva eccezionale.*

## 2.3 Sistemi lineari e applicazioni razionali

Sia  $X$  una superficie,  $|D|$  un sistema lineare completo di curve su  $X$ , e  $P_1, \dots, P_r$  punti di  $X$ . Consideriamo il sottosistema lineare dei divisori  $D \in |D|$  passanti per i punti  $P_1, \dots, P_r$ , e lo denotiamo  $|D - P_1 - \cdots - P_r|$ . I punti  $P_1, \dots, P_r$  si dicono i *punti base assegnati* di  $|D - P_1 - \cdots - P_r|$ . Sia  $\pi : X' \rightarrow X$  il morfismo ottenuto scoppiando  $P_1, \dots, P_r$  e siano  $E_1, \dots, E_r$

le curve eccezionali. Allora c'è una corrispondenza biunivoca naturale tra gli elementi di  $|D - P_1 - \dots - P_r|$  su  $X$  e gli elementi del sistema lineare  $|\pi^*D - E_1 - \dots - E_r|$  su  $X'$  dato da  $D \rightarrow \pi^*D - E_1 - \dots - E_r$ , infatti l'ultimo divisore è effettivo su  $X'$  se e solamente se  $D$  passa per i punti  $P_1, \dots, P_r$ . Il nuovo sistema lineare  $|\pi^*D - E_1 - \dots - E_r|$  su  $X'$  può avere o non avere punti base. Chiamiamo gli eventuali punti base di  $|\pi^*D - E_1 - \dots - E_r|$  *punti base non assegnati* di  $|D - P_1 - \dots - P_r|$ , considerati come punti infinitamente vicini di  $X$ .

Con questo linguaggio possiamo descrivere la condizione affinché un sistema lineare completo  $|D|$  sia molto ampio come segue:

$|D|$  è molto ampio se e solo se

- $|D|$  non ha punti base,
- per ogni  $P, Q \in X$ ,  $\dim |D - P - Q| = \dim |D| - 2$ .

Sia  $X$  una varietà proiettiva nonsingolare. Sia  $\mathcal{L}$  un fascio invertibile su  $X$  e sia  $V \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$  un sottospazio lineare di dimensione positiva. Ricordiamo che lo spazio proiettivo  $|V| = \{x \in X : s(x) = 0 \exists s \in V\}$  è l'insieme dei divisori  $D_s$  degli zeri delle sezioni  $s \in V \setminus \{0\}$ .

Sia  $s_0, \dots, s_m$  una base di  $V$ . Definiamo la sottovarietà chiusa di  $X$

$$\text{Bs}(|V|) = \cap_{D \in |V|} D = D_{s_0} \cap \dots \cap D_{s_m}$$

detta *luogo base* di  $|V|$ . Il fascio di ideali definito dal luogo base è denotato  $\mathfrak{b}(|V|)$  ed è detto *ideale base* di  $V$ .

Un sistema lineare  $|V|$  definisce un'applicazione razionale

$$\varphi_{|V|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$$

che assegna ad ogni  $x \in X \setminus \text{Bs}(|V|)$  l'iperpiano in  $|V|$  delle sezioni che si annullano in  $x$ . La scelta di una base  $s_0(x), \dots, s_m(x)$  di  $V$ , definisce le coordinate proiettive di  $\mathbb{P}(V)$  e una formula esplicita dell'applicazione razionale:  $\varphi_{|V|}(x) = [s_0(x), \dots, s_m(x)]$ .

L'applicazione razionale definita da un sistema lineare è regolare se e solo se il luogo base del sistema lineare è vuoto; inoltre già sappiamo che se il sistema lineare è molto ampio allora l'applicazione razionale è un'immersione

chiusa.

Per quanto appena detto, osserviamo che il luogo base di  $|V|$  è il complementare in  $X$  del  $\text{dom}(\varphi_{|V|})$ . Poiché stiamo considerando superfici nonsingolari, il teorema 2.1.1 ci dice che la codimensione di  $\text{Bs}(|V|)$  è  $\geq 2$ , quindi  $\text{Bs}(|V|)$  è un insieme finito di punti.

Similmente possiamo definire un'applicazione razionale  $\varphi : X \dashrightarrow X'$  tra varietà proiettive tramite un sistema lineare. Sia  $\mathcal{L}'$  un fascio invertibile molto ampio su  $X'$  e sia  $|V'| = |\mathcal{L}'|$  il sistema lineare completo che definisce l'immersione chiusa  $i : X' \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ . Sia  $|V| = \varphi^{-1}(|V'|)$ , allora  $\varphi_{|V|} = i \circ \varphi : X \dashrightarrow X' \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ .

$|V|$  è detta *trasformata propria* di  $|V'|$  tramite l'applicazione razionale  $\varphi$ .

## 2.4 Risoluzione di applicazioni razionali

**Definizione 2.4.1.** *Sia  $X$  una varietà proiettiva. Una risoluzione di un'applicazione razionale  $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$  è una coppia di applicazioni  $(\pi, \sigma)$  tali che  $\pi : Y \rightarrow X$  è un morfismo birazionale,  $\sigma : Y \rightarrow \mathbb{P}^m$  è un morfismo e il seguente diagramma*

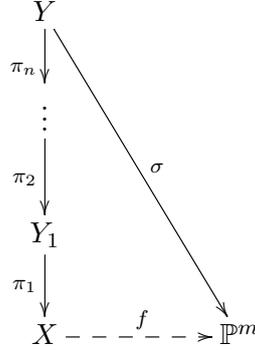
$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \pi \swarrow & & \searrow \sigma \\ X & \overset{f}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^m \end{array}$$

è commutativo, cioè  $f = \sigma \circ \pi^{-1}$  e  $\pi$  è un isomorfismo su  $\text{dom}(f)$ .

Se  $X$  è una superficie,  $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$  è un'applicazione razionale e  $(\pi, \sigma)$  è una sua risoluzione, allora per il teorema 2.2.2, si ha che  $\pi$  è la composizione di una successione finita di trasformazioni monoidali

$$\pi : Y = Y_n \xrightarrow{\pi_n} Y_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\pi_2} Y_1 \xrightarrow{\pi_1} Y_0 = X$$

dove  $\pi_i : Y_i \rightarrow Y_{i-1}$  con  $i = 1, \dots, n$  sono le trasformazioni monoidali centrate nei punti  $x_i$ , punti fondamentali di  $f$ . Allora si ha il seguente diagramma



Tutto questo può essere riparafrasato in termini di sistemi lineari. Infatti per quanto detto nel paragrafo precedente, la funzione razionale  $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$  è determinata da un sistema lineare  $|V|$  e, i suoi punti fondamentali equivalgono ai punti base del sistema lineare  $Bs(|V|)$ . Quindi l'applicazione  $\pi$  è lo scoppimento di  $Bs(|V|)$ .

**Proposizione 2.4.1.** *Sia  $X$  una superficie e sia*

$$\pi : Bl_{Bs(|V|)}X \rightarrow X$$

*lo scoppimento di  $X$  nel luogo base di un'applicazione razionale  $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ . Allora esiste un'unica applicazione regolare  $\sigma : Bl_{Bs(|V|)}X \rightarrow \mathbb{P}^m$  tale che  $(\pi, \sigma)$  è una risoluzione di  $f$ . Per ogni risoluzione  $(\pi', \sigma')$  di  $f$  esiste un unico morfismo  $\alpha : X' \rightarrow Bl_{Bs(|V|)}X$  tale che  $\pi' = \pi \circ \alpha$  e  $\sigma' = \sigma \circ \alpha$ .*

Siano

$$E_i = \pi_i^{-1}(x_i), \quad \mathcal{E}_i = (\pi_{i+1} \circ \cdots \circ \pi_n)^*(E_i).$$

I divisori  $\mathcal{E}_i$  sono chiamati *configurazioni eccezionali* del morfismo birazionale  $\pi$ .

Se  $D$  è un divisore su  $X$  e  $m_i$  è la molteplicità di  $D$  in  $x_i$ , allora la trasformata propria di  $D$  tramite  $\pi$  è data dalla seguente formula

$$\pi^{-1}(D) = \pi^*(D) - \sum_{i=1}^N m_i \mathcal{E}_i.$$

**Proposizione 2.4.2.** *Sia  $\pi : Y \rightarrow X$  un morfismo regolare di superfici e siano  $\mathcal{E}_i, i = 1, \dots, N$  le sue configurazioni eccezionali. Allora:*

$$\mathcal{E}_i \cdot \mathcal{E}_j = -\delta_{ij},$$

$$\mathcal{E}_i \cdot K_Y = -1.$$

**Proposizione 2.4.3.** *Sia  $\phi_{|V|} : X \dashrightarrow X'$  un'applicazione birazionale tra superfici, sia  $D \in |\mathcal{L}|$ , e sia  $H'$  una sezione iperpiana di  $X'$ . Allora:*

1.  $D^2 - \sum_{i=1}^N m_i^2 = H'^2$ ;
2.  $D \cdot K_X - \sum_{i=1}^N m_i = H' \cdot K_X$ .

Diamo adesso un'altra definizione che ci servirà in seguito quando parleremo delle trasformazioni cremoniane e attraverso cui possiamo definire, in modo diverso, i punti infinitamente vicini.

Sia  $X$  una superficie e sia  $B(X)$  la categoria dei morfismi birazionali  $\pi : X' \rightarrow X$  di superfici. Un morfismo tra  $(X' \xrightarrow{\pi'} X)$  e  $(X'' \xrightarrow{\pi''} X)$  nella categoria  $B(X)$  è un'applicazione regolare  $\phi : X' \rightarrow X''$  tale che  $\pi'' \circ \phi = \pi'$ .

**Definizione 2.4.2.** *Lo spazio gonfiato  $X^g$  di una superficie  $X$  è l'insieme*

$$X^g = \left( \bigcup_{(X' \xrightarrow{\pi'} X) \in B(X)} X' \right) / \rho,$$

dove  $\rho$  è la relazione di equivalenza:  $x' \in X'$  è equivalente a  $x'' \in X''$  se e solo se l'applicazione razionale  $\pi''^{-1} \circ \pi' : X' \dashrightarrow X''$  manda isomorficamente un intorno aperto di  $x'$  in un intorno aperto di  $x''$ .

Spieghiamo in altre parole che cosa rappresenta lo spazio gonfiato di una superficie  $X$ . Siano  $X'$  e  $X''$  due superfici birazionalmente equivalenti a  $X$  e siano  $\pi' : X' \rightarrow X$  e  $\pi'' : X'' \rightarrow X$  le applicazioni birazionali. Lo spazio gonfiato  $X^g$  è l'unione delle superfici birazionali a  $X$  in cui vengono identificati tutti i punti di  $X'$  e  $X''$  che soddisfano la relazione di equivalenza descritta nella definizione.

Quindi in particolare se  $\pi' : X' \rightarrow X$  è la trasformazione monoidale centrata in un punto  $P \in X$  allora nessun punto della curva eccezionale  $E$  può essere identificato ad un punto di un'altra superficie  $X''$  birazionale a  $X$ , poiché l'applicazione  $\pi'$  non è un isomorfismo su  $E$ .

Da quanto appena detto e dalla definizione 2.2.1 notiamo che lo spazio gonfiato  $X^g$  è formato da tutti i punti di  $X$  e dai suoi punti infinitamente vicini. Sia  $\phi : X'' \rightarrow X'$  un morfismo in  $B(X)$ , se  $\phi$  è isomorfo in  $B(X')$  allo scoppio di un punto  $x' \in X'$  allora tutti i punti  $x'' \in \phi^{-1}(x')$  si dicono

punti infinitamente vicini a  $x'$  di primo ordine e sono denotati  $x'' \succ x'$ . Per induzione si definiscono i punti infinitamente vicini di ordine  $t$  denotati  $x'' \succ_t x'$ .

Sia  $\mathbb{Z}^{X^g}$  il gruppo abeliano libero generato da  $X^g$ . Ogni elemento in  $\mathbb{Z}^{X^g}$  è della forma  $\sum m_x x$ , dove  $x \in X^g$  e  $m_x \in \mathbb{Z}$ .

**Definizione 2.4.3.** *Un ciclo gonfiato è un elemento  $\eta = \sum m_x x$  di  $\mathbb{Z}^{X^g}$  che verifica le seguenti proprietà:*

1.  $m_x \geq 0$  per ogni  $x \in X^g$ ;
2.  $\sum_{x' \succ_x} m_{x'} \leq m_x$ .

Un ciclo gonfiato  $\eta = \sum m_i x_i$  può essere descritto tramite un grafo pesato detto il *diagramma di Enriques*. I vertici di tale grafo sono i punti  $x_i$ , due vertici  $x_i$  e  $x_j$  vengono uniti tramite uno spigolo orientato se uno dei punti è infinitamente vicino di primo ordine all'altro. Lo spigolo che unisce  $x_i$  e  $x_j$  è orientato verso  $x_i$  se  $x_j \succ x_i$ . Il peso di ogni spigolo corrisponde alla molteplicità del punto da cui parte.

Considereremo sempre cicli gonfiati  $\eta = \sum m_x x$  aventi il seguente ordine:  $x_i \succ x_j$  implica che  $j \leq i$ .

Un ciclo gonfiato  $\eta = \sum_{i=1}^N m_i x_i$  con tale ordine può rappresentare una successione di trasformazioni monoidali. Infatti sia  $x_1 \in X$  e sia  $\pi_1 : X_1 \rightarrow X$  la trasformazione monoidale centrata in  $x_1$ . Sia poi  $x_2 \in X_1$  un punto anche infinitamente vicino di primo ordine a  $x_1$  e  $\pi_2 : X_2 \rightarrow X_1$  la trasformazione monoidale centrata in  $x_2$  e così via. Si ottiene allora una successione di morfismi birazionali:

$$\pi : X_\eta = X_N \xrightarrow{\pi_N} X_{N-1} \xrightarrow{\pi_{N-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_2} X_1 \xrightarrow{\pi_1} X_0 = X.$$

Se  $\mathcal{L}$  è un fascio invertibile su  $X$  e  $\mathcal{E}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , sono le configurazioni eccezionali relative alla successione di trasformazioni monoidali sopra descritte, allora definiamo il sistema lineare

$$|\mathcal{L} - \eta| := \left\{ D \in |\mathcal{L}| : \pi^*(D) - \sum_{i=1}^N m_i \mathcal{E}_i \geq 0 \right\}.$$

Tutto quello che è stato introdotto in questo paragrafo sarà di fondamentale importanza nello studio delle superfici razionali di Del Pezzo, infatti esse

equivalgono allo scoppimento di un certo numero di punti sul piano e perciò le configurazioni eccezionali ci permetteranno di capire la loro geometria. I concetti trattati in questo paragrafo vengono utilizzati anche per descrivere un particolare tipo di applicazioni razionali che andremo ad analizzare nel prossimo paragrafo.

## 2.5 Trasformazioni cremoniane

Una *trasformazione cremoniana* è un'applicazione birazionale dell' $n$ -spazio proiettivo in se stesso  $\phi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ . Il gruppo delle trasformazioni birazionali di  $\mathbb{P}^n$  è detto *gruppo di Cremona* e si denota  $Cr(n)$ . Il gruppo di Cremona è isomorfo al gruppo dei  $k$ -automorfismi del campo delle funzioni razionali su  $\mathbb{P}^n$ , cioè  $Cr(n) \cong \text{Aut}_k(k(z_1, \dots, z_n))$ .

Una trasformazione cremoniana è definita da un sistema lineare di dimensione  $n$   $|V| \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|$  con  $d \geq 1$ . Il numero  $d$  è detto il *grado* della trasformazione cremoniana.

Se si definisce una base di  $V$  allora si ha una formula esplicita per la trasformazione:

$$\phi : [x_0, \dots, x_n] \mapsto [f_0(x_0, \dots, x_n), \dots, f_n(x_0, \dots, x_n)]$$

dove  $f_i(x_0, \dots, x_n)$  sono polinomi omogenei di grado  $d$  senza fattori comuni di grado positivo.

Un sistema lineare  $|V|$  che definisce una trasformazione cremoniana è detto *sistema lineare omaloidale*; il suo ideale base  $\mathfrak{b}(|V|)$  è il fascio di ideali associato all'ideale omogeneo generato dai polinomi  $f_0, \dots, f_n$ ; il suo luogo base è la sottovarietà chiusa di  $\mathbb{P}^n$  definita dalle equazioni  $f_0 = \dots = f_n = 0$ . Sappiamo che data una trasformazione cremoniana  $\phi$ , esiste una risoluzione  $(\pi, \sigma)$ , dove  $\pi, \sigma : Y \rightarrow \mathbb{P}^n$  sono morfismi birazionali. Sia  $E$  il divisore eccezionale della risoluzione avente la seguente proprietà:  $\pi^{-1}(\mathfrak{b}(|V|)) \cdot \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_Y(-E)$ .

Nel caso di una trasformazione cremoniana  $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  di grado  $d$  si ha che  $\mathcal{L}' = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$  e  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$ . Inoltre  $\omega_{\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)$ . Applichiamo allora la proposizione 2.4.3 e si ha che un sistema lineare omaloidale di grado  $d$  su

$\mathbb{P}^2$  deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$1 = d^2 - \sum_{i=1}^N m_i^2$$

$$3 = 3d - \sum_{i=1}^N m_i$$

Un sistema lineare omaloidale è uguale a un sistema lineare  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d) - \eta|$  dove  $\eta = \sum_{i=1}^N m_i x_i$  è un ciclo gonfiato detto *ciclo gonfiato della rete omaloidale* della trasformazione cremoniana che definisce.

**Teorema 2.5.1.** *Un ciclo gonfiato  $\eta = \sum_{i=1}^N m_i x_i$  su  $\mathbb{P}^2$  è uguale al ciclo gonfiato di una rete omaloidale di grado  $d$  se e solo se  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d) - \eta|$  contiene un divisore irriducibile e valgono le identità sopra descritte.*

Il vettore  $(d; m_1, \dots, m_N)$  è detto *caratteristica* della rete omaloidale. Vediamo qualche esempio. Consideriamo il caso di un sistema lineare omaloidale in cui  $m_1 = \dots = m_N = m$ . In questo caso le equazioni che il sistema omaloidale deve soddisfare sono:

- $d^2 - Nm^2 = 1$
- $3d - Nm = 3$ .

Le soluzioni di questo sistema sono solo le seguenti:

$$(d, m, N) = (1, 0, 0) \quad (2, 1, 3) \quad (5, 2, 5) \quad (8, 3, 7) \quad (17, 6, 8)$$

Consideriamo la prima soluzione, cioè  $(d, m, N) = (1, 0, 0)$ . Il sistema lineare omaloidale che soddisfa tale soluzione è un sistema lineare di curve di grado  $d = 1$ , cioè rette che non hanno intersezioni comuni. Quindi è un sistema lineare formato da tre rette

$$\begin{cases} ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0 \\ a'x_0 + b'x_1 + c'x_2 = 0 \\ a''x_0 + b''x_1 + c''x_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi la trasformazione cremoniana definita da questo sistema omaloidale è una proiettività.

### 2.5.1 Trasformazioni quadratiche

La seconda soluzione, cioè  $(d, m, N) = (2, 1, 3)$  è un sistema lineare di curve di grado  $d = 2$ , cioè di coniche passanti per tre punti assegnati  $P_1, P_2, P_3$  con molteplicità uno.

Siano  $P_1 = [0, 0, 1]$ ,  $P_2 = [0, 1, 0]$  e  $P_3 = [1, 0, 0]$ , tre punti propri. Scegliamo la seguente base del sistema omaloidale di coniche passanti per questi tre punti:  $V(x_1x_2)$ ,  $V(x_0x_2)$ ,  $V(x_0x_1)$ . Perciò la trasformazione cremoniana definita da questo sistema lineare omaloidale è data dalla seguente

$$\varphi_1 : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \quad [x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1]$$

La risoluzione di questa trasformazione cremoniana consiste della coppia  $(\pi, \sigma)$  dove  $\pi : X' \rightarrow \mathbb{P}^2$  è lo scoppimento dei punti  $P_1, P_2, P_3$  mentre  $\sigma : X' \rightarrow \mathbb{P}^2$  è la contrazione delle tre rette  $\tilde{L}_{12}, \tilde{L}_{13}, \tilde{L}_{23}$ , dove  $\tilde{L}_{ij}$  è la trasformata stretta tramite  $\pi$  della retta  $L_{ij}$  passante per  $P_i$  e  $P_j$ .

Questa trasformazione cremoniana è detta *trasformazione quadratica standard*.

In coordinate affini

$$z_1 = \frac{x_1}{x_0} \quad z_2 = \frac{x_2}{x_0}$$

questa trasformazione cremoniana è definita da

$$\bar{\varphi}_1 : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2 \quad (z_1, z_2) \mapsto (z_1^{-1}, z_2^{-1}).$$

Si osserva che applicando due volte la trasformazione quadratica standard

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_1 : [x_0, x_1, x_2] &\mapsto [x_0x_2x_0x_1, x_1x_2x_0x_1, x_1x_2x_0x_2] = \\ &= x_0x_1x_2 [x_0, x_1, x_2] = [x_0, x_1, x_2] \end{aligned}$$

otteniamo l'identità, perciò  $\varphi_1$  è un'involuzione su  $\mathbb{P}^2$ .

Consideriamo ora  $P_1 = [0, 0, 1]$ ,  $P_2 = [1, 0, 0]$  e il punto  $P_3$  corrispondente alla direzione tangente a  $x_0 = 0$ , quindi  $P_1$  e  $P_2$  sono punti propri mentre  $P_3 \succ P_1$ . Il sistema lineare omaloidale è formato dall'insieme delle coniche passanti per  $P_1$  e  $P_2$  e aventi stessa direzione tangente in  $x_0 = 0$ . Scegliendo la seguente base  $V(x_0x_2), V(x_0x_1), V(x_1^2)$  otteniamo la trasformazione cremoniana definita da

$$\varphi_2 : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2 \quad [x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_1^2, x_0x_1, x_0x_2].$$

In coordinate affini questa trasformazione è definita da

$$\bar{\varphi}_2 : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2 \quad (z_1, z_2) \mapsto (z_1^{-1}, z_2 z_1^{-2}).$$

Consideriamo adesso il caso in cui  $P_1 = [0, 0, 1]$ ,  $P_2$  corrisponde alla direzione tangente a  $x_0 = 0$  e  $P_3$  è un punto sulla trasformata propria della retta  $x_2 = 0$  dopo aver scoppiato il punto  $P_1$ . Perciò abbiamo scelto i punti  $P_1, P_2, P_3$  tali che  $P_3 \succ P_2 \succ P_1$ . Il sistema omaloidale determinato da queste condizioni è l'insieme delle coniche passanti per  $P_1$  aventi stessa direzione tangente in  $x_0 = 0$  e tali che dopo la trasformazione monoidale centrata in  $P_1$  esse si intersecano ancora in un punto. Se si sceglie come base  $V(x_0 x_2 - x_1^2), V(x_0^2), V(x_0 x_1)$ , la trasformazione cremoniana definita da questo sistema lineare omaloidale è definita da

$$\varphi_3 : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2 \quad [x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2 - x_1^2].$$

In coordinate affini questa trasformazione è definita da

$$\bar{\varphi}_3 : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2 \quad (z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_1^2 - z_2).$$

Tutte le trasformazioni quadratiche che abbiamo analizzato sono involuzioni. Si ha il seguente risultato.

**Proposizione 2.5.1.** *Sia  $\phi$  un'involuzione cremoniana quadratica. Allora esiste una trasformazione proiettiva  $g$  tale che  $g \circ \phi \circ g^{-1} = \varphi_i$  per qualche  $i = 1, 2, 3$ .*

Le altre soluzioni richiedono altri concetti non ancora introdotti, e verranno perciò analizzate in seguito.

## 2.5.2 Trasformazione di De Jonquière

Consideriamo un ciclo gonfiato  $\eta$  in cui ci sia un punto  $Q$  con molteplicità  $d-1$ . Allora i parametri del sistema omaloidale devono soddisfare le seguenti condizioni

$$d^2 - (d-1)^2 - \sum_{i=2}^N m_i^2 = 1$$

$$3d - (d-1) - \sum_{i=2}^N m_i = 3.$$

Queste due condizioni implicano che

$$\sum_{i=2}^N m_i(m_i - 1) = 0$$

il che ci dice che  $m_2 = \dots = m_n = 1$  e che  $N = 2d - 1$ .

Quindi il sistema omaloidale che otteniamo consiste in un sistema di curve di grado  $d$  passanti per  $Q$  con molteplicità  $d - 1$  e semplicemente per  $2d - 2$  punti che indichiamo  $x_0, \dots, x_{2d-2}$ .

La trasformazione cremoniana associata a questo sistema omaloidale è detta *trasformazione di De Jonquières*. A meno di un cambio di coordinate, possiamo assumere che  $q = [0, 0, 1]$ . Allora l'equazione di una curva di questo sistema omaloidale è del tipo

$$f(t_0, t_1, t_2) = t_2 f_{d-1}(t_0, t_1) + f_d(t_0, t_1) = 0.$$

dove  $f_{d-1}(t_0, t_1)$  e  $f_d(t_0, t_1)$  sono polinomi omogenei di grado rispettivamente  $d - 1$  e  $d$  nelle variabili  $t_0$  e  $t_1$ .

Contando le costanti vediamo che il sistema lineare di curve di grado  $d - 1$  passanti semplicemente per i punti  $x_1, \dots, x_{2d-2}$  e passanti per  $Q$  con molteplicità  $d - 2$  è non vuoto e ha dimensione nulla. Sia allora  $\Gamma$  l'unica curva irriducibile di questo sistema lineare, tale curva sarà allora descritta da un'equazione del tipo

$$g(t_0, t_1, t_2) = t_2 g_{d-2}(t_0, t_1) + g_{d-1}(t_0, t_1) = 0.$$

L'unione di questa curva con il fascio di rette passanti per  $Q$  è un sistema lineare di dimensione uno, cioè un fascio, contenuto nel sistema omaloidale. Sia  $\Phi$  una curva non contenuta in questo fascio avente equazione

$$f(t_0, t_1, t_2) = t_2 f_{d-1}(t_0, t_1) + f_d(t_0, t_1) = 0.$$

La trasformazione cremoniana associata a questo sistema omaloidale è definita una volta scelta una base del sistema. Consideriamo allora la seguente espressione

$$\phi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \quad [t_0, t_1, t_2] \mapsto [t_0 g(t_0, t_1, t_2), t_1 g(t_0, t_1, t_2), f(t_0, t_1, t_2)].$$

Una qualunque altra trasformazione data dallo stesso sistema omaloidale è ottenuta componendo  $\phi$  con una opportuna trasformazione proiettiva  $s$ ,

quindi tutte le trasformazioni cremoniane date dallo stesso sistema omaloideale sono del tipo  $s \circ \phi$ . Risulta inoltre che la trasformazione  $s \circ \phi$  trasforma il fascio di rette passanti per  $Q$  nel fascio di rette passanti per  $s(Q)$ . Se  $Q = s(Q)$  allora la trasformazione è detta *speciale*. La trasformazione inversa  $\phi^{-1}$  è una trasformazione di De Jonquière definita come

$$\phi^{-1} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \quad [t_0, t_1, t_2] \mapsto [t_0 g'(t_0, t_1, t_2), t_1 g'(t_0, t_1, t_2), f'(t_0, t_1, t_2)]$$

dove

$$\begin{aligned} g'(t_0, t_1, t_2) &= t_2 g_{d-2}(t_0, t_1) - f_{d-1}(t_0, t_1) \\ f'(t_0, t_1, t_2) &= t_2 g_{d-1}(t_0, t_1) + f_d(t_0, t_1). \end{aligned}$$

Notiamo che se  $f_{d-1}(t_0, t_1) = -g_{d-1}(t_0, t_1)$  allora la trasformazione è un'involuzione. Analizziamo adesso questo caso.

### Involuzione di De Jonquière

Ricordiamo che una *curva iperellittica* è una curva  $C$  di genere  $p_g \geq 2$  con un morfismo finito  $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$  di grado due. Considerando il sistema lineare corrispondente a tale morfismo, possiamo dire che una curva  $C$  di genere  $p_g \geq 2$  è iperellittica se e solo se possiede un sistema lineare di dimensione uno e grado due che indichiamo con il simbolo  $g_2^1$ .

Sia allora  $C$  una curva iperellittica di genere  $p_g$  e sia  $g_2^1$  il suo sistema lineare. Consideriamo il sistema lineare

$$D = |g_2^1 + a_1 + \cdots + a_g|$$

dove  $a_1, \dots, a_g \in C$ . Assumiamo che il divisore  $D_1 = a_1 + \cdots + a_g$  non sia contenuto nel sistema lineare  $|(g-2)g_2^1|$ , cioè che  $|K_C - D| = \emptyset$ . Allora applicando il teorema di Riemann-Roch si ha che  $l(D) = \deg(D) + 1 - p_g = 2 + p_g + 1 - g = 3$ , perciò  $\dim |D| = l(D) - 1 = 2$ . Quindi il sistema lineare  $|D|$  definisce un'applicazione

$$\varphi : C \dashrightarrow \mathbb{P}^2.$$

L'immagine di questa applicazione è una curva  $H_{p_g+2}$  piana di grado  $p_g + 2$  avente un punto  $Q$  di molteplicità  $p_g$  che equivale all'immagine del divisore

$D_1$ . Scegliendo opportunamente le coordinate proiettive si può supporre che  $Q = [0, 0, 1]$  e dunque che  $H_{p_g+2}$  sia descritta da un'equazione del tipo

$$t_2^2 f_{p_g}(t_0, t_1) + 2t_2 f_{p_g+1}(t_0, t_1) + f_{p_g+2}(t_0, t_1) = 0.$$

Sia  $l$  una qualsiasi retta passante per  $Q$ . Allora  $l$  interseca  $H_{p_g+2}$  in altri due punti  $a, b \neq Q$ . Per ogni  $x \in l$  sia  $y$  il quarto punto tale che le coppie  $(a, b)$  e  $(x, y)$  siano coniugate armoniche.

Ricordiamo che due coppie non ordinate di punti  $(a, b)$  e  $(x, y)$  in  $\mathbb{P}^1$  sono dette *coniugate armoniche* se

$$-2\beta\beta' + \alpha\gamma' + \alpha'\gamma = 0$$

dove  $V(\alpha t_0^2 + 2\beta t_0 t_1 + \gamma t_1^2) = \{a, b\}$  e  $V(\alpha' t_0^2 + 2\beta' t_0 t_1 + \gamma' t_1^2) = \{x, y\}$ . Il nostro obiettivo è quello di definire un'applicazione birazionale  $T : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  la cui restrizione ad una retta passante per  $Q$  agisca associando ad ogni punto  $x$  il quarto punto  $y$  tale che le coppie  $(a, b)$  e  $(x, y)$  siano coniugate armoniche. Notiamo che tale applicazione non è definita nei punti in cui la retta  $l$  passante per  $Q$  è tangente a  $H_{p_g+2}$  e risulta non essere definita anche nel punto  $Q$ . Siano  $x_1, \dots, x_{2p_g+2}$  i punti di tangenza.

Facciamo vedere che l'applicazione  $T$  è la trasformazione di De Jonquière definita dal sistema lineare

$$|(g+2)l - (g+1)Q - x_1 - \dots - x_{2p_g+2}| \quad (2.1)$$

Consideriamo ora la derivata prima di  $H_{p_g+2}$  rispetto al punto  $x_2$  data dall'equazione

$$\Gamma := t_2 f_{p_g}(t_0 t_1) + f_{p_g+1}(t_0, t_1) = 0.$$

Si può dimostrare che questa curva passa per i punti  $x_1, \dots, x_{2p_g+2}$  e che  $Q$  è un suo punto di molteplicità  $p_g$ .

Quanto appena detto ci suggerisce che  $\Gamma$  è la curva che è stata utilizzata per definire la trasformazione di De Jonquière. Per far vedere che effettivamente si tratta dell'involuzione di De Jonquière, dobbiamo mostrare che la curva  $V(t_2 f_{p_g+1}(t_0, t_1) + f_{p_g+2}(t_0 t_1))$  appartiene al sistema lineare (2.1). Semplici calcoli mostrano che i punti di intersezione di  $\Gamma$  con  $H_{p_g+2}$  sono della forma  $x_i = [1, a_i, b_i]$ . Scegliendo coordinate opportune possiamo assumere

che  $b_i \neq 0$ , allora risulta che

$$f_{p_g}(1, a_i) = -\frac{f_{p_g+1}}{b_i},$$

sostituiamo ora questa uguaglianza nell'equazione di  $H_{p_g+2}$

$$b_i^2\left(-\frac{f_{p_g+1}}{b_i}\right) + 2b_i f_{p_g+1}(1, a_i) + f_{p_g+2}(1, a_i) = b_i f_{p_g+1}(1, a_i) + f_{p_g+2}(1, a_i) = 0.$$

Quindi l'equazione  $t_2 f_{p_g+1}(t_0, t_1) + f_{p_g+2}(t_0, t_1) = 0$  è contenuta nel sistema lineare  $|(g+2)l - (g+1)Q - x_1 - \dots - x_{2p_g+2}|$ .

La trasformazione di De Jonquière è quindi definita dalle seguenti equazioni

$$t'_0 = t_0(t_2 f_{p_g}(t_0, t_1) + f_{p_g+1}(t_0, t_1))$$

$$t'_1 = t_1(t_2 f_{p_g}(t_0, t_1) + f_{p_g+1}(t_0, t_1))$$

$$t'_2 = -t_2 f_{p_g+1}(t_0, t_1) - f_{p_g+2}(t_0, t_1).$$

di conseguenza per quanto detto precedentemente, è un'involuzione.

Avendo dato un'espressione a questa involuzione, possiamo dimostrare in modo semplice che la sua restrizione ad una retta si comporta come detto. Consideriamo la retta  $l = V(t_1 - tt_0)$ . Allora la restrizione a  $l$  di questa involuzione è data dalle seguenti equazioni

$$t'_0 = t_0(t_2 f_{p_g}(1, t) + t_0 f_{p_g+1}(1, t))$$

$$t'_1 = t(t_2 f_{p_g}(1, t) + t_0 f_{p_g+1}(1, t))$$

$$t'_2 = -t_2 f_{p_g+1}(1, t) - t_0 f_{p_g+2}(1, t).$$

In coordinate affini la trasformazione diventa

$$x \mapsto y = \frac{-x f_{p_g+1}(1, t) - f_{p_g+2}(1, t)}{x f_{p_g}(1, t) - f_{p_g+1}(1, t)}$$

cioè

$$xy f_{p_g}(1, t) + (x + y) f_{p_g+1}(1, t) + f_{p_g+2}(1, t) = 0.$$

Quindi la coppia  $(x, y)$  soddisfa l'equazione quadratica

$$z^2 - z(x + y) + xy = 0$$

e la coppia  $(a, b)$  dove  $a, b \in l \cap H_{p_g+2}$  soddisfa l'equazione quadratica

$$z^2 f_{p_g}(1, t) + 2z f_{p_g+1}(1, t) + f_{p_g+2}(1, t) = 0$$

perciò le coppie  $(a, b)$  e  $(x, y)$  risultano coniugate armoniche.

## Capitolo 3

# Superfici di Del Pezzo

Come detto nell'introduzione, in questa tesi andiamo a studiare alcune superfici razionali e le costruzioni geometriche ad esse legate.

La prima famiglia di superfici razionali che andremo a studiare sono le superfici di Del Pezzo. La loro costruzione è strettamente legata alla teoria introdotta nel capitolo precedente. Infatti, esse vengono costruite mediante lo scoppio dei punti base di certi sistemi lineari su  $\mathbb{P}^2$ . Risulta perciò chiaro, in seguito a quanto detto nel capitolo precedente, che sono superfici birazionalmente equivalenti a  $\mathbb{P}^2$  e perciò razionali.

### 3.1 Superfici di Del Pezzo

**Definizione 3.1.1.** *Un divisore  $D$  su una superficie  $X$  si dice numericamente effettivo o nef se per ogni curva irriducibile  $C$  su  $X$  il numero di intersezione  $C.D$  è non negativo.  $D$  si dice grande (in inglese big) se  $D^2 > 0$ .*

Osserviamo che se un divisore  $D$  è ampio allora è anche grande e numericamente effettivo. Infatti se  $D$  è un divisore ampio allora  $mD$  è un divisore molto ampio per qualche  $m \in \mathbb{Z}$ , cioè esiste un'immersione  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$  tale che  $\mathcal{O}(mD) = \mathcal{O}_X(1)$ . Sia  $C$  una curva. Allora esiste un iperpiano  $H \subset \mathbb{P}^n$  tale che  $C \not\subset H$ . Allora il divisore  $D' \sim mD$  corrispondente ad  $H$  ha intersezione positiva con  $C$ . Quindi  $0 < D'.C = (mD).C = m(C.D)$ , cioè  $D.C = \frac{1}{m}D'.C > 0$ . Perciò il divisore  $D$  è numericamente effet-

tivo. Stesso ragionamento vale per dimostrare che  $D$  è grande. Infatti  $D^2 = \frac{1}{m^2}(mD)^2 = \frac{1}{m^2}D'^2 > 0$  poiché  $D'$  è una sezione iperpiana e perciò ha autointersezione positiva.

**Definizione 3.1.2.** *Una superficie di Del Pezzo  $S$  è una superficie il cui divisore anticanonico  $-K_S$  è ampio. Una superficie di Del Pezzo debole è una superficie il cui divisore anticanonico  $-K_S$  è nef e grande.*

Il numero  $d = K_S^2$  è detto il *grado* della superficie di Del Pezzo debole  $S$ .

*Esempio.* Consideriamo il sistema lineare  $\mathfrak{d} = |3L - P_1 - \dots - P_r|$  di cubiche su  $\mathbb{P}^2$  passanti per i punti  $P_1, \dots, P_r$ , dove  $L$  è una retta in  $\mathbb{P}^2$ . Supponiamo che tra questi punti non ci siano quattro punti collineari e non ci siano sette punti che giacciono su una conica. Allora si dimostra che se  $r \leq 6$ , il corrispondente sistema lineare  $\mathfrak{d}' = |\pi^*3L - E_1 - \dots - E_r|$  sulla superficie  $X'$  ottenuta da  $\mathbb{P}^2$  scoppiando i punti  $P_1, \dots, P_r$ , è molto ampio, e si ha un'immersione di  $\tilde{X}$  in  $\mathbb{P}^{9-r}$ .

Osserviamo inoltre che se  $D' \in \mathfrak{d}'$  allora  $D'^2 = 9 - r$ . Sappiamo che il divisore canonico di  $\mathbb{P}^2$  è  $-3L$  e che  $K_{\tilde{X}} = \pi^*K_X + \sum E_i$ , quindi nel nostro caso si ha che  $K_{\tilde{X}} = -\pi^*3L + E_1 + \dots + E_r$ . Questo ci dice che  $K_{\tilde{X}} = -D'$  e perciò  $\omega_{\tilde{X}} \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-1)$ .

Osserviamo allora che, sotto opportune condizioni, la superficie che si ottiene scoppiando  $r$  punti su  $\mathbb{P}^2$  è una superficie di Del Pezzo. Analizziamo in modo rigoroso queste condizioni.

**Lemma 3.1.1.** *Sia  $S$  una superficie di Del Pezzo debole. Allora ogni curva irriducibile  $C$  su  $S$  avente autointersezione negativa è una curva razionale nonsingolare con  $C^2 = -1$  o  $C^2 = -2$ .*

*Dimostrazione.* La formula di aggiunzione ci dice che  $2p_g - 2 = C^2 + C.K_S$ . Essendo  $S$  una superficie di Del Pezzo debole allora si ha che  $-C.K_S \geq 0$ . Riscrivendo la formula di aggiunzione nella seguente forma  $C^2 = 2p_g - 2 - C.K_S$  vediamo che l'autointersezione della curva  $C$  è sottoposta alle condizioni  $0 > C^2 \geq -2$ , la prima disuguaglianza deriva dal fatto che stiamo considerando curve con autointersezione negativa. Perciò gli unici valori che

può assumere l'autointersezione di  $C$  sono  $-1$  e  $-2$ . Altra conseguenza è che  $p_g = 0$  cioè  $C \cong \mathbb{P}^1$  è una curva razionale normale.  $\square$

Una curva razionale nonsingolare avente autointersezione negativa  $-n$  è detta una  $(-n)$ -curva.

**Lemma 3.1.2.** *Sia  $S$  una superficie di Del Pezzo debole. Allora*

$$H^i(S, \mathcal{O}_S) = 0, \quad i \neq 0$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione di questo lemma risulta una immediata conseguenza del teorema di annullamento di Ramanujam che dice

- per ogni divisore numericamente effettivo e grande  $D$  su una varietà nonsingolare  $X$  si ha

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + D)) = 0, \quad i > 0.$$

Perciò scrivendo  $0 = -K_S + K_S$  e applicando il teorema appena enunciato, risulta dimostrato il lemma.  $\square$

**Lemma 3.1.3.** *Sia  $X$  una superficie tale che  $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ . Sia  $C$  una curva irriducibile su  $X$  tale che  $|-K_X - C| \neq \emptyset$  e  $C \notin |K_X|$ . Allora  $C \cong \mathbb{P}^1$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $D \in |-K_X - C|$  un divisore effettivo. Allora  $-K_X \sim C + D$  perciò  $K_X + C \sim -D \approx 0$ . Quindi essendo  $-D$  un divisore non effettivo risulta  $|K_X + C| = \emptyset$ .

Dal teorema di Riemann-Roch si ha

$$0 = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + C)) = \frac{1}{2}((K_X + C)^2 - (K_X + C).K_X) + 1$$

$$-\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) + \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) \geq \frac{1}{2}(C^2 + K_X.C) = \dim H^1(C, \mathcal{O}_C).$$

Perciò  $\dim H^1(C, \mathcal{O}_C) = 0$  che implica  $C \cong \mathbb{P}^1$ .  $\square$

**Proposizione 3.1.1.** *Sia  $S$  una superficie di Del Pezzo debole.*

1. *Sia  $\sigma : S \rightarrow \bar{S}$  la contrazione di una  $(-1)$ -curva  $E$ . Allora  $\bar{S}$  è una superficie di Del Pezzo debole;*

2. Sia  $\pi : S' \rightarrow S$  la trasformazione monoidale centrata in un punto  $x$  che non giace su una  $(-2)$ -curva. Assumiamo  $K_S^2 \geq 2$ . Allora  $S'$  è una superficie di Del Pezzo debole.

*Dimostrazione.* Per dimostrare la prima parte della proposizione dobbiamo provare che il divisore anticanonico  $-K_{\bar{S}}$  è numericamente effettivo e grande. Sappiamo che  $K_S = \sigma^* K_{\bar{S}} + E$ ; sia  $\bar{C}$  una qualsiasi curva irriducibile su  $\bar{S}$  allora

$$K_{\bar{S}}.\bar{C} = \sigma^* K_{\bar{S}}.\sigma^* \bar{C} = (K_S - E).\sigma^* \bar{C} = K_S.\sigma^* \bar{C} \leq 0$$

Quindi  $-K_{\bar{S}}.\bar{C} \geq 0$  perciò  $-K_{\bar{S}}$  è numericamente effettivo. Inoltre  $K_{\bar{S}}^2 = K_S^2 + 1 \geq 1$  e perciò è anche grande.

Per quanto riguarda il secondo punto, cerchiamo di capire innanzitutto le ipotesi. Se il punto  $x$  fosse su una  $(-2)$ -curva  $F$ , allora dal lemma 3.1.1 sappiamo che  $F$  è una curva razionale perciò il suo genere geometrico è nullo, quindi dal teorema di Riemann-Roch si ha che  $F^2 + F.K_S = -2$  il che ci dice che  $F.K_S = 0$ . Ricordiamo inoltre che  $\pi^* F = \tilde{F} + 2E$ , allora

$$K_{S'}.\pi^* F = \pi^* K_S.\pi^* F + E.\pi^* F = F.K_S - 2 = -2.$$

Quindi scegliendo un punto su una  $(-2)$ -curva si avrebbe un divisore anticanonico  $-K_{S'}$  che non è numericamente effettivo. Invece richiedere che  $K_S^2 > 1$  ci assicura che il divisore anticanonico  $-K_{S'}$  sia grande infatti  $K_{S'}^2 = K_S^2 - 1 > 0$ .

Dal teorema di Riemann-Roch si ha

$$\dim |-K_{S'}| \geq \frac{1}{2}((-K_{S'})^2 - (-K_{S'}).K_{S'}) = K_{S'}^2 > 0.$$

Perciò  $|-K_{S'}| \neq \emptyset$ , allora ogni curva irriducibile  $C'$  tale che  $-K_{S'}.C' < 0$  deve essere una componente propria di un divisore in  $|-K_{S'}|$ , infatti non può essere linearmente equivalente a  $-K_{S'}$  perché  $(-K_{S'})^2 > 0$ . Sia  $E$  la curva eccezionale di  $S'$ , allora  $-K_{S'}.E = 1 > 0$ , allora possiamo assumere che  $C' \neq E$ . Sia  $C = \pi(C')$ . Allora

$$-K_{S'}.C' = \pi^*(-K_S).C' - E.C' = -K_S.C - \mu_x(C).$$

La curva  $C$  risulta perciò essere una componente irriducibile propria di qualche divisore in  $|-K_S|$  allora per la proposizione precedente si ha che  $C \cong \mathbb{P}^1$

perciò la molteplicità di  $C$  in  $x$  è  $\mu_x(C) \leq 1$ . Quindi  $0 > -K_{S'} \cdot C' \geq -K_S \cdot C - 1$  che implica  $-K_S \cdot C = 0$ . Ma questo ci dà una contraddizione perché applicando la formula di aggiunzione si avrebbe che  $C^2 + C \cdot K_S = -2$  e quindi  $C^2 = -2$ .  $\square$

**Definizione 3.1.3.** Una struttura di scoppimento su una superficie di Del Pezzo debole  $S$  è una composizione di morfismi birazionali

$$\pi : S = S_N \xrightarrow{\pi_N} S_{N-1} \xrightarrow{\pi_{N-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_2} S_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}^2$$

dove ogni  $\pi_i : S_i \rightarrow S_{i-1}$  è la trasformazione monoidale centrata in un punto  $x_i$  dello spazio gonfiato di  $\mathbb{P}^2$ .

Una struttura di scoppimento su una superficie di Del Pezzo debole definisce una base  $(e_0, e_1, \dots, e_N)$  in  $\text{Pic}(S)$ , dove  $e_0$  è la preimmagine tramite  $\pi$  di una retta, e  $e_i$  è la classe delle configurazioni eccezionali  $\mathcal{E}_i$  definite dal punto  $x_i$ . Questa base è detta *base geometrica*.

**Corollario 3.1.1.** Sia  $\eta = \sum_{i=1}^r m_i x_i$  un ciclo gonfiato su  $\mathbb{P}^2$  e sia  $S_\eta$  il suo scoppimento. Allora  $S_\eta$  è una superficie di Del Pezzo debole se e solo se

1.  $r \leq 8$ ;
2. il diagramma di Enriques di  $\eta$  è l'unione disgiunta di catene;
3.  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) - \eta'| = \emptyset$  per ogni  $\eta' \subset \eta$  che consiste di quattro punti;
4.  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) - \eta'| = \emptyset$  per ogni  $\eta' \subset \eta$  che consiste di sette punti.

*Dimostrazione.* Le condizioni del corollario ci dicono che il numero dei punti che si possono scoppiare affinché la superficie che si ottiene sia una superficie di Del Pezzo debole è al più otto. Per quanto riguarda la seconda condizione, dire che il diagramma di Enriques è unione disgiunta di catene vuol dire che nell'insieme di punti da scoppiare non si possono scegliere due punti che giacciono sullo stesso divisore eccezionale. Cioè dati i punti  $x_i, x_j, x_k$  tali che  $x_i \succ x_j$  al primo ordine, non può succedere che anche  $x_k \succ x_j$  al primo ordine. La terza e la quarta condizione ci dicono che nell'insieme di punti da scoppiare non ci possono essere quattro punti collineari, e che non

ci possono essere sette punti che giacciono su una conica.

Iniziamo con il dimostrare la necessità. Supponiamo che  $S_\eta$  sia una superficie di Del Pezzo debole, allora il suo divisore canonico è  $K_S = -\pi^*3L - E_1 - \dots - E_r$ , dove  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$  è la trasformazione monoidale centrata in  $x_1, \dots, x_r$  e  $L$  è una retta in  $\mathbb{P}^2$ . La sua autointersezione sarà perciò  $K_S^2 = 9 - r$ , quindi  $r \leq 8$ . Sappiamo inoltre che  $S_\eta$  non contiene curve aventi autointersezione  $< -2$ . Allora ogni configurazione eccezionale  $\mathcal{E}_i$  non può contenere curve aventi autointersezione  $< -2$ . Questa condizione è verificata se i punti gonfiati corrispondenti alle configurazioni eccezionali  $\mathcal{E}_i$  formano una catena totalmente ordinata. Questo verifica la seconda condizione. A meno di un riordinamento, sia  $\eta' = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ . Sia inoltre  $D \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) - \eta'|$ . La classe della trasformata propria di  $D$  è definita da  $e_0 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - \sum_{i \geq 5} m_i e_i$  quindi la sua autointersezione è  $\leq -3$ . Perciò anche la terza condizione è verificata. Supponiamo adesso che la quarta condizione non sia soddisfatta. Allora se  $D \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) - \eta'|$  si ha che la classe del divisore della trasformata propria di  $D$  è  $2e_0 - \sum_{i=1}^7 e_i - m_8 e_8$ , quindi la sua autointersezione è  $\leq -3$ . Perciò anche la quarta condizione deve essere verificata.

Supponiamo che siano verificate le quattro condizioni. Procediamo per induzione sul numero dei punti da scoppiare. Se  $r = 1$  non c'è nulla da dimostrare. Sia  $r = N \leq 8$ , e sia  $\mathcal{E}_N = \pi_N^{-1}(x_N)$  l'ultima configurazione eccezionale della struttura di scoppimento definita da  $\eta$ . Risulta immediato che  $\mathcal{E}_N$  è una  $(-1)$ -curva. Il ciclo gonfiato  $\eta' = \eta - x_N$  ovviamente soddisfa le quattro condizioni. Per ipotesi induttiva  $S_{\eta'}$  è una superficie di Del Pezzo debole, perciò applicando la Proposizione 3.1.1 dobbiamo solamente verificare che il punto  $x_N$  non giace su una  $(-2)$ -curva. La seconda condizione ci assicura che il punto  $x_N$  non giace su nessuna configurazione eccezionale  $\mathcal{E}_i$  per  $i \neq N$ . Si dimostra che una  $(-2)$ -curva su una superficie di Del Pezzo debole  $S'$  di grado  $\leq 7$  può essere

- la contrazione ad un punto tramite l'applicazione canonica  $S' \rightarrow \mathbb{P}^2$
- la trasformata inversa propria di una retta per tre punti
- la trasformata inversa propria di una conica per sei punti

Se  $x_N$  giacesse sulla trasformata propria di una retta per tre punti o di una conica per cinque punti allora rispettivamente la terza o la quarta condizione non sarebbe soddisfatta.  $\square$

Un insieme di punti dello spazio gonfiato  $X^g$  che soddisfano le quattro condizioni del Corollario 3.1.1 è detto un insieme di punti *quasi in posizione generale*.

Si dice che un insieme di punti  $P_1, \dots, P_r$ , è in *posizione generale* se sono verificate le seguenti condizioni:

1. tutti i punti sono punti propri, cioè  $P_i \in X$ ;
2. non esistono tre punti collineari;
3. non esistono sei punti che giacciono su una conica;
4. tutte le cubiche passanti per questi punti non hanno in tali punti un punto singolare.

**Proposizione 3.1.2.** *Sia  $\mathfrak{d} = |3L - P_1 - \dots - P_r|$  il sistema lineare su  $\mathbb{P}^2$  di cubiche piane passanti per i punti  $P_1, \dots, P_r$ . Supponiamo che non ci siano tre punti collineari e non ci siano 7 punti che giacciono su una conica. Se  $r \leq 7$  allora  $\mathfrak{d}$  non ha punti base non assegnati.*

*Dimostrazione.* È sufficiente mostrare il caso  $r = 7$ . Vedremo che se  $P_1, \dots, P_7$  sono in posizione generale, allora  $\mathfrak{d}$  non ha punti base non assegnati. Per mostrare ciò, è sufficiente far vedere che per ogni  $Q \neq P_i$  esiste una cubica passante per  $P_1, \dots, P_7$  ma non per  $Q$ .

*Caso 1.*

Supponiamo che esistano tre punti  $P_1, P_2, P_3$  collineari con  $Q$ , sia  $L^*$  questa retta. I punti  $P_4, P_5, P_6, P_7$  non sono collineari per ipotesi, allora possiamo assumere che  $P_4, P_5, P_6$  non sono collineari. La conica  $\Gamma_{12456}$  passante per  $P_1, P_2, P_4, P_5, P_6$  e la retta  $L_{37}$  passante per  $P_3, P_7$  formano una cubica contenente  $P_1, \dots, P_7$  ma non  $Q$ . Infatti se  $Q$  appartenesse a  $\Gamma_{12456}$ , allora questa conica conterrebbe la retta  $L^*$ , perciò sarebbe una conica riducibile, ma ciò implicherebbe che i punti  $P_4, P_5, P_6$  sono collineari che è una contraddizione.

*Caso 2.*

Supponiamo che  $Q$  non sia collineare con nessuno insieme di tre punti, ma che  $Q$  giaccia su una conica  $\Gamma^*$ , necessariamente irriducibile, passante per sei dei punti  $P_i$ , siano  $P_1, \dots, P_6$ . Allora  $\Gamma_{12347} + L_{56}$  è una cubica che non passa per  $Q$ . Infatti se  $Q \in \Gamma_{12347}$ , quindi  $P_1, P_2, P_3, P_4, Q$  sarebbero in questa conica e anche in  $\Gamma^*$ , ma allora  $\Gamma_{12347} = \Gamma^*$ . Ma allora  $P_1, \dots, P_7$  sarebbero tutti contenuti in  $\Gamma^*$ , che è una contraddizione.

*Caso 3.*

Supponiamo che  $Q$  non sia collineare a nessun insieme di tre punti, e che  $Q$  non sia contenuto in nessuna conica passante per sei dei punti  $P_i$ . Consideriamo le tre curve cubiche  $C_i = \Gamma_{1234i} + L_{jk}$ , dove  $(i, j, k) = (5, 6, 7)$  in qualche ordine. Mostriamo che una di queste curve non contiene  $Q$ . Se  $Q \in L_{56}$ , allora  $Q \notin L_{57}$  e  $Q \notin L_{67}$  altrimenti  $P_5, P_6, P_7, Q$  sarebbero collineari. Quindi escludendo  $C_7$  possiamo assumere che  $Q \notin L_{57}$  e  $Q \notin L_{67}$ . Allora se  $Q \in C_5$  e  $Q \in C_6$  si ha che  $Q \in \Gamma_{12345}$  e  $Q \in \Gamma_{12346}$ . Consideriamo la conica  $\Gamma' = \Gamma_{1234Q}$ . Se  $\Gamma'$  è irriducibile allora tutte e tre le coniche sono uguali e perciò  $Q \in \Gamma_{123456}$ , che è una contraddizione. Se  $\Gamma'$  è riducibile si ha uno dei seguenti casi:

- $\Gamma' = L_{123} + L_{4Q}$ ; in questo caso  $\Gamma_{12345} = L_{123} + L_{45}$  e  $\Gamma_{12346} = L_{123} + L_{46}$  perciò  $P_4, P_5, P_6, Q$  sono collineari, che è una contraddizione.
- $\Gamma' = L_{12Q} + L_{34}$ ; in questo caso  $\Gamma_{12345} = L_{12} + L_{345}$  e  $\Gamma_{12346} = L_{12} + L_{346}$  perciò  $P_3, P_4, P_5, P_6$  sono collineari, che è una contraddizione.

□

**Corollario 3.1.2.** *Con le stesse ipotesi del teorema precedente si ha:*

1. se  $r \leq 7$ , allora  $\dim \mathfrak{d} = 9 - r$ ;
2. se  $r = 8$ , allora  $\dim \mathfrak{d} = 1$  e quasi tutte le curve in  $\mathfrak{d}$  sono irriducibili.

*Dimostrazione.* Per dimostrare il primo punto basta osservare che se  $r \leq 7$  allora non ci sono punti base non assegnati e perciò ad ogni passo la dimensione cala di uno, e che un sistema lineare di cubiche senza punti base ha dimensione nove.

Per il secondo punto basta osservare che, dati otto punti in posizione generale, esiste solo un numero finito di curve cubiche che passano per tre rette, o per una conica per otto punti e una retta.  $\square$

**Teorema 3.1.1.** *Sia  $\mathfrak{d}$  il sistema lineare di curve cubiche piane aventi come punti base un insieme di  $r$  punti in posizione generale. Se  $r \leq 6$ , allora il corrispondente sistema lineare  $\mathfrak{d}'$  sulla superficie  $X'$  ottenuta dallo scoppimento di  $P_1, \dots, P_r$  su  $\mathbb{P}^2$  è molto ampio.*

*Dimostrazione.* Dobbiamo verificare che  $\mathfrak{d}$  non ha punti base non assegnati e che per ogni  $P$ , il sistema lineare  $\mathfrak{d} - P$  non ha punti base non assegnati. La prima cosa da dimostrare è conseguenza immediata della proposizione 3.1.2. Per la seconda condizione, notiamo che se tra i  $P_i$  non ci sono tre punti collineari e non ci sono sei punti che giacciono su una conica allora per ogni  $P$ , gli  $r + 1$  punti  $P_1, \dots, P_r, Q$  saranno sicuramente in posizione generale e perciò possiamo applicare di nuovo la proposizione 3.1.2.  $\square$

**Corollario 3.1.3.** *Con le stesse ipotesi del capitolo precedente per ogni  $r = 0, 1, \dots, 6$ , otteniamo un'immersione di  $X'$  in  $\mathbb{P}^{9-r}$  di una superficie di grado  $9 - r$ , il cui fascio canonico  $\omega_{X'} \cong \mathcal{O}_{X'}(-1)$ . Quindi  $X'$  è una superficie di Del Pezzo.*

### 3.1.1 Modello anticanonico

Tramite il modello anticanonico siamo in grado di descrivere e analizzare tutte le superfici di Del Pezzo.

Prima di procedere richiamiamo alcuni concetti.

Sia  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo finito di superfici. Sia  $R$  l'insieme dei punti in cui l'applicazione indotta da  $f$  sugli spazi tangenti non è un isomorfismo. Su  $R$  è definita una struttura di schema data localmente dall'annullarsi del determinante dello jacobiano di  $f$ . In altre parole, dato un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  di superfici, si ha una successione esatta a destra

$$\Omega_X \rightarrow f^*\Omega_Y \rightarrow \Omega_{X/Y} \rightarrow 0.$$

Nel caso in cui il morfismo  $f$  sia finito allora si ha che l'applicazione che manda  $f^*\Omega_Y \rightarrow \Omega_X$  è iniettiva e perciò si ha una successione esatta

$$0 \rightarrow \Omega_X \rightarrow f^*\Omega_Y \rightarrow \Omega_{X/Y} \rightarrow 0.$$

Passando alla successione dei determinanti, si ottiene la seguente

$$0 \rightarrow \Lambda^2\Omega_X \rightarrow \Lambda^2 f^*\Omega_Y \rightarrow \Lambda^2\Omega_{X/Y} \rightarrow 0.$$

Quindi  $R$  risulta essere il conucleo dell'applicazione  $\Lambda^2 df : \Lambda^2\Omega_X \rightarrow \Lambda^2 f^*\Omega_Y$ , perciò  $R = \Lambda^2\Omega_{X/Y}$ . La curva  $R$  è detta *curva di ramificazione*. L'immagine della curva di ramificazione  $C = f(R)$  è detta *curva di diramazione*.

Poiché  $\Lambda^2\Omega_X$  equivale al divisore canonico  $K_X$  e  $\Lambda^2 f^*\Omega_Y$  equivale a  $f^*K_Y$ , possiamo riscrivere la successione esatta nel modo seguente

$$0 \rightarrow K_X \rightarrow f^*K_Y \rightarrow R \rightarrow 0.$$

Risulta allora immediata la seguente formula

$$K_X \sim f^*K_Y + R.$$

Ricordiamo che una superficie  $S$  è normale se data una sua immersione in uno spazio proiettivo  $S \subset \mathbb{P}^n$ , il suo anello delle coordinate  $K(S)$  è un dominio integralmente chiuso. Possiamo esprimere questa condizione dicendo che  $S \subset \mathbb{P}^n$  è proiettivamente normale se e solo se per ogni  $d \geq 0$  l'applicazione naturale:

$$\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S(d))$$

è suriettiva. È possibile inoltre riparafrasare questo in termini di sistemi lineari, infatti risulta che  $S \subset \mathbb{P}^n$  è proiettivamente normale se e solo se per ogni  $d \geq 0$  la restrizione a  $S$  del sistema lineare formato da tutti i divisori di grado  $d$  su  $\mathbb{P}^n$ , è un sistema lineare completo, in altre parole, se il sistema lineare tagliato dalle ipersuperfici di grado  $d$  in  $\mathbb{P}^n$  è completo.

Enunciamo il seguente risultato che ci sarà utile nel seguito.

**Teorema 3.1.2.** *Sia  $X \subset \mathbb{P}^n$  una superficie non degenera di grado  $d$ . Allora  $d \geq n - 1$ .*

Ricordiamo che una *componente fissa* di un sistema lineare  $\mathfrak{d}$  è un divisore effettivo  $F$  su  $X$  tale che per ogni  $D \in \mathfrak{d}$  risulta  $D = F + D'$ , dove  $D'$  è un divisore effettivo. Al variare di  $D$  in  $\mathfrak{d}$  i divisori  $D'$  formano un sistema lineare  $\mathfrak{d}'$  tale che  $\dim \mathfrak{d} = \dim \mathfrak{d}'$ . Inoltre le applicazioni indotte da  $\mathfrak{d}$  e  $\mathfrak{d}'$ , rispettivamente  $\varphi_{\mathfrak{d}}$  e  $\varphi_{\mathfrak{d}'}$  coincidono.

**Lemma 3.1.4.** *Sia  $S$  una superficie di Del Pezzo debole con  $K_S^2 = d$ . Allora*

$$\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(-rK_S)) = 1 + \frac{1}{2}r(r+1)d.$$

*Dimostrazione.* Il teorema di annullamento di Ramanujam ci dice che per ogni  $r \geq 0$  e  $i > 0$

$$H^i(S, \mathcal{O}_S(-rK_S)) = H^i(S, \mathcal{O}_S(K_S + (-r-1)K_S)) = 0$$

Il teorema di Riemann-Roch ci dice invece

$$\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(-rK_S)) = \frac{1}{2}(-rK_S - K_S) \cdot (-rK_S) + 1 = 1 + \frac{1}{2}r(r+1)d.$$

□

**Teorema 3.1.3.** *Sia  $S$  una superficie di Del Pezzo debole di grado  $d$  e sia  $\mathcal{N}$  l'insieme delle  $(-2)$ -curve su  $S$ . Allora*

1.  $|-K_S|$  non ha componenti fisse;
2. se  $d \geq 2$ ,  $|-K_S|$  non ha punti base;
3. se  $d \geq 3$ ,  $|-K_S|$  definisce un'applicazione  $\varphi$  su  $\mathbb{P}^d$  che è un isomorfismo al di fuori di  $\mathcal{N}$ . La superficie immagine  $\bar{S}$  è una superficie normale non degenera di grado  $d$ ;
4. se  $d = 2$ ,  $|-K_S|$  definisce un'applicazione regolare  $\phi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$  che si fattorizza tramite un morfismo birazionale  $f : S \rightarrow \bar{S}$  su una superficie normale e un'applicazione finita  $\pi : \bar{S} \rightarrow \mathbb{P}^2$  di grado due la cui curva di diramazione è una curva di grado quattro.
5. Se  $d = 1$ ,  $|-2K_S|$  definisce un'applicazione regolare  $\phi : S \rightarrow \mathbb{P}^3$  che si fattorizza tramite un morfismo birazionale  $f : S \rightarrow \bar{S}$  su una superficie normale e un'applicazione finita  $\pi : \bar{S} \rightarrow Q \subset \mathbb{P}^3$  di grado due, dove  $Q$  è un cono quadratico. Il morfismo  $\pi$  ha come curva di diramazione una curva di grado sei tagliata su  $Q$  da una superficie cubica.

*Dimostrazione.* Dimostriamo il teorema nel caso in cui  $S$  sia ottenuta dallo scoppiamento su  $\mathbb{P}^2$  di  $N \leq 8$  punti  $x_i$ .

1. Supponiamo che il sistema lineare anticanonico  $|-K_S|$  abbia una componente fissa  $F$ . Allora scriviamo  $|-K_S| = F + |M|$  dove  $|M|$  è la parte mobile. Se  $F^2 > 0$  allora per il teorema di Riemann-Roch si ha che

$$\dim |F| \geq \frac{1}{2}(F^2 - F.K_S) \geq \frac{1}{2}(F^2) > 0$$

perciò  $F$  non è una componente fissa, altrimenti si dovrebbe avere  $\dim |-K_S| = \dim |M|$ . Allora risulta  $F^2 \leq 0$ . Se  $F^2 = 0$  allora anche  $F.K_S = 0$ , perciò  $F = \sum n_i R_i$  dove  $R_i$  sono  $(-2)$ -curve. Risulta perciò che  $F^2 \leq -2$ . Vediamo ora che

$$\begin{aligned} M^2 &= (K_S - F)^2 = K_S^2 - 2K_S.F + F^2 \leq K_S^2 + F^2 \leq d - 2 \\ -K_S.M &= K_S^2 + K_S.F \leq d. \end{aligned}$$

Supponiamo che  $|M|$  sia irriducibile. Poiché  $\dim |M| = \dim |-K_S| = d$ , il sistema lineare  $|M|$  definisce un'applicazione razionale su  $\mathbb{P}^d$  la cui immagine è una superficie non degenere di grado  $\leq d - 2$ , ma questo contraddice il Teorema 3.1.2. Supponiamo ora che  $|M|$  sia riducibile, cioè definisce un'applicazione razionale su una curva non degenere  $C \subset \mathbb{P}^d$  di grado  $t$ . Il teorema 3.1.2 ci dice che  $t \geq d$ . Poiché  $S$  è razionale, anche  $C$  è razionale, perciò la preimmagine di una sezione iperpiana è l'unione disgiunta di  $t$  curve linearmente equivalenti. Allora  $M \sim tM_1$  e si ha

$$d \geq -K_S.M = -tK_S.M_1 \geq d(-K_S.M_1).$$

Questa disuguaglianza ci dice che le uniche possibilità sono:  $-K_S.M = 0$  oppure  $-K_S.M = 1$ . Nel primo caso, cioè  $-K_S.M = 0$  si ha che  $M^2 < 0$ , ma una curva con autointersezione negativa è una componente fissa del sistema lineare, perciò si deve avere che  $-K_S.M = 1$ . Perciò  $d = t$ . Ma allora si ha che  $M^2 = d^2 M_1^2 \leq d - 2$  ma questo non è possibile. Quindi  $F$  non può essere una componente fissa.

2. Sia  $d \geq 2$ . Con il punto precedente abbiamo dimostrato che  $|-K_S|$  è irriducibile. Allora un elemento generale di  $|-K_S|$  è una curva irriducibile

$C$  con  $\omega_C = \mathcal{O}_C(C + K_S) = \mathcal{O}_C$ . Se  $C$  è nonsingolare, allora è una curva ellittica e il sistema lineare  $|\mathcal{O}_C(C)|$  è di grado  $d \geq 2$  e non ha punti base. Ciò è vero anche nel caso in cui  $C$  sia una curva irriducibile singolare di genere aritmetico uno.

Consideriamo la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S(C) \rightarrow \mathcal{O}_C(C) \rightarrow 0.$$

Applicando la successione esatta di coomologia, vediamo che la restrizione del sistema lineare  $|C| = |-K_S|$  a  $C$  è suriettiva. Perciò si ha la seguente

$$0 \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(C)) \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}_C(C)) \rightarrow 0.$$

Poiché  $|\mathcal{O}_C(C)|$  non ha punti base, si ha un omomorfismo suriettivo

$$H^0(S, \mathcal{O}_C(C)) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C(C).$$

Questo implica che l'omomorfismo

$$H^0(S, \mathcal{O}_C(C)) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_S(C)$$

è suriettivo, perciò  $|C| = |-K_S|$  non ha punti base.

3. Sia  $d \geq 3$ . Siano  $x$  e  $y$  due punti che non giacciono su nessun divisore eccezionale  $E$ . Sia  $f : S' \rightarrow S$  la trasformazione monoidale centrata in  $x$  e in  $y$ . Sappiamo che  $S'$  è una superficie di Del Pezzo di grado  $d-2$ . Allora per il punto precedente sappiamo che il sistema lineare  $|-K_{S'}|$  non ha componenti fisse. Perciò

$$\dim |-K_S - x - y| = \dim |-K_{S'} - E_x - E_y| \geq 1.$$

Questo ci dice che  $|-K_S|$  separa i punti  $x$  e  $y$ . Infatti sappiamo che un sistema lineare  $|D|$  separa i punti  $P$  e  $Q$  se e solo se  $Q$  non è un punto base del sistema lineare  $|D - P|$ , inoltre la dimensione del sistema lineare cala di uno ogni volta si assegna un punto base.

Consideriamo l'applicazione  $\varphi : S \dashrightarrow \bar{S}$  definita dal sistema lineare  $|-K_S|$ , l'immagine di questa applicazione è una superficie non degenera di grado  $d = (-K_S)^2$ . Sappiamo che se  $-K_S.R = 0$  allora  $R^2 = -2$ , quindi  $\varphi$

contrae  $R$  ad un punto. Se  $d = 3$ , allora  $\bar{S}$  è una superficie cubica con singolarità isolate, che corrispondono alle immagini delle componenti connesse di  $N$ . Sappiamo che una ipersuperficie senza singolarità in codimensione uno è una varietà normale. Perciò in questo caso  $\bar{S}$  è una superficie normale. Se  $d = 4$ , allora  $S$  è ottenuta dallo scoppimento di un punto su una superficie di Del Pezzo debole  $S'$  di grado  $d' = 3$ , e tale punto non giace su una  $(-2)$ -curva. Allora  $\bar{S}'$  è ottenuta da  $\bar{S}$  tramite una proiezione da un punto nonsingolare. Poiché  $\bar{S}'$  è normale, anche  $\bar{S}$  è normale. Procedendo in questo modo si ha che per ogni  $d \geq 3$   $\bar{S}$  è normale.

4. Sia  $d = 2$ . Dal punto 2. il sistema lineare  $|-K_S|$  definisce un'applicazione regolare  $\phi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Poiché  $K_S^2 = 2$ , questa applicazione è di grado due. Usando la fattorizzazione di Stein, vedi [7] cap.3 §11, possiamo fattorizzare  $\phi$  tramite un morfismo birazionale su una superficie normale  $f : S \rightarrow \bar{S}$  e un'applicazione finita di grado due  $\pi : \bar{S} \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Sappiamo inoltre che  $f_*\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\bar{S}}$ . La formula di Hurwitz ci dice che

$$\omega_{\bar{S}} \cong \pi^*(\omega_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{L}) \quad (3.1)$$

dove  $s \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{L}^{\otimes 2})$  si annulla lungo la curva di diramazione  $W$  di  $\pi$ . Si ha

$$\mathcal{O}_S(K_S) = \omega_S = (\pi \circ f)^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) = f^*(\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)).$$

Perciò  $f^*\omega_{\bar{S}} = \omega_S$  e quindi

$$f^*\omega_{\bar{S}} \cong f^*(\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)).$$

Applicando  $f_*$  e usando la formula della proiezione e il fatto che  $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ , otteniamo che  $\omega_{\bar{S}} \cong \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ . Quindi dalla (3.1) si ha che  $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ , segue che  $\deg W = 4$ .

5. Sia  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$  lo scoppimento di otto punti  $x_1, \dots, x_8$ . Allora  $|-K_S|$  è la trasformata propria del fascio  $|3l - x_1 - \dots - x_8|$  delle cubiche piane passanti per i punti  $x_1, \dots, x_8$ . Sia  $x_9$  il nono punto di intersezione di due cubiche che generano il fascio. Il punto  $x'_9 = \pi^{-1}(x_9)$  è il punto base di  $|-K_S|$ . Dal teorema di Bertini, teorema 1.2.4, tutte le fibre eccetto

un numero finito, sono curve nonsingolari. Sia  $F$  un elemento di  $|-K_S|$ . Consideriamo la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-K_S) \rightarrow \mathcal{O}_S(-2K_S) \rightarrow \mathcal{O}_F(-2K_S) \rightarrow 0.$$

Il sistema lineare  $|\mathcal{O}_F(-2K_S)|$  su  $F$  è di grado due e non ha punti base. Inoltre dalla dimostrazione del lemma 3.1.4 sappiamo che  $H^1(S, \mathcal{O}_S(-K_S)) = 0$ , allora l'applicazione

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(-2K_S)) \rightarrow H^0(F, \mathcal{O}_F(-2K_S))$$

è suriettiva. Applicando lo stesso ragionamento usato nella dimostrazione del punto 2 si dimostra che  $|-2K_S|$  non ha punti base. Il lemma 3.1.4 ci dice che  $\dim |-2K_S| = 3$ .

Sia  $\phi : S \rightarrow \mathbb{P}^3$  l'applicazione regolare definita da  $|-2K_S|$ . La sua restrizione ad un elemento  $F$  di  $|-K_S|$  è definita dal sistema lineare di grado due, perciò è di grado due. Quindi l'applicazione  $f : S \rightarrow \bar{S}$  ha grado  $t > 1$ . L'immagine di  $\phi$  è una superficie di grado  $j$ . Poiché  $(-2K_S)^2 = 4 = tj$  concludiamo che  $t = j = 2$ , perciò l'immagine di  $\phi$  è una superficie quadrica  $Q$  in  $\mathbb{P}^3$  e le immagini degli elementi  $F$  di  $|-K_S|$  sono rette  $l_F$  su  $Q$ . Ma allora  $Q$  è un cono quadratico, infatti tutte le rette  $l_F$  si intersecano nel punto  $\phi(x'_9)$ .

Sia  $S \xrightarrow{f} \bar{S} \xrightarrow{\pi} Q$  la fattorizzazione di Stein. Notiamo che una  $(-2)$ -curva non passa per il punto base  $x'_9$  di  $|-K_S|$  perché  $-K_S.R = 0$ . Perciò  $\pi(x'_9)$  è un punto nonsingolare  $\bar{q}$  di  $\bar{S}$ . La sua immagine in  $Q$  è il vertice  $q$  di  $Q$ . Poiché  $\pi$  è un'applicazione finita, l'anello locale  $\mathcal{O}_{\bar{S}, \bar{q}}$  è un'algebra finita su  $\mathcal{O}_{Q, q}$  di grado due. Possiamo assumere  $\mathcal{O}_{\bar{S}, \bar{q}} \cong K[u, v]$ . Se  $u \in \mathcal{O}_{Q, q}$  allora  $v$  soddisfa l'equazione monica  $v^2 + av + b$  a coefficienti in  $\mathcal{O}_{Q, q}$ , dove dopo aver cambiato  $v$  con  $v + \frac{1}{2}a$  possiamo assumere che  $a = 0$ . Allora  $\mathcal{O}_{Q, q}$  è uguale all'anello di invarianti in  $K[u, v]$  tramite l'automorfismo  $u \mapsto u$  e  $v \mapsto -v$ , che è isomorfo a  $K[u, v^2]$ . Sappiamo che  $q$  è un punto singolare perciò l'anello  $\mathcal{O}_{Q, q}$  è non regolare. Allora possiamo assumere che  $u^2 = a$  e  $v^2 = b$  allora  $\mathcal{O}_{Q, q}$  è l'anello degli invarianti dell'azione  $(u, v) \mapsto (-u, -v)$ . Questa azione è libera fuori dall'ideale massimale  $(u, v)$ , questo mostra che l'applicazione  $\pi$  è nonramificata in un intorno di  $\bar{q}$  senza  $\bar{q}$ . In particolare la curva di diramazione di  $\pi$  non passa per  $q$ .

Allo stesso modo in cui è stato dimostrato nel punto precedente, si dimostra che la curva di diramazione  $W$  di  $\phi$  appartiene al sistema lineare  $|\mathcal{O}_Q(3)|$ .  $\square$

Usando le notazioni del teorema appena dimostrato, la superficie  $\bar{S}$  è detta il *modello anticanonico di  $S$* .

Nei prossimi paragrafi vedremo più in dettaglio alcune superfici di Del Pezzo.

## 3.2 Superfici di Del Pezzo di grado 4

Le superfici di Del Pezzo di grado quattro sono quelle ottenute tramite lo scoppimento su  $\mathbb{P}^2$  di cinque punti  $P_1, \dots, P_5$  in posizione generale.

**Proposizione 3.2.1.** *Sia  $S$  una superficie di Del Pezzo di grado quattro. Allora  $S$  è isomorfa ad una superficie nonsingolare di grado quattro in  $\mathbb{P}^4$  descritta dalle seguenti equazioni*

$$F_1 = \sum_{i=0}^4 t_i^2 = 0 \quad F_2 = \sum_{i=0}^4 a_i t_i^2 = 0$$

dove gli  $a_i$  sono tutti distinti.

*Dimostrazione.* Iniziamo con il dimostrare che  $S = Q_1 \cap Q_2$  dove  $Q_1$  e  $Q_2$  sono due quadriche. Sappiamo che  $S$  è normale, perciò si ha la seguente successione esatta

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^4, I_S(2)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2)) \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(2)) \rightarrow 0.$$

Dal lemma 3.1.4 si ha che  $\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(-rK_S)) = 1 + \frac{1}{2}r(r+1)d$ , quindi nel nostro caso

$$\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(2)) = \dim H^0(S, \mathcal{O}_S(-2K_S)) = 13.$$

Questo ci dice che  $S$  è il luogo base del fascio

$$\mathcal{P} = \lambda Q_1 + \mu Q_2 = 0$$

di quadriche. Consideriamo adesso il sistema lineare  $\mathcal{P}$ . Sappiamo allora che il luogo della quadriche singolari di  $\mathcal{P}$  è un'equazione omogenea di grado cinque nelle coordinate  $(\lambda, \mu)$ , vedi [5]. Poiché  $S$  è nonsingolare, questa

equazione non ha radici multiple, infatti in caso contrario  $\mathcal{P}$  risulterebbe contenere una quadrica riducibile oppure una quadrica avente un punto singolare su  $S$ , in entrambi i casi  $S$  risulterebbe singolare.

Siano  $P_1, \dots, P_5$  i punti singolari delle quadriche singolari di  $\mathcal{P}$ . Supponiamo che essi siano contenuti in un iperpiano  $H \subset \mathbb{P}^4$ . Poiché nessuna quadrica del sistema lineare contiene  $H$ , allora la restrizione  $\mathcal{P}|_H$  contiene  $\geq 5$  elementi singolari. Questo implica che tutte le quadriche di  $\mathcal{P}|_H$  sono singolari, infatti riapplicando il ragionamento appena fatto, sarebbero dovute essere esattamente quattro. Allora il teorema di Bertini, 1.2.4, ci dice che tutte le quadriche sono singolari in un punto  $P \in H$ . Conseguenza di quanto appena detto è che tutte le quadriche in  $\mathcal{P}$  sono tangenti ad  $H$  in  $P$  e una delle quadriche deve essere singolare in  $P$ . Ma allora anche  $S$  risulta essere singolare in  $P$ . Questa è una contraddizione che deriva dall'aver supposto che i punti  $P_1, \dots, P_5$  fossero contenuti in un iperpiano. Perciò  $P_1, \dots, P_5$  generano  $\mathbb{P}^4$ .

Scegliendo opportunamente le coordinate in  $\mathbb{P}^4$  possiamo supporre che i punti singolari delle quadriche di  $\mathcal{P}$  siano i punti

$$[1, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 1].$$

Allora ogni iperpiano  $V(T_i) = (T_i = 0)$  è un iperpiano tangente alle quadriche di  $\mathcal{P}$  nel punto  $P_i$ . Risulta allora immediato che le equazioni delle quadriche  $Q_1$  e  $Q_2$  sono

$$F_1 = \sum_{i=0}^4 t_i^2 = 0 \quad F_2 = \sum_{i=0}^4 a_i t_i^2 = 0.$$

□

La superficie di Del Pezzo di grado quattro contiene sedici  $(-1)$ -curve, che risultano essere le seguenti:

- $e_i$  con  $i = 1, \dots, 5$ , sono le cinque curve eccezionali;
- $H - e_i - e_j$  con  $1 \leq i < j \leq 5$ , sono le dieci rette passanti per due dei cinque punti;
- $2H - e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5$ , è l'unica conica passante per i cinque punti.

Sia  $X$  una superficie quartica in  $\mathbb{P}^4$ . Sia  $P \in X$  un punto e sia

$$\pi_P : X \rightarrow \mathbb{P}^3$$

la proiezione di  $X$  da  $P$ . Allora l'immagine  $Y = \pi_P(X)$  è una superficie cubica in  $\mathbb{P}^3$  isomorfa allo scoppimento di  $X$  in  $P$ . Infatti consideriamo la contrazione

$$\pi : X \cong S \rightarrow \mathbb{P}^2$$

Poiché  $S$  è una superficie di Del Pezzo la sua inversa è lo scoppimento di cinque punti in posizione generale. Sia  $P_6 = \pi(P)$  allora  $Y$  è il modello anticanonico dello scoppimento del ciclo gonfiato  $P_1 + \dots + P_6$ . Se  $P_1, \dots, P_6$  sono ancora in posizione generale allora otteniamo una superficie cubica. Quindi possiamo riassumere la situazione con il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} S_4 \cong X & \xrightarrow{\pi_P} & Y \cong S_3 \subset \mathbb{P}^3 \\ & \searrow \pi_5 & \swarrow \pi_6 \\ & \mathbb{P}^2 & \end{array}$$

dove  $\pi_5$  e  $\pi_6$  sono rispettivamente lo scoppimento di cinque e sei punti in posizione generale su  $\mathbb{P}^2$ ;  $S_4$  e  $S_3$  sono le superfici di Del Pezzo rispettivamente di grado quattro e tre.

Consideriamo adesso

$$\pi_P : X \rightarrow \mathbb{P}^3$$

la proiezione da un punto  $P \in \mathbb{P}^4 \setminus X$ , cioè da un punto che non giace sulla superficie quartica. Sia allora  $Q_P$  l'unica quartica del sistema lineare  $\mathcal{P}$  che definisce  $X$ , che contiene  $P$ . Allora si ha il seguente risultato.

**Teorema 3.2.1.** *Assumiamo che la quadrica  $Q_P$  sia nonsingolare. Allora l'immagine  $Y = \pi_P(X)$  è una superficie quartica in  $\mathbb{P}^3$  singolare lungo una conica nonsingolare. Inoltre ogni superficie quartica irriducibile in  $\mathbb{P}^3$  singolare lungo una conica nonsingolare è generata in questo modo da una superficie di Del Pezzo di grado quattro.*

*Dimostrazione.* Come prima cosa, facciamo vedere che  $Y$  è una superficie quartica. Se ciò non fosse, la proiezione sarebbe un'applicazione finita di

grado due su una quadrica. Allora se si considera la restrizione  $\mathcal{P}|_l$ , dove  $l$  è una qualsiasi retta passante per  $P$  che interseca  $X$ , si ottengono due punti base. Questo vuol dire che nel sistema lineare c'è una quadrica che contiene  $l$  e perciò  $P$ . Poiché  $Q_P$  è l'unica quadrica che contiene  $P$  risulta evidente che  $Q_P$  contiene tutte le rette che uniscono  $P$  con un punto di  $X$ . Ricordando che l'insieme delle rette passanti per un punto su una superficie quadrica sono contenute nell'iperpiano tangente a questo punto, risulta che  $X$  è contenuta in un iperpiano, ma questo contraddice il fatto che la superficie è nondegenere. Perciò  $X$  è una superficie quartica.

Sia ora  $H$  l'iperpiano tangente di  $Q_P$  in  $P$  e sia  $C = H \cap X$ . L'intersezione  $H \cap Q_P$  è una superficie quadrica irriducibile in  $H$  avente  $P$  come punto singolare. La curva  $C$  giace su questa quadrica ed è tagliata da una quadrica  $Q' \cap H$  per qualche quadrica  $Q' \neq Q_P$  nel sistema lineare  $\mathcal{P}$ . Allora la proiezione da  $P$  definisce un'applicazione di grado due da  $C$  su una conica  $C'$  uguale alla proiezione del cono  $H \cap Q_P$ . Questa proiezione genera tutto  $\mathbb{P}^3$  come la proiezione da  $H$ . Questa proiezione definisce un'applicazione birazionale da  $X$  a  $Y$  che non è un isomorfismo sulla conica  $C'$  quindi  $Y$  è singolare lungo  $C'$ , ed è nonsingolare fuori  $C'$ .

Viceversa sia  $C$  una conica nonsingolare in  $\mathbb{P}^3$  e consideriamo il sistema lineare di quadriche aventi  $C$  come luogo base  $|I_C(2)|$ . Scegliamo ora delle coordinate opportune in modo tale che  $C$  sia descritta dalle seguenti equazioni:

$$t_0 = 0 \quad t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 0$$

Allora  $|I_C(2)|$  ha come possibile base  $V(t_0t_i)$  e  $V(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)$ . Questo sistema lineare definisce un'applicazione razionale

$$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^4 \quad [t_0, t_1, t_2, t_3] \mapsto [t_0^2, t_0t_1, t_0t_2, t_0t_3, t_1^2 + t_2^2 + t_3^2]$$

la cui immagine è una quadrica nonsingolare  $Q_1$  descritta dall'equazione

$$Q_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_0y_4 = 0.$$

L'applicazione razionale inversa di  $f$  è la proiezione dal punto  $[0, 0, 0, 0, 1]$ .

Sia  $Y$  una superficie quartica irriducibile in  $\mathbb{P}^3$  singolare lungo  $C$ . Allora l'equazione che la descrive è del tipo

$$(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)^2 + 2t_0(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)g_1(t_1, t_2, t_3) + t_0^2g_2(t_0, t_1, t_2, t_3) = 0$$

dove  $g_1$  e  $g_2$  sono polinomi omogenei di grado uno e due rispettivamente. La sua immagine giace su  $Q_1$  ed è tagliata dalla quadrica di equazione

$$y_4^2 + y_4 g_1(y_1, y_2, y_3) + g_2(y_0, y_1, y_2, y_3) = 0$$

Perciò l'immagine di  $Y$  è una superficie  $X$  di Del Pezzo di grado quattro definita dalle equazioni

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_0 y_4 = 0$$

$$y_4^2 + y_4 g_1(y_1, y_2, y_3) + g_2(y_0, y_1, y_2, y_3) = 0$$

La superficie  $X$  non contiene il punto  $[0, 0, 0, 0, 1]$ , perciò  $f$  è un isomorfismo al di fuori del piano  $t_0 = 0$ .  $\square$

### 3.3 Superfici di Del Pezzo di grado 3

Le superfici di Del Pezzo di grado tre sono quelle ottenute scoppiando su  $\mathbb{P}^2$  sei punti  $P_1, \dots, P_6$  in posizione generale. Denotiamo ancora una volta  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$  la trasformazione monoidale centrata in  $P_1, \dots, P_6$ . Queste superfici vengono anche dette *superfici cubiche in  $\mathbb{P}^3$* . Questa terminologia deriva dal fatto che il divisore anticanonico

$$-K_S \sim 3H - \sum_{i=1}^6 e_i$$

definisce un'applicazione  $\varphi' : S \rightarrow \mathbb{P}^3$ , la cui immagine, cioè il modello anticanonico di  $S$ , è una superficie cubica in  $\mathbb{P}^3$ . La superficie di Del Pezzo di grado tre contiene esattamente ventisette  $(-1)$ -curve, che risultano essere le seguenti:

- $e_i$  con  $i = 1, \dots, 6$ , le curve eccezionali
- $H - e_i - e_j$  con  $1 \leq i < j \leq 6$ , le trasformate strette delle rette su  $\mathbb{P}^2$  passanti per due punti  $P_i, P_j$
- $2H - e_{i_1} - \dots - e_{i_5}$  con  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_5 \leq 6$ , le trasformate strette delle coniche su  $\mathbb{P}^2$  passanti per cinque punti scelti tra  $P_1, \dots, P_6$

Queste ventisette  $(-1)$ -curve sono tutte e sole le rette contenute in una superficie cubica in  $\mathbb{P}^3$ . Dimostriamo quanto appena affermato. Se  $L$  è una retta su  $S$  allora si ha che  $\deg(L) = 1$  e il suo genere aritmetico  $p_a(L) = 0$ . Allora dalla formula di aggiunzione si ha che  $2p_g(L) - 2 = L^2 + L.K_S$  cioè  $L^2 = -1$ . Se invece  $C$  è una curva irriducibile avente autointersezione negativa, allora  $p_a(C) \geq 0$  quindi applicando nuovamente la formula di aggiunzione otteniamo  $C^2 = 2p_a(C) - 2 + C.K_X$  quindi risulta  $p_a(C) = 0$  e  $\deg(C) = 1$  e perciò  $C^2 = -1$ .

Per concludere la dimostrazione di quanto affermato sopra resta da fa vedere che se  $L$  è una retta allora  $L$  è una delle curve sopra elencate. Supponiamo che  $L$  non sia una delle curve sopra elencate, allora:

$$L \sim aH - \sum_{i=1}^6 b_i e_i \quad \text{con } a > 0 \quad \text{e } b_i \geq 0,$$

Quindi  $\deg(L) = 3a - \sum_{i=1}^6 b_i = 1$  e  $C^2 = a^2 \sum_{i=1}^6 b_i^2 = -1$ , dunque si ottengono le seguenti condizioni

$$\sum_{i=1}^6 b_i = 3a - 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^6 b_i^2 = a^2 + 1.$$

Applicando la disuguaglianza di Schwartz  $|\sum x_i y_i|^2 \leq |\sum x_i^2| \cdot |\sum y_i^2|$  con  $x_i = 1$  e  $y_i = b_i$  si ottiene la seguente disuguaglianza  $(\sum b_i)^2 \leq 6(\sum b_i^2)$  e quindi applicando le condizioni trovate prima si ha

$$3a^2 - 6a - 5 \leq 0.$$

Risolvendo questa disuguaglianza si trovano valori di  $a$  e  $b_i$  tali che  $L$  è una delle curve sopra elencate.

Vediamo adesso un'altra caratteristica delle superfici di Del Pezzo di grado tre. Un insieme di sei rette  $\{A_1, \dots, A_6\}$  che sono a due a due sghembe è detta una *sesta*. Esempi di seste sono l'insieme delle curve eccezionali  $\{E_1, \dots, E_6\}$  oppure le immagini delle trasformate strette delle coniche passanti per cinque punti  $\{C_1, \dots, C_6\}$ . Una *sesta doppia* è una insieme di dodici rette  $\{A_1, \dots, A_6; B_1, \dots, B_6\}$  tali che  $\{A_1, \dots, A_6\}$  e  $\{B_1, \dots, B_6\}$  sono seste e  $A_i$  interseca  $B_j$  per ogni  $j \neq i$ . Un esempio di sesta doppia è, usando le stesse notazioni dell'esempio delle seste,  $\{E_1, \dots, E_6; C_1, \dots, C_6\}$ . Sulla

superficie cubica ci sono esattamente settantadue seste che sono associate in trentasei doppie seste.

**Proposizione 3.3.1.** *Sia  $\bar{S}$  una superficie cubica in  $\mathbb{P}^3$ , e sia  $E'_1, \dots, E'_6$  scelta tra le ventisette rette su  $\bar{S}$ . Allora c'è un altro morfismo  $\pi' : \bar{S} \rightarrow \mathbb{P}^2$ , che rende  $\bar{S}$  isomorfo allo scoppimento di  $\mathbb{P}^2$  in sei punti  $P'_1, \dots, P'_6$ , in posizione generale, tali che  $E'_1, \dots, E'_6$  corrispondono alle curve eccezionali di  $\pi'$ .*

Questa proposizione ci dice che qualunque sesta sostituisce le curve eccezionali  $E_1, \dots, E_6$ . Dire che una qualunque sesta sostituisce le curve eccezionali, vuol dire che se si scelgono ventisette rette in  $\mathbb{P}^3$  che soddisfano le condizione di incidenza delle ventisette rette su una superficie cubica, e si sceglie una qualunque sesta  $E'_1, \dots, E'_6$  allora esiste un automorfismo della configurazione delle ventisette rette, ossia una permutazione, che associa  $E_i \mapsto E'_i$ . Quindi questa proposizione ci dice che per ogni sesta  $E'_1, \dots, E'_6$  esiste un unico automorfismo che tale che  $E_i \mapsto E'_i$  per  $i = 1, \dots, 6$ .

### 3.4 Superfici di Del Pezzo di grado 2

Le superfici di Del Pezzo di grado due sono quelle ottenute dallo scoppimento su  $\mathbb{P}^2$  di sette punti  $P_1, \dots, P_7$  in posizione generale. Sia allora  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$  la trasformazione monoidale centrata in  $P_1, \dots, P_7$ .

Sia  $S$  una superficie di Del Pezzo di grado due, allora il suo divisore anticanonico è

$$-K_S \sim 3H - \sum_{i=1}^7 e_i.$$

Quindi  $-K_S$  può essere visto come il pull back del sistema lineare di cubiche passanti per i sette punti assegnati. Applicando quanto detto nel paragrafo precedente, il divisore anticanonico  $|-K_S|$  definisce un'applicazione

$$\varphi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$$

che si fattorizza tramite

$$\varphi : S \xrightarrow{\sigma} \bar{S} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mathbb{P}^2$$

dove  $\bar{S}$  è il modello anticanonico di  $S$ . Poiché  $K_S^2 = 2$  allora  $\varphi$  è un ricoprimento doppio di  $\mathbb{P}^2$ .

Cerchiamo adesso di capire che tipo di curva è la curva di ramificazione di questo morfismo. Per la formula precedente si ha

$$R \sim K_S - \varphi^* K_{\mathbb{P}^2} \sim K_S - \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \sim K_S - 3K_S = -2K_S \sim 6H - 2 \sum_{i=1}^7 e_i.$$

Quindi la curva di ramificazione  $R$  è una sestica. Invece la curva di diramazione  $C = \varphi(R)$  è una quartica come dimostrato nel teorema 3.1.3, infatti  $(-K_S.R) = 4$ .

Studiamo adesso la geometria della superficie di Del Pezzo di grado due. Sappiamo che una superficie cubica in  $\mathbb{P}^3$  contiene ventotto rette bitangenti, cerchiamo allora di individuare queste rette bitangenti.

Risulta chiaro che  $(-K_S.e_1) = 1$  e  $(R.e_i) = 2$ , questo ci dice che  $l_i = \varphi(e_i)$  è una retta che interseca  $C$  in due punti. Sia  $C_i$  l'unica curva nel sistema lineare  $|-K_S - e_i|$ , unica perché assegnando un'altra condizione esiste un'unica curva che soddisfa questa ulteriore condizione. Osserviamo che  $\pi(C_i)$  è una cubica nel sistema lineare di cubiche passanti per  $P_1, \dots, P_7$  avente  $P_i$  come punto doppio e avente le stesse tangenti principali a  $\pi(R)$ . Quindi  $\varphi^{-1}(l_i) = e_i \cup C_i$ . Questo ci dice che  $l_i$  è la retta tangente a  $C$  nei due punti  $l_i \cap C$ , e perciò  $l_i$  è una retta bitangente a  $C$ . Abbiamo dunque trovato sette delle ventotto rette bitangenti a  $C$ .

Per trovare le rimanenti, consideriamo le ventuno curve riducibili in  $|K_S|$

$$C_{ij} \sim (H - e_i - e_j) + (2H - \sum_{k \neq i, j} e_k)$$

dove  $H - e_i - e_j$  è il pull back della retta in  $\mathbb{P}^2$  passante per  $P_i, P_j$  e  $2H - \sum_{k \neq i, j} e_k$  è il pull back della conica passante per i cinque punti diversi da  $P_i, P_j$ . Facciamo vedere che le curve  $C_{ij}$  vengono mandate in rette tramite  $\varphi$  e che tali rette sono bitangenti a  $C$ . Infatti le seguenti cinquantasei curve sono tutte  $(-1)$ -curve:

- $e_1, \dots, e_7$
- $C_1, \dots, C_7$

- $H - e_i - e_j$  per  $i \neq j$
- $2H - \sum_{k \neq i,j} e_k$  per  $i, j$  fissati

e perciò vengono mandate in rette  $l \in \mathbb{P}^2$ . Inoltre  $\varphi^{-1}(l) = E \cup E'$  dove  $E$  ed  $E'$  sono  $(-1)$ -curve. Il fatto che l'immagine inversa di  $l$  sia riducibile ci dice che la retta è bitangente a  $C$  e inoltre poiché  $E \cup E' \in |K_S|$  le combinazioni devono essere  $(H - e_i - e_j) + (2H - \sum_{k \neq i,j} e_k)$  e  $C_i + e_i$ . Osserviamo perciò che l'insieme delle cinquantasei  $(-1)$ -curve è partizionato in ventotto coppie.

### 3.4.1 Involutione di Geiser

L'involutione di Geiser è un altro esempio di trasformazione cremoniana del piano proiettivo. Analizzeremo questa trasformazione cremoniana nel capitolo delle superfici di Del Pezzo perché, come vedremo in un attimo, è strettamente legata alle superfici di Del Pezzo di grado due.

Sia  $Z = \{P_1, \dots, P_7\}$  l'insieme di sette punti in posizione generale in  $\mathbb{P}^2$  e sia  $V_Z = |H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(3))|$  il sistema lineare di cubiche aventi  $Z$  come punti base. Per ogni punto  $x \in \mathbb{P}^2$  il sottosistema lineare di  $V_Z$  di cubiche passanti per  $x$  ha come punti base  $P_1, \dots, P_7, x, y$ . L'applicazione

$$\phi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \quad x \mapsto y$$

è detta *involutione di Geiser*.

Un sottosistema lineare di  $V_Z$  ha due punti base oltre ai punti base del sistema lineare. La retta passante per questi due punti corrisponde ad un punto nel piano duale  $\mathbb{P}^{2V}$ . Questo ci permette di identificare il sistema lineare  $V_Z$  con il piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$ .

Per calcolare il grado dell'involutione di Geiser consideriamo l'applicazione  $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow V_Z^\vee$  definita dal sistema lineare  $V_Z$ . Sappiamo che un sottosistema lineare corrisponde ad un punto in  $V_Z^\vee$  e che la sua preimmagine consiste nei punti base del sottosistema lineare esclusi i punti base di  $V_Z$ . Perciò  $f$  ha grado due e dunque anche l'involutione di Geiser.

Siano  $F_0, F_1, F_2 \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(3))$  linearmente indipendenti. Allora un'equazione della curva di ramificazione di  $\phi$  è data da

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial x_0} & \frac{\partial F_1}{\partial x_0} & \frac{\partial F_2}{\partial x_0} \\ \frac{\partial F_0}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_0}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0$$

quindi la curva di ramificazione dell'involuzione di Geiser è una sestica.

Abbiamo visto che se  $S$  è una superficie di Del Pezzo di grado due allora si ha il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^2 \cong |-K_S|^\vee \\ \pi \downarrow & & \\ \mathbb{P}^2 & & \end{array}$$

dove  $\pi$  è lo scoppimento di sette punti  $P_1, \dots, P_7$  in posizione generale e  $\varphi$  è l'applicazione definita dal divisore anticanonico  $-K_S$  di  $S$ .

Precedentemente abbiamo osservato che  $-K_S$  può essere visto come il pull back tramite  $\pi$  di un sistema lineare di cubiche aventi  $P_1, \dots, P_7$  come punti base, notiamo che  $(\pi, \varphi)$  è la risoluzione dell'involuzione di Geiser e perciò  $\phi = \varphi \circ \pi^{-1}$ , quindi il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ \pi \swarrow & & \searrow \varphi \\ \mathbb{P}^2 & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

è commutativo.

### 3.5 Superfici di Del Pezzo di grado 1

Prima di parlare delle superfici di Del Pezzo di grado uno, ricordiamo alcuni concetti.

**Definizione 3.5.1.** 1. Una curva ellittica  $C$  è una curva avente genere geometrico  $p_g(C) = 1$ .

2. Una superficie ellittica  $X$  è una superficie con un morfismo  $f : X \rightarrow C$  su una curva  $C$ , tale che quasi tutte le fibre di  $f$  sono curve ellittiche

*nonsingolari. Un morfismo avente queste proprietà è detto fibrazione ellittica.*

In questo paragrafo parleremo delle superfici di Del Pezzo  $S$  ottenute dallo scoppimento di otto punti in posizione generale  $P_1, \dots, P_8$  su  $\mathbb{P}^2$ . In questo caso sappiamo che il divisore anticanonico

$$-K_S \sim 3H - \sum_{i=1}^8 e_i$$

è un sistema lineare di dimensione uno con un unico punto base, che denotiamo  $x_0$ .

Consideriamo ora lo scoppimento di questo punto, cioè sia  $\tau : F \rightarrow S$  la trasformazione monoidale centrata in  $x_0$ . La preimmagine del sistema lineare anticanonico  $|-K_S|$  tramite  $\tau$  è un sistema lineare di curve ellittiche senza punti base. Denotiamo  $|V| = \tau^{-1}|-K_S|$ , tale sistema lineare di curve ellittiche. Allora si ha che  $|V|$  definisce una fibrazione ellittica  $f : F \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Sia  $E = \tau^{-1}(x_0)$ , allora  $E$  è una sezione di  $f$ .

Consideriamo adesso una fibrazione ellittica  $f : F \rightarrow \mathbb{P}^1$  su una superficie razionale  $F$  che ammette una sezione  $E$  e che non ha fibre contenenti  $(-1)$ -curve. Dalla teoria delle superfici ellittiche risulta che  $-K_F = \mathcal{O}(\Gamma)$  dove  $\Gamma$  è una qualsiasi fibra di  $f$  e da questo segue che  $E$  è una  $(-1)$ -curva, infatti dalla formula di aggiunzione risulta  $-2 = E^2 + E.K_F = E^2 - E.K_F = E^2 - 1$ . Se si contrae  $E$  si ottiene una superficie razionale  $S$  tale che  $K_S^2 = 1$ . Poiché  $K_F$  è nef anche  $K_S$  risulta nef, quindi la superficie  $S$  ottenuta dalla contrazione di  $E$  è una superficie di Del Pezzo debole di grado uno.

È possibile verificare che il modello proiettivo di una superficie di Del Pezzo di grado uno è una superficie razionale ellittica la cui equazione risulta essere

$$t_3^2 + t_2^3 + f_4(t_0, t_1)t_2 + f_6(t_0, t_1) = 0.$$

Deomogeneizzando questa equazione si ottiene l'equazione di Weierstrass delle superfici ellittiche

$$y^2 + x^3 + a(t)x + b(t) = 0.$$

Le superfici di Del Pezzo di grado uno contengono duecentoquaranta  $(-1)$ -curve, qui di seguito elencate:

- $e_i$  con  $i = 0, \dots, 8$  sono le curve eccezionali;
- $e_0 - e_i - e_j$  con  $1 \leq i < j \leq 8$  sono le rette passanti per due degli otto punti;
- $2e_0 - e_1 - \dots - e_8 + e_i + e_j + e_k$  con  $1 \leq i < j < k \leq 8$  sono le coniche passanti per cinque degli otto punti;
- $3e_0 - e_1 - \dots - e_8 - e_i + e_j$  con  $i, j = 1, \dots, 8$  e  $i \neq j$  sono le cubiche aventi un punto doppio tra gli otto punti e passanti per altri sei punti in modo semplice;
- $4e_0 - e_1 - \dots - e_8 - e_i - e_j - e_k$  con  $1 \leq i < j < k \leq 8$  sono le quartiche passanti per tutti gli otto punti e per tre di questi in modo doppio;
- $5e_0 - 2e_1 - \dots - 2e_8 + e_i + e_j$  con  $1 \leq i < j \leq 8$  sono le quintiche passanti per tutti gli otto punti e per sei di questi in modo doppio;
- $6e_0 - 2e_1 - \dots - 2e_8 - e_i$  con  $i = 0, \dots, 8$  sono le sestiche passanti per gli otto, tra cui per sette di questi in modo doppio e per uno in modo triplo.

Le superfici di Del Pezzo di grado uno posso essere studiate anche in un altro modo come vedremo subito. Infatti il modello antibicanonico  $\bar{S}$  di una superficie di Del Pezzo  $S$  di grado uno può essere visto come un ricoprimento finito di grado due di un cono quadratico  $Q$  ramificato su una curva  $B$  nel sistema lineare  $|\mathcal{O}_Q(3)|$ , come dimostrato nel teorema 3.1.3.

### 3.5.1 Involuzione di Bertini

L'involuzione di Bertini è una trasformazione cremoniana definita come segue. Sia  $Z = \{P_1, \dots, P_8\}$  un insieme di otto punti in  $\mathbb{P}^2$  in posizione generale e sia  $V_Z = |H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(3))|$  il sistema lineare di dimensione uno di cubiche aventi  $Z$  come luogo base. Sia inoltre  $q$  il nono punto base di  $V_Z$ . Per ogni punto  $x \in \mathbb{P}^2$  sia  $C_x$  l'elemento di  $V_Z$  che contiene il punto  $x$ , e sia  $l_x$  la retta passante per  $x$  e  $q$ . Allora la retta  $l_x$  e la cubica  $C_x$  si intersecano in tre punti  $x, q$  e sia  $\phi(x)$  il terzo punto. L'applicazione

$$\phi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \quad x \mapsto \phi(x)$$

e detta *involutione di Bertini*.

Il motivo per il quale introduciamo ora questa trasformazione è il seguente. È possibile definire l'involutione di Bertini a partire dalle superfici di Del Pezzo di grado uno. Infatti sia  $S$  una superficie di Del Pezzo di grado uno e consideriamo il sistema lineare antibicanonico

$$-2K_S \sim 6H - 2e_1 - \dots - 2e_8,$$

questo sistema lineare  $|-2K_S|$  è formato dalle sestiche passanti per  $P_i, i = 1, \dots, 8$  con molteplicità due e definisce un'applicazione di grado due su un cono quadratico  $Q$  in  $\mathbb{P}^3$ , che denotiamo  $\varphi : S \rightarrow Q \subset \mathbb{P}^3$ . La sua curva di ramificazione è una curva nonsingolare  $B$  di genere quattro tagliata da una superficie cubica.

Si ha allora il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & Q \subset \mathbb{P}^3 \\ \pi \downarrow & & \\ \mathbb{P}^2 & & \end{array}$$

Sia  $\bar{S}$  il modello antibicanonico di  $S$ , allora sappiamo che l'applicazione  $\varphi : S \rightarrow Q$  si fattorizza tramite le seguenti applicazioni

$$\varphi : S \xrightarrow{\sigma} \bar{S} \xrightarrow{\bar{\varphi}} Q$$

dove  $\sigma : S \rightarrow \bar{S}$  è l'applicazione birazionale che contrae le curve riducibili  $R$  aventi come componenti irriducibili  $(-2)$ -curve e  $\bar{\varphi} : \bar{S} \rightarrow Q$  è l'applicazione di grado due ramificata lungo una sestica tagliata da una superficie cubica.

Ricordiamo che dato un ricoprimento doppio  $\phi : X \rightarrow X'$  un automorfismo  $f : X \rightarrow X$  tale che  $\phi \circ f = \phi$ , cioè tale che il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow \phi & \swarrow \phi \\ & & X' \end{array}$$

è commutativo, è detto  $X'$ -automorfismo oppure automorfismo al di sopra

di  $X'$ .

Allora poiché  $\bar{\varphi} : \bar{S} \rightarrow Q$  è un'applicazione di grado due, sia  $\beta$  l'automorfismo al di sopra di  $\bar{S}$  di  $\bar{\varphi}$ , cioè

$$\begin{array}{ccc} \bar{S} & \xrightarrow{\beta} & \bar{S} \\ & \searrow \bar{\varphi} & \swarrow \bar{\varphi} \\ & Q & \end{array}$$

allora  $\beta$  è un automorfismo birazionale che equivale all'involuzione di Bertini.

## Capitolo 4

# Superfici rigate razionali

### 4.1 Superfici rigate razionali

**Definizione 4.1.1.** *Sia  $C$  una curva nonsingolare. Una superficie rigata  $S$  è una superficie birazionalmente equivalente a  $C \times \mathbb{P}^1$ . Se  $C = \mathbb{P}^1$ , allora  $S$  è una superficie rigata razionale. Una superficie geometricamente rigata  $S$  su  $C$  è una superficie con un morfismo suriettivo, nonsingolare  $\pi : X \rightarrow C$  tale che le fibre  $X_y$  sono isomorfe a  $\mathbb{P}^1$  per ogni  $y \in X$ .*

Esempi di superfici geometricamente rigate si costruiscono nel modo seguente.

Siano  $k$  e  $l$  due interi positivi tali che  $n = k + l + 1$ . Consideriamo in  $\mathbb{P}^n$  due sottospazi lineari  $\Lambda$  e  $\Lambda'$  complementari di dimensione  $k$  e  $l$  rispettivamente. In entrambi i sottospazi lineari scegliamo due curve razionali  $C$  e  $C'$  e consideriamo un isomorfismo  $\varphi : C \rightarrow C'$ .

La superficie razionale ottenuta dall'unione delle rette  $\overline{P\varphi(P)}$  che uniscono i punti di  $C'$  con quelli di  $C$  è detta *superficie rigata* e viene indicata con  $S_{k,l}$  o con  $S_k$  nel caso in cui sia fissato il valore di  $n$ .

Le rette  $\overline{P\varphi(P)}$  sono dette le *rette generatrici* di  $S_{k,l}$  o semplicemente *generatori* di  $S_{k,l}$ .

Come casi particolarmente notevoli abbiamo:

- $S_{0,2} \subset \mathbb{P}^3$  cioè il cono su una conica piana;
- $S_{1,1} \subset \mathbb{P}^3$  cioè la superficie quadrica nonsingolare.

**Proposizione 4.1.1.** 1. Le superfici rigate  $S_{k,l}$  e  $S'_{k,l} \subset \mathbb{P}^n$  sono proiettivamente equivalenti se e solo se  $k = k'$ .

2. Se  $k < l$ , la curva razionale  $C \subset S_{k,l}$  di grado  $k$  che compare nella costruzione della superficie rigata è l'unica curva razionale di grado  $< l$  su  $S_{k,l}$  oltre alle rette generatrici; in particolare,  $C$  è univocamente determinata da  $S_{k,l}$  ed è detta la direttrice di  $S_{k,l}$ . Questo non è vero per la curva razionale  $C'$  di grado maggiore  $l$  e nel caso in cui  $k = l$ .

3. L'immagine della superficie rigata  $S_{k,l}$  tramite la proiezione da un punto  $P \in S_{k,l}$  è proiettivamente equivalente a  $S_{k-1,l}$  se  $P$  giace sulla direttrice di  $S_{k,l}$ ; è proiettivamente equivalente a  $S_{k,l-1}$  altrimenti.

Gli esempi di superfici geometricamente rigate appena descritte, risultano essere superfici razionali rigate.

Quanto appena affermato è una conseguenza immediata del seguente teorema, il quale ci mostra che una superficie geometricamente rigata è una superficie rigata. Questo è un risultato molto importante che ci servirà anche in seguito nella dimostrazione del criterio di razionalità di Castelnuovo, è chiamato il *teorema di Enriques-Noether*.

**Teorema 4.1.1.** Sia  $S$  una superficie e sia  $\pi : S \rightarrow C$  un morfismo su una curva nonsingolare  $C$ . Supponiamo che esista  $x \in C$  nonsingolare per  $\pi$  su  $x$  e tale che la fibra  $\pi^{-1}(x)$  è isomorfa a  $\mathbb{P}^1$ . Allora esiste un sottoinsieme aperto  $U$  contenente  $x$  e un isomorfismo da  $\pi^{-1}(U)$  a  $U \times \mathbb{P}^1$  tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & U \times \mathbb{P}^1 \\ & \searrow \pi & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

è commutativo. In particolare  $S$  è rigata.

*Dimostrazione.* In questa dimostrazione assumiamo  $k = \mathbb{C}$ .

Dividiamo la dimostrazione in tre passi.

Passo 1.

Facciamo vedere che  $H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$ .

Per mostrare questo ci sarà utile la seguente osservazione:

- Se  $D$  è un divisore effettivo e  $C$  è una curva irriducibile tale che  $C^2 \geq 0$  allora  $D.C \geq 0$ .

Sia  $F = \pi^{-1}(x)$ . Per ipotesi  $F \cong \mathbb{P}^1$  perciò dalla formula di aggiunta risulta che  $F^2 = 0$  e  $F.K_S = -2$ . Supponiamo che  $H^2(S, \mathcal{O}_S) \neq 0$ , come conseguenza della dualità di Serre, il sistema lineare  $|K_S|$  contiene un divisore effettivo  $D$ . Allora si ha che  $D.F = -2$  ma per l'osservazione appena fatta risulta anche che  $D.F \geq 0$  poiché  $F^2 \geq 0$ , ma questa è una contraddizione.

Passo 2.

Facciamo vedere che esiste un divisore  $H$  di  $S$  tale che  $H.F = 1$ .

Sia  $f$  la classe di  $F$  in  $H^2(S, \mathbb{Z})$ . Poiché  $H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$  allora l'applicazione

$$Pic(S) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$$

risulta essere suriettiva. Infatti su  $\mathbb{C}$  si ha la seguente successione esatta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S^* \rightarrow 0$$

che dà luogo alla successione esatta lunga

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \rightarrow \\ \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Perciò ricordando che  $Pic(S) = H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$  si ottiene quanto sopra affermato. È sufficiente perciò dimostrare che esiste una classe  $h \in H^2(S, \mathbb{Z})$  tale che  $h.f = 1$ . Al variare di  $a$  in  $H^2(S, \mathbb{Z})$  l'insieme degli interi  $(a.f)$  è un ideale in  $\mathbb{Z}$  della forma  $d\mathbb{Z}$  con  $d \geq 1$ . L'applicazione definita da  $a \mapsto \frac{1}{d}(a.f)$  è una forma lineare su  $H^2(S, \mathbb{Z})$ . La dualità di Poincaré ci dice che il prodotto cup

$$H^2(S, \mathbb{Z}) \times H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(S, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

è in dualità, in altre parole l'applicazione associata

$$H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H^2(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

è suriettiva ed il suo nucleo corrisponde al sottogruppo di torsione. Allora esiste un elemento  $f' \in H^2(S, \mathbb{Z})$  tale che

$$(a.f') = \frac{1}{d}(a.f) \quad \text{per ogni } a \in H^2(S, \mathbb{Z}).$$

Perciò  $f = df'$  modulo torsione in  $H^2(S, \mathbb{Z})$ .

Notiamo che se  $k$  è la classe di  $K_S$  in  $H^2(S, \mathbb{Z})$ , l'intero  $a^2 + a.k$  è un numero pari per ogni divisore e quindi nel nostro caso per ogni  $a \in H^2(S, \mathbb{Z})$ . Infatti  $a^2 + a.k$  è lineare in  $a \pmod{2}$  ed è pari per  $a$  irriducibile per la formula di aggiunzione. Allora poiché  $f^2 = 0$  e  $f.k = -2$  si ha che  $f'^2 = 0$  e  $f'.k = -\frac{2}{d}$ , inoltre sapendo che  $f'^2 + f'.k = -\frac{2}{d}$  deve essere pari si ha che  $d = 1$ . Questo ci dice che esiste un elemento  $a \in H^2(S, \mathbb{Z})$  tale che  $a.f = 1$ .

Passo 3.

Consideriamo la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(H + (r-1)F) \rightarrow \mathcal{O}_S(H + rF) \rightarrow \mathcal{O}_F(1) \rightarrow 0$$

con  $r \in \mathbb{Z}$ , ottenuta tensorizzando la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-F) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_F \rightarrow 0$$

con  $\mathcal{O}_S(H + rF)$  tenendo conto che  $(H.rF).F = HF + rF^2 = 1 + 0 = 1$ . Questa successione esatta ci dà la successione esatta lunga

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(H + rF)) \xrightarrow{a_r} H^0(F, \mathcal{O}_F(1)) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(H + (r-1)F)) \xrightarrow{b_r} H^1(S, \mathcal{O}_S(H + rF)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

La successione degli spazi  $H^1(S, \mathcal{O}_S(H + rF))$  deve essere stazionaria per  $r$  abbastanza grande poiché le applicazioni  $b_r$  sono suriettive, quindi

$$\dim H^1(S, \mathcal{O}_S(H + (r-1)F)) \geq \dim H^1(S, \mathcal{O}_S(H + rF)).$$

Perciò al crescere di  $r$  le dimensioni di tali spazi vettoriali decrescono. Allora  $b_r$  diventa biiettiva e quindi  $a_r$  è suriettiva.

Sia allora  $V$  un sottospazio vettoriale di  $H^0(S, \mathcal{O}_S(H + rF))$  di dimensione due tale che  $a_r(V) = H^0(F, \mathcal{O}_F(1))$  e sia  $\mathcal{P}$  il sistema lineare di dimensione uno corrispondente a  $a_r(V)$ . Il fascio  $\mathcal{P}$  potrebbe avere componenti fisse, ma in tal caso esse dovrebbero essere contenute in alcune fibre  $F_{x_1}, \dots, F_{x_k}$  di  $\pi$

diverse da  $F$ , perché  $\mathcal{P}$  non ha punti base su  $F$ . Allo stesso modo ogni punto base della parte mobile di  $\mathcal{P}$  deve essere contenuta in fibre  $F_{x_{k+1}}, \dots, F_{x_l}$  diverse da  $F$ .

Siano  $F_{x_{l+1}}, \dots, F_{x_m}$  le fibre di  $\pi$  che sono riducibili. Sia  $U = C - \{x_1, \dots, x_m\}$  e sia  $\mathcal{P}'$  la restrizione di  $\mathcal{P}$  ad  $U$ .

Il sistema lineare  $\mathcal{P}'$  non ha punti base, e ogni curva  $C_t$  in  $\mathcal{P}'$  è l'unione di una sezione di  $\pi$  ed eventualmente di un certo numero di fibre. Vediamo in realtà che  $C_t$  non contiene fibre, infatti se le contenesse,  $C_t$  avrebbe punti in comune con  $C_{t'}$  con  $t \neq t'$  e questi sarebbero punti base di  $\mathcal{P}'$ , essendo  $\mathcal{P}'$  un fascio. Allora i divisori di  $\mathcal{P}'$  sono tutte le sezioni  $(C_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$  del fibrato  $\pi$ . Poiché  $\mathcal{P}'$  non ha punti base, definisce un morfismo

$$g : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{P}^1$$

le cui fibre sono  $g^{-1}(t) = C_t$ . Consideriamo il morfismo

$$h = (p, g) : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{P}^1.$$

Poiché  $h^{-1}(y, t) = F_y \cap C_t$ , il morfismo  $h$  risulta essere un isomorfismo.  $\square$

D'ora in poi considereremo solo superfici rigate razionali, perciò quando parleremo di superfici rigate sarà sottinteso razionali. Indicheremo con  $C^n [(n-1)^1, 1^{n-1}]$  un sistema di curve di grado  $n$  aventi un punto base con molteplicità  $n-1$  ed  $n-1$  punti base semplici.

**Proposizione 4.1.2.** *Ogni superficie rigata  $S$  di grado  $n$  può essere rappresentata sul piano tramite un sistema di tipo  $C^n [(n-1)^1, 1^{n-1}]$ .*

*Dimostrazione.* Notiamo che per dimostrare questo teorema è possibile ridurre al caso in cui la superficie rigata  $S$  sia nello spazio proiettivo  $\mathbb{P}^3$ . Infatti se  $S \subset \mathbb{P}^n$  con  $n \geq 4$ , il sistema lineare di curve può essere proiettato su un piano, in tal caso il sistema lineare non subisce cambiamenti effettivi eccetto che una perdita di parametri di libertà.

Supponiamo quindi che  $S \subset \mathbb{P}^3$ .

Sia  $D \subset S$  il luogo dei punti in cui si intersecano tutti i generatori,  $D$  risulta essere una curva doppia. Dimostriamo che ogni generatore interseca  $D$  in

$n - 2$  punti. Per far questo consideriamo una curva  $C$  di ordine  $n - 1$  in cui  $S$  è intersecata residualmente da un piano  $\varpi$  passante per un generatore  $g_0$ . Per un generico punto  $P \in C$  passa un unico generatore  $g$  in quanto vi è una corrispondenza birazionale tra i punti di  $C$  e i generatori  $g$  di  $S$ . Perciò quando  $g$  tende a  $g_0$ ,  $P$  deve tendere ad un preciso punto  $P_0$  che equivale all'intersezione di  $C$  con  $g_0$ . Sappiamo però che  $C$  interseca  $g_0$  in  $n - 1$  punti, siano  $P_0, \dots, P_{n-2}$ . Per questi punti devono passare  $n - 1$  generatori in cui  $g_0$  è contato una sola volta. Perciò ci sono  $n - 2$  generatori che incontrano  $g_0$  in  $P_1, \dots, P_{n-2}$ , e dunque  $P_1, \dots, P_{n-2}$  sono le intersezioni di  $g_0$  con  $D$ . Inoltre da quanto appena detto segue che, se due piani  $\varpi$  e  $\varpi'$  che passano per  $g_0$  intersecano residualmente  $D$  nelle curve  $C$  e  $C'$  allora queste due curve intersecano  $g_0$  in  $n - 2$  punti in comune  $P_1, \dots, P_{n-2}$ . Questo ci dice che  $S$  è unione di tutti i punti  $P \in C$  e  $P' \in C'$  che sono in corrispondenza birazionale, tali che  $P$  coincide con  $P'$  in ognuna delle  $n - 2$  posizioni.

I generatori della superficie rigata  $S$  sono in corrispondenza birazionale con i valori di un parametro  $\lambda$ , quindi le curve  $C$  e  $C'$  sono il luogo degli zeri dei polinomi  $P(\lambda)$  e  $P'(\lambda)$ , e hanno equazioni parametriche

$$x_i = u_i(\lambda) \quad i = 0, \dots, 3$$

$$x_i = v_i(\lambda) \quad i = 0, \dots, 3$$

rispettivamente, dove  $u_i$  e  $v_i$  sono polinomi di ordine  $n - 1$ . Per quanto appena detto, esistono  $n - 2$  valori di  $\lambda$  per cui,  $P(\lambda)$  e  $P'(\lambda)$  coincidono. Le equazioni parametriche di  $S$  sono perciò

$$x_i = u_i(\lambda) + \mu v_i(\lambda) \quad i = 0, \dots, 3.$$

Se consideriamo i parametri  $(\lambda, \mu)$  come coordinate non omogenee di un punto nel piano  $\varpi$  allora  $S$  è rappresentato su  $\varpi$  tramite un sistema di curve ( $C$ ) le cui equazioni sono

$$\sum_{i=0}^3 k_i (u_i(\lambda) + \mu v_i(\lambda)) = 0.$$

Le curve ( $C$ ) hanno ordine  $n$  e presentano le seguenti caratteristiche:

- $(0, \infty)$  è un punto base avente molteplicità  $n - 1$ ;

- $(\infty, 0)$  è un punto base semplice;

- se

$$\frac{u_0(\lambda_i)}{v_0(\lambda_i)} = \dots = \frac{u_3(\lambda_i)}{v_3(\lambda_i)} = -\mu_i \quad i = 1, \dots, n-2$$

allora vediamo che i punti  $(\lambda_i, \mu_i)$  con  $i = 1, \dots, n-2$  sono punti base semplici.

□

Vediamo adesso un altro risultato importante riguardo le superfici rigate il quale afferma che le superfici rigate sono superfici di grado  $n$ , che indichiamo con  $S^n$  in  $\mathbb{P}^{n+1}$ , con  $n \geq 2$ . Inoltre se si proietta  $S^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$  da un suo punto si ottiene  $S^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$  e ciò è vero fino a  $F^2 \subset \mathbb{P}^3$ , cioè alla superficie quadrica in  $\mathbb{P}^3$ .

Ricordiamo che una superficie razionale  $X \subset \mathbb{P}^n$  e tale che  $X$  è contenuta in spazi di dimensione minore è detta *normale* in  $\mathbb{P}^n$  se non è una proiezione propria di una superficie dello stesso ordine contenuta in uno spazio di dimensione maggiore.

**Proposizione 4.1.3.** *Un sistema lineare completo di tipo  $C^n [(n-1)^1, 1^{n-1}]$  rappresenta una superficie rigata in uno spazio di dimensione  $r$ , dove*

$$r = \frac{1}{2}n(n+3) - \frac{1}{2}n(n-1) - (n-1) = n+1.$$

*Cioè una superficie rigata di ordine  $n$  è normale in  $\mathbb{P}^{n+1}$ .*

Le superfici rigate sono strettamente correlate, come vedremo subito, ai fibrati vettoriali di rango due.

**Proposizione 4.1.4.** *Se  $\pi : S \rightarrow C$  è una superficie rigata, allora esiste un fascio  $\mathcal{E}$  localmente libero di rango due su  $C$  tale che  $S \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$  su  $C$ . Viceversa dato un fascio  $\mathcal{E}$  localmente libero di rango due su una curva  $C$  nonsingolare,  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$  è una superficie rigata su  $C$ . Se  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}'$  sono due fasci localmente liberi di rango due su  $C$ , allora  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$  e  $\mathbb{P}(\mathcal{E}')$  sono isomorfi come superfici rigate su  $C$  se e solo se esiste un fascio invertibile  $\mathcal{L}$  su  $C$  tale che  $\mathcal{E}' \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$ .*

Si può dimostrare che se  $C$  è una curva nonsingolare ed  $E$  è un fibrato vettoriale di rango due su  $C$  allora esiste una successione esatta

$$0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$$

dove  $L, M \in \text{Pic}(S)$ . Una conseguenza di ciò è il teorema di Riemann-Roch per i fibrati vettoriali di rango due:

$$\chi(E) = \deg(E) + 2 - 2p_g(C).$$

Infatti considerando la successione esatta sopra descritta e il teorema di Riemann-Roch si ha che

$$\chi(E) = \chi(L) + \chi(M) = \deg(L) + \deg(M) + 2(1 - p_g(C)) = \deg(E) + 2 - 2p_g(C).$$

Ci chiediamo sotto quali condizioni la successione esatta spacchi, cioè quando  $E \cong L \oplus M$ . Risulta che:

- Condizione necessaria e sufficiente affinché  $E \cong L \oplus M$  è che la classe di estensione  $L \rightarrow E \rightarrow M$  è nulla.

Infatti vogliamo che la successione esatta

$$0 \rightarrow L \otimes M^{-1} \rightarrow E \otimes M^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

spacchi. Ma questa successione spacca se e solo se ha una sezione, cioè se esiste una sezione di  $H^0(C, E \otimes M^{-1})$  che viene mandata in  $1 \in H^0(C, \mathcal{O}_C)$ . Usando la successione di coomologia

$$H^0(C, E \otimes M^{-1}) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C) \xrightarrow{\partial} H^1(C, L \otimes M^{-1})$$

si dovrebbe avere che  $\partial(1) = 0$ . La classe  $\partial(1) \in H^1(C, L \otimes M^{-1})$  è detta la classe dell'estensione  $L \rightarrow E \rightarrow M$ , quindi la condizione che si annulli è necessaria e sufficiente per avere  $E \cong L \oplus M$ .

**Proposizione 4.1.5.** *Ogni fibrato vettoriale di rango due su  $\mathbb{P}^1$  è decomponibile, cioè è somma di due fasci invertibili. In particolare ogni superficie rigata su  $\mathbb{P}^1$ , cioè razionale, è isomorfa ad una delle superfici*

$$\mathbb{F}_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$$

per  $n \geq 0$

*Dimostrazione.* Sia  $E$  un fibrato vettoriale di rango due su  $\mathbb{P}^1$ . A meno di cambiare  $E$  con  $E \otimes L$ , possiamo supporre che  $d = \deg E = 0$  o  $-1$ . Dal teorema di Riemann-Roch si ha che  $\dim H^0(\mathbb{P}^1, E) \geq d+2 \geq 1$ . Esiste allora una successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(j) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-j) \rightarrow 0$$

con  $j \geq 0$ . La classe di questa estensione è in  $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2j-d))$  che è sempre zero. Perciò per la discussione fatta precedentemente la dimostrazione è provata.  $\square$

**Lemma 4.1.1.** *Sia  $p : S \rightarrow C$  una superficie geometricamente rigata, sia  $D$  un divisore su  $S$  e supponiamo che  $D.F = n \geq 0$ , dove  $F$  è una fibra di  $p$ . Allora  $p_*\mathcal{L}(D)$  è un fascio localmente libero di rango  $n+1$  su  $C$ . In particolare  $p_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_C$ .*

**Proposizione 4.1.6.** *Sia  $S = \mathbb{P}_C(\mathcal{E})$  una superficie geometricamente rigata di base  $C$ , e  $p : S \rightarrow C$  il morfismo strutturale. Sia  $H \subset X$  una sezione e sia  $F$  una fibra. Allora*

$$\text{Pic}(S) \cong p^*\text{Pic}(C) \oplus \mathbb{Z}.H$$

*Dimostrazione.* È chiaro che  $F.H = 1$  in quanto  $H$  e  $F$  si intersecano in un solo punto trasversalmente. Inoltre  $F^2 = 0$  perché due fibre distinte non si incontrano. Se  $D \in \text{Pic}(S)$ , sia  $n = D.F$  e sia  $D' = D - nH$ . Allora  $D'.F = 0$ . Per il lemma 4.1.1,  $p_*\mathcal{L}(D')$  è un fascio invertibile su  $C$  e  $\mathcal{L}(D') = p^*p_*\mathcal{L}(D')$ . L'applicazione  $p^* : \text{Pic}(C) \rightarrow \text{Pic}(S)$  è iniettiva e perciò risulta evidente che  $\text{Pic}(S) \cong p^*\text{Pic}(C) \oplus \mathbb{Z}.H$ .  $\square$

Osserviamo che se  $S$  è una superficie rigata razionale allora

$$\text{Pic}(S) \cong \mathbb{Z}.F \oplus \mathbb{Z}.H.$$

**Definizione 4.1.2.** *Sia  $S$  una superficie e sia  $B(S)$  la classe di isomorfismo di superfici birazionalmente equivalenti a  $S$ . Una superficie  $S$  è detta minimale se ogni morfismo birazionale  $f : S \rightarrow S'$  ad una superficie  $S' \in B(S)$  è un isomorfismo.*

Osserviamo allora che una superficie è minimale se e solo se non contiene curve eccezionali. Infatti se  $S$  fosse una superficie minimale ed  $E \subset S$  una curva eccezionale, per il criterio di contrazione di Castelnuovo, teorema 2.2.4, esisterebbe un morfismo birazionale  $\pi : S \rightarrow S'$  che contrae la curva eccezionale  $E$  ad un punto,  $\pi(E) = P \in S'$ . Ma allora il morfismo birazionale  $\pi$  non è un isomorfismo. Viceversa se una superficie  $S$  non contiene curve eccezionali, allora ogni morfismo birazionale  $f : S \rightarrow S'$  deve essere un isomorfismo altrimenti per il teorema 2.2.2, si potrebbe fattorizzare in una successione di trasformazioni monoidali e perciò conterrebbe curve eccezionali.

Usando le notazioni della proposizione 4.1.5, si hanno le seguenti proprietà.

- Proposizione 4.1.7.**
1. Si ha  $\text{Pic}(\mathbb{F}_n) = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}F$ , con  $F^2 = 0$ ,  $F.H = 1$  e  $H^2 = n$ ;
  2. Se  $n > 0$ , esiste un'unica curva irriducibile  $B$  su  $\mathbb{F}_n$  con auto-intersezione negativa; se  $b$  è la sua classe in  $\text{Pic}(\mathbb{F}_n)$  allora si ha  $b = H - nF$  e  $b^2 = -n$ ;
  3.  $\mathbb{F}_n$  non è isomorfa ad  $\mathbb{F}_m$  per  $n \neq m$ ;  $\mathbb{F}_n$  è minimale per  $n \neq 1$  ed  $\mathbb{F}_1$  è isomorfa allo scoppimento di  $\mathbb{P}^2$  in un punto.

*Dimostrazione.* 1. È una conseguenza della proposizione 4.1.6.

2. Consideriamo la sezione  $s$  del fibrato proiettivo che corrisponde al fibrato quoziente  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$  di  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ , sia  $B = s(C)$  e  $b$  la sua classe dentro  $\text{Pic}(\mathbb{F}_n)$ ; si ha che  $b = H + rF$  per  $r \in \mathbb{Z}$ . Poiché  $s^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ , si ha che  $H.b = 0$ , quindi  $r = -n$  e di conseguenza  $b^2 = (H - nF)^2 = -n$ .

Sia ora  $C$  una curva irriducibile su  $\mathbb{F}_n$ , con  $C \neq B$ . Sia  $C = \alpha H + \beta F$  in  $\text{Pic}(\mathbb{F}_n)$ . Poiché  $C.F \geq 0$ , si ha  $\alpha \geq 0$ ; poiché  $C.B \geq 0$  e  $H.b = 0$ , si ottiene  $\beta \geq 0$ , Quindi  $C^2 = \alpha^2 n + 2\alpha\beta \geq 0$ .

3. Ci ricordiamo che su  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  si ha  $C^2 \geq 0$  per tutte le curve irriducibili, perciò dal punto 2 risulta che l'intero  $n$  è unicamente determinato da  $\mathbb{F}_n$ , e quindi  $\mathbb{F}_n$  è minimale per  $n \neq 1$  in quanto non contiene  $(-1)$ -curve. Infine siano  $q$  un punto su  $\mathbb{P}^2$ ,  $S$  lo scoppimento di  $\mathbb{P}^2$  su  $q$  ed  $E$  il divisore eccezionale. La proiezione di centro  $q$  definisce un morfismo  $p : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ , che

rende  $S$  una superficie geometricamente rigata di base  $\mathbb{P}^1$ . Poiché  $E^2 = -1$  allora  $S$  è isomorfa a  $\mathbb{F}_1$ .  $\square$

## 4.2 Equazioni determinantal delle superfici rigate

Consideriamo una matrice  $2 \times k$  di forme lineari su  $\mathbb{P}^n$

$$\Omega(Z) = \begin{pmatrix} L_1(Z) & \dots & L_k(Z) \\ M_1(Z) & \dots & M_k(Z) \end{pmatrix}.$$

A questa matrice si può associare una varietà  $\Psi$  definita dalle equazioni ottenute uguagliando a zero i minori  $2 \times 2$  di  $\Omega(Z)$  cioè

$$\Psi = \{[Z] : \text{rango} \Omega(Z) = 1\}.$$

Per descrivere la varietà  $\Psi$ , sia  $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$  e consideriamo il luogo degli zeri

$$\Lambda_{[\lambda, \mu]} = \{[Z] : \lambda L_1(Z) + \mu M_1(Z) = \dots = \lambda L_k + \mu M_k(Z) = 0\}$$

che è uno spazio lineare  $\mathbb{P}^{n-k}$  in  $\mathbb{P}^n$ .

Notiamo allora che la varietà  $\Psi$  è l'unione dei  $\Lambda_{[\lambda, \mu]}$  al variare di  $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$ . Per capire meglio queste varietà consideriamo ad esempio il caso di una matrice  $2 \times n$  di forme lineari su  $\mathbb{P}^n$ . Sappiamo che una curva razionale normale  $C \subset \mathbb{P}^n$  data attraverso l'immagine dell'applicazione di Veronese

$$V_n : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n \quad [x, y] \mapsto [x^n, x^{n-1}y, \dots, y^n]$$

può essere descritta anche tramite le equazioni date dall'annullarsi dei minori di ordine due della matrice di forme lineari

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \dots & Z_{n-1} \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_n \end{pmatrix}.$$

Vogliamo adesso far vedere che data una matrice  $\Omega$  di ordine  $2 \times n$  di forme lineari, 1-generica, risulta che  $\Omega$  è coniugata alla matrice  $\Omega_0$ .

Osserviamo intanto che ogni matrice di ordine  $2 \times n$  di forme lineari

$$\Omega(Z) = \begin{pmatrix} L_1(Z) & \dots & L_n(Z) \\ M_1(Z) & \dots & M_n(Z) \end{pmatrix}$$

tale che per ogni  $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$  le forme lineari

$$\lambda L_1 + \mu M_1, \dots, \lambda L_n + \mu M_n$$

sono indipendenti, ha come varietà definita dalle equazioni determinantalmente una curva razionale normale. Infatti per ogni  $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$  le equazioni

$$\lambda L_1 + \mu M_1 = \dots = \lambda L_n + \mu M_n = 0$$

determinano un punto in  $\mathbb{P}^n$  che indichiamo con  $P_{[\lambda, \mu]}$ . L'applicazione

$$f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n \quad [\lambda, \mu] \mapsto P_{[\lambda, \mu]}$$

viene espressa tramite una base di polinomi di grado  $n$  in  $\mathbb{P}^1$ , perciò l'immagine è una curva razionale normale. Diamo adesso un risultato riguardante questo esempio delle matrici  $2 \times n$  che ci servirà anche in seguito.

**Proposizione 4.2.1.** *Ogni matrice  $\Omega$  di ordine  $2 \times n$  di forme lineari su  $\mathbb{P}^n$ , 1-generica, è coniugata alla matrice  $\Omega_0$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\Omega$  una matrice che soddisfa le ipotesi del teorema. Abbiamo già visto che la varietà definita dalle sue equazioni determinantalmente è una curva  $C \cong \mathbb{P}^1$ , e che le righe generalizzate di  $\Omega$  corrispondono ai punti di  $C$  (dove per righe generalizzate di  $\Omega$  si intende una riga di una matrice coniugata a  $\Omega$ , cioè una combinazione lineare delle righe di  $\Omega$ , stessa cosa vale per le colonne generalizzate di  $\Omega$ ).

Affermiamo ora che il luogo degli zeri comuni di una colonna generalizzata di  $\Omega$  è un insieme di  $n - 1$  punti su  $C$  o più precisamente, che le entrate di una colonna generalizzata di  $\Omega$  sono polinomi di grado  $n$  su  $C \cong \mathbb{P}^1$  aventi  $n - 1$  punti comuni. Per dimostrare quanto appena detto osserviamo intanto che una entrata  $L_j$  di  $\Omega$  è una forma lineare su  $\mathbb{P}^n$  cioè è un polinomio di grado  $n$  su  $C \cong \mathbb{P}^1$ , e tra gli zeri di questo polinomio c'è anche il punto  $P_{[1, 0]}$ . I rimanenti  $n - 1$  zeri  $P_{[\lambda, \mu]}$  con  $\mu \neq 0$  devono essere gli zeri dell'altra entrata  $M_j$  della colonna  $j$ -esima. Cioè le due entrate di una colonna di  $\Omega$  corrispondono ai polinomi su  $C$  aventi  $n - 1$  radici comuni. Risulta quindi che le colonne generalizzate di  $\Omega$  corrispondono biettivamente a polinomi di grado  $n - 1$  su  $C$ . In particolare se consideriamo le coordinate  $[X, Y]$  su  $C \cong \mathbb{P}^1$  possiamo associare alle righe della matrice  $\Omega$  i punti  $X = 0$  e  $Y = 0$

e alle colonne i polinomi  $X^{n-1}, X^{n-2}Y, \dots, Y^{n-1}$ . Se poi si scelgono le coordinate omogenee  $Z_0, \dots, Z_n$  su  $\mathbb{P}^n$  in modo che corrispondano ai polinomi  $X^n, X^{n-1}Y, \dots, Y^n$  si vede subito che la matrice  $\Omega$  avrà la forma standard  $L_i = Z_{i-1}, M_i = Z_i$ .  $\square$

Consideriamo adesso la seguente matrice  $2 \times n - 1$

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} Z_0 & \dots & Z_{l-1} & Z_{l+1} & \dots & Z_{n-1} \\ Z_1 & \dots & Z_l & Z_{l+2} & \dots & Z_n \end{pmatrix}$$

allora la varietà  $\Psi$  definita dalle equazioni determinantal di  $\Omega_0$

$$\Psi = \{[Z] : \text{rango} \Omega_0 \leq 1\}$$

è una superficie rigata  $S_{l, n-l-1} \subset \mathbb{P}^n$ .

Per vedere questo notiamo che le prime  $l$  colonne forniscono l'equazione di una curva razionale  $C$  nel sottospazio lineare di equazioni  $Z_{l+1} = \dots = Z_n = 0$  di dimensione  $k = n - l - 1$  mentre le ultime  $k$  colonne ci forniscono l'equazione di una curva razionale  $C'$  nel sottospazio lineare di equazioni  $Z_0 = \dots = Z_l = 0$  di dimensione  $l$ . Inoltre le equazioni date dai minori misti tra le prime  $l$  e le ultime  $k$  colonne ci danno delle condizioni tra i punti di  $C$  e  $C'$ , tali equazioni ci definiscono perciò l'isomorfismo  $\varphi : C' \rightarrow C$ . Infatti sia  $P \in C'$  un punto e consideriamo i minori misti tra le prime  $l$  colonne e le ultime  $k$ . Se si sostituiscono le coordinate del punto  $P$  in queste equazioni si ottiene un sistema lineare nelle incognite  $Z_0, \dots, Z_l$ , la cui soluzione è un punto su  $C$ . L'isomorfismo  $\varphi$  è definito nel modo appena descritto. Dunque  $\Psi$  è una superficie rigata.

Diciamo che una matrice  $2 \times k$  di forme lineari su  $\mathbb{P}^n$  è 1-generica se tutte le sue coniugate non hanno entrate uguali a zero.

**Proposizione 4.2.2.** *Ogni matrice  $\Omega$  di ordine  $2 \times n - 1$  di forme lineari su  $\mathbb{P}^n$ , 1-generica, è coniugata alla matrice*

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} Z_0 & \dots & Z_{l-1} & Z_{l+1} & \dots & Z_{n-1} \\ Z_1 & \dots & Z_l & Z_{l+2} & \dots & Z_n \end{pmatrix}.$$

per qualche  $l$ .

*Dimostrazione.* Iniziamo osservando che se  $H \cong \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$  è un iperpiano, allora la restrizione di  $\Omega$  ad  $H$  sarà ancora 1–generica, equivalentemente  $H$  non conterrà nessuna delle rette  $\Lambda_{[\lambda,\mu]}$  ottenute dalle righe generalizzate di  $\Omega$ . Da qui segue che, nel caso in cui  $H$  sia descritto da una forma lineare  $W$ , la matrice  $\Omega$  può essere scritta, modulo  $W$ , in forma normale cioè  $\Omega$  è coniugata ad una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} Z_1 + a_{11}W & Z_2 + a_{12}W & \dots & Z_{n-1} + a_{1,n-1}W \\ Z_2 + a_{21}W & Z_3 + a_{22}W & \dots & Z_n + a_{2,n-1}W \end{pmatrix}.$$

È possibile rinominare le variabili  $Z_i$  in modo da ottenere la seguente forma

$$\begin{pmatrix} Z_1 + a_1W & Z_2 + a_2W & \dots & Z_{n-1} + a_{n-1}W \\ Z_2 & Z_3 & \dots & Z_n \end{pmatrix}.$$

Ora vogliamo moltiplicare questa matrice per una matrice  $B = (b_{ij})$  invertibile di ordine  $(n-1) \times (n-1)$  di scalari, che abbia il compito di mettere questa matrice nella forma desiderata cioè tale che il posto  $(k+1)$ –esimo della prima riga sia uguale al posto  $k$ –esimo della seconda riga per  $k = 1, \dots, n-2$ . Affinché  $B$  svolga questa azione si devono avere le seguenti condizioni sugli scalari  $(b_{ij})$ :

per la prima colonna

$$b_{11} = b_{22}, b_{21} = b_{32}, \dots, b_{n-2,1} = b_{n-1,2}$$

$$b_{12} = b_{n-1,1} = 0 \quad \text{e}$$

$$a_1 b_{12} + a_2 b_{22} + \dots + a_{n-1} b_{n-1,2} = 0$$

e per la  $k$ –esima colonna

$$b_{1k} = b_{2,k+1}, b_{2k} = b_{3,k+1}, \dots, b_{n-2,k} = b_{n-1,k+1}$$

$$b_{1,k+1} = b_{n-1,k} = 0 \quad \text{e}$$

$$a_1 b_{1,k+1} + a_2 b_{2,k+1} + \dots + a_{n-1} b_{n-1,k+1} = 0.$$

Se prendiamo ad esempio  $n = 9$  e  $l = 5$  allora

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 & 0 & 0 & c_2 & c_1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 0 & 0 & c_3 & c_2 & c_1 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & 0 & c_4 & c_3 & c_2 \\ 0 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & c_5 & c_4 & c_3 \\ 0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 & c_6 & c_5 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 & 0 & c_6 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & c_6 \end{pmatrix}.$$

Quindi in generale la matrice  $B$  è definita da due vettori  $b = (b_1, \dots, b_{n-l})$  e  $c = (c_1, \dots, c_{l+1})$ .

Adesso per ogni  $m$  consideriamo la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & \dots & a_{m+1} \\ a_3 & a_4 & \dots & a_{m+2} \\ \vdots & & & \\ a_{n-m} & a_{n-m+1} & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le condizioni descritte prima sugli scalari  $(b_{ij})$  ci dicono che i vettori  $b$  e  $c$  devono appartenere al nucleo della matrice  $A_{n-l}$  e  $A_{l+1}$  rispettivamente. Possiamo allora scegliere  $l$  come il più piccolo intero tale che  $A_{l+1}$  abbia un nucleo (quindi  $l \leq \frac{n-1}{2}$ ), scegliamo  $c \in \text{Ker}(A_{l+1})$  e  $b \in \text{Ker}(A_{n-l})$  vettori non nulli. Affermiamo ora che con tali scelte di  $b$  e  $c$ , la matrice  $B$  risulta nonsingolare. Per dimostrare quanto appena affermato utilizziamo il seguente risultato:

- Per ogni  $l$  tale che  $l \leq \alpha$  e  $l \leq d - \alpha$ , la varietà definita dalle equazioni determinantal di rango  $l$  associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \dots & Z_{d-\alpha} \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{d-\alpha+1} \\ \vdots & & & \\ Z_\alpha & Z_{\alpha+1} & \dots & Z_d \end{pmatrix}$$

è la varietà  $l$ -secante  $S_{l-1}(C)$  della curva razionale normale  $C \subset \mathbb{P}^d$ .

Questo risultato ci dice che  $l$  è il più piccolo intero tale che il vettore  $A = [a_2, \dots, a_{n-1}]$  giace su un piano  $\overline{P_1 \dots P_l}$   $l$ -secante  $C$ , infatti il vettore  $b$  è il vettore dei coefficienti del polinomio  $F$  di grado  $l$  che ha come radici i punti  $P_i$ .

Se  $m$  è scelto tra  $l$  e  $n - 2 - l$  sappiamo che  $A$  non può appartenere a nessun piano  $m$ -secante  $C$  eccetto quello contenente il piano  $\overline{P_1 \dots P_l}$ . Infatti se consideriamo la proiezione di  $C$  dal piano  $\overline{P_1 \dots P_{l-1}}$  la sua immagine è ancora una curva razionale normale  $\bar{C} \subset \mathbb{P}^{n-l-2}$  dove  $A$  viene mandato nel punto  $P_l$  che non può appartenere a nessun piano  $\overline{Q_1 \dots Q_m}$   $m$ -secante  $\bar{C}$  per  $m \leq n - l - 2$  senza che  $Q_i = P_l$  per qualche  $i$ .

Per lo stesso motivo se  $m = n - l - 1$ , il vettore  $A$  appartiene ad ogni piano  $m$ -secante  $\overline{Q_1 \dots Q_m}$  con  $Q_1, \dots, Q_m$  disgiunti da  $P_1, \dots, P_l$ . Perciò l'elemento generale del nucleo della matrice  $A_{n-l}$  sarà il vettore dei coefficienti di un polinomio  $Q$  avente radici in  $Q_1, \dots, Q_{n-l-1}$  diverse da  $P_1, \dots, P_l$ . Quindi  $B$  è nonsingolare.  $\square$

Questa proposizione insieme alla discussione fatta precedentemente ci dice che le superfici rigate possono essere descritte tramite equazioni determinantal.

### 4.3 Esempi

Vediamo adesso qualche esempio che ci mostra come passare da un sistema di tipo  $C^n [(n-1)^1, 1^{n-1}]$  che rappresenta una superficie rigata di ordine  $n$  alle sue equazioni determinantal.

- *Caso  $n = 2$*

In questo esempio trattiamo la superficie rigata  $S$  di ordine due in  $\mathbb{P}^3$ . La superficie  $S$  è descritta da un sistema lineare di coniche passanti semplicemente per due punti.

A meno di un cambio di coordinate, possiamo supporre che i punti siano  $P_1 = [1, 0, 0]$  e  $P_2 = [0, 0, 1]$ . Il sistema lineare di coniche passanti semplicemente per due punti ha dimensione tre, abbiamo perciò bisogno di quattro polinomi per definire la base di questo sistema.

Siano

$$X_0X_1, \quad X_0X_2, \quad X_1^2, \quad X_1X_2$$

Se adesso associamo questi polinomi alle coordinate in  $\mathbb{P}^3$  nel modo seguente

$$Z_0 = X_0X_1, \quad Z_1 = X_0X_2, \quad Z_2 = X_1^2, \quad Z_3 = X_1X_2$$

allora  $S$  è descritta dalle equazioni determinanti della matrice

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_2 \\ Z_1 & Z_3 \end{pmatrix}.$$

- *Caso  $n = 3$*

In questo esempio trattiamo la superficie rigata  $S$  di ordine tre in  $\mathbb{P}^4$ . Questa superficie è descritta da un sistema di curve cubiche aventi un punto doppio e passanti semplicemente per due punti.

A meno di un cambio di coordinate, possiamo assumere che  $P_1 = [1, 0, 0]$  sia il punto doppio,  $P_2 = [0, 1, 0]$  e  $P_3 = [0, 0, 1]$  siano i punti semplici. Allora bisogna trovare cinque polinomi per definire questo sistema lineare, siano

$$X_0X_1^2, \quad X_0X_2^2, \quad X_1^2X_2, \quad X_1X_2^2, \quad X_0X_1X_2.$$

Se associamo alle coordinate di  $\mathbb{P}^4$  questi polinomi nel modo seguente

$$\begin{aligned} Z_0 &= X_0X_1^2, & Z_1 &= X_0X_1X_2, & Z_2 &= X_0X_2^2, \\ Z_3 &= X_1^2X_2, & Z_4 &= X_1X_2^2 \end{aligned}$$

allora la superficie  $S$  è rappresentata dalle equazioni determinanti della matrice

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_4 \end{pmatrix}.$$

## 4.4 La superficie di Veronese

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti, che le superfici rigate di grado  $n$  sono normali in  $\mathbb{P}^{n+1}$ . In realtà tutte e sole le superfici di grado  $n$  normali in  $\mathbb{P}^{n+1}$

sono le superfici rigate, eccezion fatta per la superficie di Veronese. Questo è il motivo per cui descriviamo questa superficie nel capitolo riguardante le superfici rigate.

La *superficie di Veronese*  $V$  è l'immagine dell'applicazione di Veronese di grado due

$$v_2 : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5 \quad [x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2]$$

La superficie di Veronese può anche essere descritta dal luogo dei punti  $[z_0, \dots, z_5] \in \mathbb{P}^5$  tale che la matrice

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_3 & Z_4 \\ Z_3 & Z_1 & Z_5 \\ Z_4 & Z_5 & Z_2 \end{pmatrix}$$

abbia rango uno.

Se vogliamo descrivere la superficie di Veronese tramite un sistema lineare, osserviamo che l'immersione  $v_2 : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$  è definita dal sistema lineare di tutte le coniche. La superficie  $V$  è una superficie di grado quattro che non contiene alcuna retta, infatti basta osservare che se  $d \in \text{Pic}(V)$  è la classe di una retta allora si deve avere che  $h \cdot d = 2l \cdot d = 1$ , che non è possibile. Al contrario, la superficie  $V$  contiene un sistema lineare di coniche di dimensione due, dato dall'immagine delle rette di  $\mathbb{P}^2$ . Come conseguenza di questa proprietà si ha la seguente proposizione.

**Proposizione 4.4.1.** *Sia  $P$  un punto di  $\mathbb{P}^5 \setminus V$ . La proiezione da  $P$  induce un isomorfismo di  $V$  sulla sua immagine  $V' \subset \mathbb{P}^4$ .*

Si dimostra inoltre che la superficie di Veronese è l'unica superficie di  $\mathbb{P}^5$  avente questa proprietà.

*Dimostrazione.* Sia  $d \subset \mathbb{P}^2$  una retta e sia  $\varpi_d \subset \mathbb{P}^5$  il piano della conica  $v_2(d)$ . Sia  $X$  l'unione di tutti i piani  $\varpi_d$  al variare di  $d$  in  $\mathbb{P}^2$ . La varietà  $X$  ha dimensione minore o uguale a quattro, infatti  $X$  può essere vista come la proiezione su  $\mathbb{P}^5$  della varietà  $Z \subset \mathbb{P}^{2\vee} \times \mathbb{P}^5$  definita da  $Z = \{(d, x), x \in \varpi_d\}$ . Siano  $x$  e  $y$  due punti distinti di  $V$ . La retta  $l_{xy}$  è contenuta dentro  $\varpi_d$ , dove adesso  $d$  è la retta in  $\mathbb{P}^2$  che unisce i punti  $v_2^{-1}(x)$  e  $v_2^{-1}(y)$ . Quindi si

ha che tutte le rette che intersecano  $V$  in due punti sono contenute in  $X$ . Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

La proiezione di  $V'$  da un punto generico di  $\mathbb{P}^4$  è una superficie di grado quattro in  $\mathbb{P}^3$ , detta *superficie di Steiner*.

Se consideriamo invece un punto  $P \in V$ , la proiezione di  $V$  da  $P$  cioè  $\pi_P(V)$  è una superficie  $S \subset \mathbb{P}^4$  di grado tre. La superficie  $S$  è ottenuta da un sistema lineare di coniche su  $\mathbb{P}^2$  passanti per un punto  $O$ . Risulta immediato che questo sistema lineare definisce un'immersione  $i : \mathbb{F}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ , dove  $\mathbb{F}^1$  rappresenta lo scoppimento di  $\mathbb{P}^2$  in  $O$ . Per il teorema 4.1.5, sappiamo che  $\mathbb{F}^1 = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$  e che il suo gruppo di Picard è  $\text{Pic}(\mathbb{F}^1) = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$  dove  $f^2 = 0$ ,  $f.h = 1$  e  $H^2 = n$ , allora il sistema lineare che definisce l'immersione  $i$  è  $|h + f|$ .

È facile individuare tutte le rette contenute nella superficie  $S$ . Notiamo infatti che  $f.(f + h) = 1$  perciò le immagini delle fibre del fibrato  $\phi : \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  formano una famiglia di rette  $(D_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$  e sono tali che  $D_t \cap D_{t'} = \emptyset$  se  $t \neq t'$ . Consideriamo adesso l'unica curva  $B$  su  $\mathbb{F}^1$  che ha autointersezione negativa. La sua classe  $b \in \text{Pic}(S)$  è tale che  $b.(h + f) = 1$ , e la sua immagine tramite l'immersione  $i$  è una curva che interseca tutte le rette  $D_t$ . Queste sono tutte le rette contenute in  $S$  infatti tutte le altre curve irriducibili  $C$  su  $\mathbb{F}^1$ , diverse da  $B$  si scrivono in  $\text{Pic}(S)$  come  $af + bh$  con  $a, b > 0$ . Allora  $C.(h + f) = 2a + b > 1$ .

Ragionando allo stesso modo si può vedere che le coniche contenute in  $S$  sono le immagini tramite  $i$  delle trasformate totali delle rette di  $\mathbb{P}^2$ , più precisamente, le rette che non passano per  $O$  corrispondono alle coniche non-singolari, mentre le rette passanti per  $O$  corrispondono alle coniche degeneri  $i(B) \cup D_t$ .

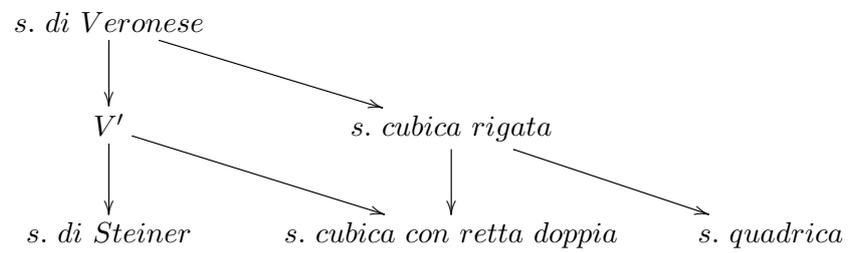
**Proposizione 4.4.2.** *La superficie rigata  $S$  di grado tre in  $\mathbb{P}^4$  è contenuta in un sistema lineare di dimensione due di quadriche dentro  $\mathbb{P}^4$ , dunque  $S$  ne è l'intersezione. Inoltre per ogni fascio di quadriche  $(\lambda Q_1 + \mu Q_2)$  contenente  $S$  si ha che  $Q_1 \cap Q_2 = S \cup \varpi$  dove  $\varpi$  è un piano e  $\varpi \cap S$  è una conica. Viceversa per tutte le coniche su  $S$ , contenute in un piano  $\varpi$ , l'unione  $\varpi \cup S$  è l'intersezione di due quadriche.*

*Dimostrazione.* Le quadriche di  $\mathbb{P}^4$  tagliano su  $S$  le immagini delle trasformate strette delle quartiche di  $\mathbb{P}^2$  passanti per  $O$  con molteplicità due. I sistemi lineari  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2)|$  e  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)|$  hanno la stessa dimensione. Il passaggio doppio per un punto di una curva piana impone tre condizioni, perciò esistono almeno tre quadriche linearmente indipendenti che contengono  $S$ , siano  $Q_1$  e  $Q_2$  due di queste, esse sono necessariamente irriducibili. La loro intersezione  $Q_1 \cap Q_2$ , è una superficie di grado quattro che contiene  $S$  perciò è l'unione di  $S$  e di un piano  $\varpi$ . Se il piano  $\varpi$  ha equazioni  $L = M = 0$ , le equazioni delle quadriche  $Q_i$  risultano essere  $LA_i + MB_i$  con  $i = 1, 2$  dove  $L, M, A_i, B_i$  sono forme lineari su  $\mathbb{P}^4$ . Il determinante  $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$  si annulla in tutti i punti  $S - \varpi$ , quindi  $S$  è contenuta nella quadrica  $Q_3 = A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ . Allora risulta  $S = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ , quindi il sistema lineare di quadriche contenenti  $S$  è generato da  $Q_1, Q_2, Q_3$  ed ha dunque dimensione due. L'intersezione  $\varpi \cap S = \varpi \cap Q_3$  è una conica. Viceversa se  $C \subset S$  è una conica e  $\varpi$  è il piano che la contiene, esiste un sistema lineare di dimensione uno di quadriche contenenti  $S \cup \varpi$ , basta imporre alle quadriche contenenti  $S$  di contenere un punto di  $\varpi - C$ . Allora risulta immediato che l'intersezione delle quadriche di questo sistema lineare unidimensionale è  $P \cup S$ .  $\square$

**Corollario 4.4.1.** *Se  $P$  è un punto di  $P^4 \setminus S$ , la proiezione  $\pi_P$  da  $P$  di  $S$  è una superficie cubica avente come luogo singolare una retta doppia.*

*Dimostrazione.* Siano  $Q_1$  e  $Q_2$  due quadriche distinte contenenti  $S$  e  $P$ . Si ha che  $Q_1 \cap Q_2 = S \cup \varpi$ , dove  $\varpi$  è un piano passante per  $P$ . Tutte le rette bisecanti  $S$  passanti per  $P$  intersecano  $Q_1$  e  $Q_2$  in tre punti, tali rette sono perciò contenute dentro  $Q_1$  e  $Q_2$  e perciò anche dentro  $\varpi$ . Si deduce allora che la proiezione da  $P$  è un isomorfismo al di fuori della curva  $C = S \cap \varpi$ , e la sua restrizione a  $C$  è un morfismo di grado due su una retta che è perciò una retta doppia per  $\pi_P(S)$ .  $\square$

Infine la proiezione di  $S$  da un punto  $P \in S$  è una superficie quadrica in  $\mathbb{P}^3$ . Questa quadrica è nonsingolare se e solo se  $P \notin i(B)$ , dove  $i : \mathbb{F}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^4$  è l'immersione descritta prima. Possiamo allora riassumere quanto detto attraverso il seguente grafico:



dove le frecce verticali stanno ad indicare la proiezione da un punto dello spazio esterno alla superficie, mentre le frecce oblique indicano la proiezione da un punto interno alla superficie.

## Capitolo 5

# Criterio di razionalità di Castelnuovo

### 5.1 Criterio di razionalità di Castelnuovo

Il criterio di razionalità di Castelnuovo risulta una conseguenza del teorema di Enriques-Noether dimostrato nel capitolo 4.1 e di alcuni risultati riguardanti le superfici minimali.

Fissiamo innanzitutto alcune notazioni. Sia  $X$  una superficie nonsingolare. Per ogni  $n > 0$  si definisce il *plurigenere* di  $X$  come

$$p_n = \dim \Gamma(X, \omega_X^{\otimes n}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(nK_X)).$$

Si dimostra che il plurigenere di una superficie è un invariante birazionale.

Ricordiamo le seguenti notazioni:

$q = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$  è l'irregolarità di  $X$

$\pi(D) = \frac{1}{2}(D^2 + K_X \cdot D) + 1$  è il genere virtuale di un divisore  $D$  di  $S$ .

**Proposizione 5.1.1.** *Sia  $m$  il minimo delle componenti connesse della curva  $D = \sum C_i$  e sia  $k$  la dimensione del nucleo dell'omomorfismo*

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D)$$

Allora

$$\dim H^1(S, \mathcal{O}(K_S + D)) = m - 1 + k$$

e

$$\dim |K_S + D| = \pi(D) + p_g - q + m + k - 2$$

*Dimostrazione.* Il teorema di Riemann-Roch ci dice che

$$\dim |K_S + D| + \dim |-D| = \frac{1}{2}(D^2 + K_S \cdot D) + p_g - q - 1 + \dim H^1(S, \mathcal{O}(K_S + D)).$$

Poiché  $\dim |-D| = -1$  abbiamo

$$\dim |K_S + D| = \pi(D) - 1 + p_g - q + \dim H^1(S, \mathcal{O}(K_S + D)).$$

Quindi per concludere la dimostrazione, per la dualità di Serre, basta far vedere che  $\dim H^1(S, \mathcal{O}(-D)) = m - 1 + k$ .

Dalla successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-D) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$$

otteniamo

$$\dim H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) = \dim H^0(S, \mathcal{O}_D) - 1 + k$$

Ora per vedere che  $\dim H^0(S, \mathcal{O}_D) = m = \#\text{componenti connesse di } D$ , si osservi che una funzione  $\gamma \in H^0(S, \mathcal{O}_D)$  si solleva ad una  $\tilde{\gamma}$  funzione regolare sulla normalizzazione  $\tilde{D}$  di  $D$ . La funzione  $\tilde{\gamma}$  è costante su ogni componente irriducibile di  $\tilde{D}$ ; inoltre se due componenti  $\tilde{C}_1$  e  $\tilde{C}_2$  sono tali che le corrispondenti  $C_1$  e  $C_2$  abbiano almeno un punto in comune, allora  $\tilde{\gamma}|_{\tilde{C}_1} = \tilde{\gamma}|_{\tilde{C}_2}$ , e questo conclude la dimostrazione.  $\square$

**Lemma 5.1.1.** *Sia  $S$  una superficie e sia  $C \subset S$  una curva. Se  $C$  non è una  $(-1)$ -curva, allora*

$$K_S \cdot C < 0 \Rightarrow C^2 \geq 0$$

o equivalentemente

$$C^2 < 0 \Rightarrow K_S \cdot C \geq 0$$

*Dimostrazione.* Poiché  $C$  è irriducibile,  $\pi(C) \geq 0$  quindi

$$K_S \cdot C + C^2 = 2\pi(C) - 2 \geq -2.$$

Se entrambi  $K_S \cdot C$  e  $C^2$  fossero negativi, si avrebbe necessariamente  $\pi(C) = 0$  e  $C^2 = -1$ , cioè  $C$  sarebbe una  $(-1)$ -curva, cosa che contraddirebbe l'ipotesi.  $\square$

**Lemma 5.1.2.** Sia  $D = \sum n_i C_i$  con  $n_i \geq 1$ , un divisore effettivo su  $S$ . Se  $|K_S + D|$  è vuoto, allora si ha la seguente disuguaglianza

$$\sum \pi(C_i) \leq q - p_g.$$

**Proposizione 5.1.2.** Sia  $S$  una superficie minimale tale che  $K_S^2 < 0$ . Allora per ogni divisore  $D$  su  $S$ , il sistema lineare  $|D + nK_S|$  è vuoto per  $n$  sufficientemente grande.

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che  $|D + nK_S|$  sia non vuoto per qualche

$$n > \max\left(-\frac{K_S \cdot D}{D^2}, -\frac{D^2}{K_S^2}\right).$$

Allora per un tale  $n$  il sistema lineare  $|D + nK_S|$  contiene un divisore effettivo  $\sum n_i C_i$  con  $n_i \geq 1$ . Poiché

$$K_S \cdot (D + nK_S) = K_S \cdot D + nK_S^2 < 0$$

almeno una delle  $C_i$ , diciamo  $C_1$ , soddisfa  $K_S \cdot C_1 < 0$ . Perciò

$$(D + mK_S) \cdot C_1 = (D \cdot C_1) + mK_S C_1 < 0$$

se  $m > -\frac{D \cdot C_1}{K_S \cdot C_1}$ . Ma allora  $|D + mK_S| = \emptyset$  per ogni tale  $m$ , infatti per il lemma precedente si ha che  $C_1^2 \geq 0$  il che ci dice che  $E \cdot C_1 > 0$  per ogni  $E \in |D + mK_S|$ , che è una contraddizione.  $\square$

La proposizione appena dimostrata è utile per dimostrare la seguente.

**Proposizione 5.1.3.** Sia  $S$  una superficie minimale con  $q = 0, p_2 = 0$ . Allora esiste una curva razionale nonsingolare  $C$  su  $S$  tale che  $C^2 \geq 0$ .

*Dimostrazione.* Questa dimostrazione è fatta nel caso  $k = \mathbb{C}$ .

Poiché  $p_2 = 0$  anche  $p_g = 0$  e  $\dim |2K_S| + 1 = p_2 = 0$ . Quindi applicando la disuguaglianza di Riemann-Roch al sistema anticanonico  $|-K_S|$ , otteniamo

$$\dim |-K_S| \geq K_S^2.$$

Facciamo vedere che per ogni divisore  $D$ , il sistema lineare completo  $|D + nK_S|$  è vuoto per ogni intero  $n$  sufficientemente grande.

Se  $K_S^2 < 0$  quanto appena detto segue dalla proposizione 5.1.2.

Se  $K_S^2 \geq 0$  allora per la disuguaglianza precedente si ha che  $\dim |-K_S| \geq 0$ , perciò  $|-K_S|$  contiene un divisore  $E \geq 0$ . Il divisore  $E$  non può essere nullo altrimenti contraddirebbe l'ipotesi che  $p_2 = 0$ , allora  $E > 0$  cioè  $E$  è un divisore effettivo. Perciò

$$|D + nK_S| = |D - nE|$$

è vuoto per ogni  $n$  sufficientemente grande, infatti non è possibile che tutte le componenti di  $D$  contengano  $nE$  per ogni  $n$ .

Per ogni sistema ampio  $|A|$  su  $S$ , scegliamo un intero non negativo  $m_A$  tale che

$$\dim |A + m_A K_S| \geq 0 \quad \text{e} \quad \dim |A + (m_A + 1)K_S| = -1.$$

Queste condizioni sono equivalenti alle seguenti

$$|A + m_A K_S| \neq \emptyset \quad \text{e} \quad |A + (m_A + 1)K_S| = \emptyset.$$

Sia  $D_A$  un elemento di  $|A + m_A K_S|$ . Facciamo vedere che esiste un sistema lineare ampio  $|A|$  tale che  $D_A$  sia effettivo.

Supponiamo che  $D_A = 0$  per ogni sistema lineare ampio  $|A|$ . Questo ci dice che  $A \sim -m_A K_S$ . Poiché ogni fascio invertibile può essere espresso nella forma  $A_1 - A_2$  si deduce che il gruppo  $H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$  è generato da  $K_S$ . D'altra parte poiché  $p_g = q = 0$ , la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_S \xrightarrow{e} \mathcal{O}_S^* \rightarrow 0$$

prova che  $H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \cong H^2(S, \mathbb{Z})$ . Perciò  $H^2(S, \mathbb{Z})$  è generato da  $c_1 = -e(K_S)$ , dove  $c_1$  è la prima classe di Chern. Da ciò segue che  $c_1^2 = \pm 1$  e il secondo numero di Betti è  $b_2 = 1$ . Poiché  $b_1 = 2q = 0$ , quanto appena trovato contraddirebbe la formula di Noether.

Allora fissiamo un sistema ampio  $|A|$  tale che il divisore  $D_A \in |A + m_A K_S|$  sia effettivo, e sia  $D_A = \sum n_i C_i$  con  $n_i \geq 1$ . Poiché  $|D_A + K_S|$  è vuoto, segue che  $\pi(C_i) = 0$  per tutti gli  $i$ .

Se  $C_i^2 \geq 0$  per almeno una curva  $C_i$ , allora poniamo  $C = C_i$ , e  $C$  risulta essere una curva razionale nonsingolare tale che  $C^2 \geq 0$ .

Supponiamo allora che  $C_i^2 < 0$  per ogni indice  $i$ , allora per il lemma 5.1.1 si ha che  $K_S.C_i < 0$ . Dalla disuguaglianza di Riemann-Roch si ha

$$-1 = \dim |D_A + K_S| \geq \frac{1}{2}(D_A^2 + K_S.D_A).$$

Otteniamo allora che

$$m_A^2 K_S^2 = (2m_A + 1)K_S \cdot D_A - D_A^2 - K_S D_A + A^2 \geq 2 + A^2.$$

Quindi  $K_S^2 > 0$  e perciò  $\dim |-K_S| \geq K_S^2 > 0$ , quindi esiste un divisore effettivo  $E \in |-K_S|$  tale che una delle componenti irriducibili di  $E$  interseca  $C_1$ .

Se  $E$  fosse una curva irriducibile allora poiché  $E^2 = t^2 > 0$ , si avrebbe che  $E$  e  $C_1$  sono distinte e  $E \cdot C_1 > 0$ , ma questo contraddirebbe il fatto che  $E \cdot C_1 = -K_S \cdot C_1 < 0$ .

Quindi  $E$  è riducibile, cioè  $E = \sum j_\lambda \Theta_\lambda$  con  $j_\lambda \geq 1$  e  $\sum j_\lambda \geq 2$ . Allora dalla proposizione 5.1.1 deduciamo che

$$\pi(\Theta_\lambda) = \dim |\Theta_\lambda + K_S| + 1 = \dim |\Theta_\lambda - E| + 1 = 0$$

Inoltre poiché  $\sum j_\lambda \Theta_\lambda \cdot K_S = -K_S^2 < 0$ , una delle curve  $\Theta_\lambda$ , diciamo  $\Theta_1$ , soddisfa  $K_S \cdot \Theta_1 < 0$  quindi dal lemma 5.1.1  $C = \Theta_1$  è una curva razionale nonsingolare tale che  $C^2 \geq 0$ .  $\square$

Da questa proposizione deduciamo il seguente teorema, il criterio di razionalità di Castelnuovo.

**Teorema 5.1.1.** *Sia  $S$  una superficie tale che  $q = p_2 = 0$ . Allora  $S$  è razionale.*

*Dimostrazione.* Le ipotesi e la tesi sono invarianti per trasformazioni birazionali, perciò possiamo supporre che  $S$  sia minimale.

Per il teorema appena dimostrato, esiste una curva  $C$  nonsingolare irriducibile e razionale su  $S$  tale che  $C^2 \geq 0$ . Allora per il teorema di Riemann-Roch

$$\dim |C| \geq C^2 + 1 \geq 1.$$

Un qualunque elemento del sistema lineare  $|C|$  è nonsingolare e razionale, perciò per il teorema di Enriques-Noether,  $S$  è razionale, infatti imponendo qualche condizione su  $|C|$ , si può ottenere un sistema lineare di dimensione uno, che definisce un'applicazione  $\varphi : S \rightarrow \Theta$ , dove  $\Theta$  è una curva, tale che le fibre sono isomorfe a  $\mathbb{P}^1$ .  $\square$

Con il criterio di razionalità di Castelnuovo abbiamo classificato tutte le superfici razionali.

Tramite la proposizione 5.1.3 è possibile dimostrare anche il seguente importante teorema riguardante le superfici minimali.

**Teorema 5.1.2.** *Sia  $S$  una superficie minimale razionale. Allora  $S$  è isomorfa a  $\mathbb{P}^2$  o ad una delle superfici  $\mathbb{F}^n$  con  $n \neq 1$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $H$  una sezione iperpiana di  $S$ . Consideriamo l'insieme  $A$  delle curve  $C$  razionali nonsingolari con  $C^2 \geq 0$ . Per la proposizione vista precedentemente si ha che  $A \neq \emptyset$ . Sia  $m = \min \{C^2 | C \in A\}$  e sia  $A_m = \{C \in A | C^2 = m\}$ . Sia  $C \in A_m$  tale che  $C.H$  è minimale in  $A_m$ . Dividiamo la dimostrazione in tre passi.

Passo 1.

Mostriamo che ogni divisore  $D \in |C|$  è una curva razionale nonsingolare.

Sia  $D = \sum n_i C_i$ , notiamo che da quanto osservato in precedenza si ha che  $\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + D)) = \dim H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + C)) = 0$  poiché  $(K_S + C).C = -2$ , perciò  $\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + C_i)) = 0$  per ogni  $i$ , il che ci dice che  $C_i$  è una curva razionale nonsingolare.

Poiché  $K_S.C < 0$  allora esiste  $i$  tale che  $K_S.C_i < 0$  che implica  $C_i^2 \geq 0$  poiché  $S$  è minimale. Poniamo  $D' = \sum_{j \neq i} n_j C_j$  così che

$$D = n_i C_i + D' \quad \text{e} \quad D'.C_i \geq 0.$$

Allora  $C^2 = D^2 = n_i^2 C_i^2 + n_i(C_i.D') + D.D'$ ; ora  $D.D' = C.D' \geq 0$ , dunque  $m = C^2 \geq n_i^2 C_i^2 \geq 0$ . Per la minimalità di  $m$  si deve avere che  $C_i^2 = m$ . Inoltre  $H.C = n_i H.C_i + H.D'$  ci dice che  $n_i = 1$  e che  $H.D' = 0$  per la minimalità di  $H.C$  in  $A_m$ , allora  $D' = 0$  e  $D = C_i$ .

Passo 2.

Mostriamo che  $\dim |C| \leq 2$ .

Sia  $P$  un punto su  $S$ ,  $\mathcal{O}_P$  il suo anello locale e  $\mathcal{P}$  il suo ideale massimale. Poiché  $\dim \mathcal{O}_P/\mathcal{P} = 3$ , il sistema lineare di curve di  $|C|$  passanti per  $P$  con molteplicità maggiore o uguale a due ha codimensione minore o uguale a tre in  $|C|$ . Perciò tale sistema lineare è non vuoto se  $\dim |C| \leq 3$  che contraddice il passo uno.

Passo 3.

Sia  $C_0 \in |C|$ . Consideriamo la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S(C) \rightarrow \mathcal{O}_{C_0}(m) \rightarrow 0$$

Poiché  $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$  deduciamo che  $\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(C)) = m + 2$  e che  $|C|$  non ha punti base su  $C_0$ . Da ciò segue che  $|C|$  non ha punti base.

Considerando anche il passo due, si possono avere due possibilità:

- $m = 0$ :  
 $|C|$  determina un morfismo  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  le cui fibre sono curve razionali nonsingolari. Allora  $S$  risulta essere una superficie rigata su  $\mathbb{P}^1$  perciò una  $\mathbb{F}_n$  con  $n = 1$  perché  $S$  è minimale.
- $m = 1$ :  
 $|C|$  determina un morfismo  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ ; per ogni  $P \in \mathbb{P}^2$  la fibra  $\varphi^{-1}(P)$  è intersezione di due curve razionali in  $|C|$  perciò è ridotta ad un punto. Il morfismo  $\varphi$  risulta allora essere un isomorfismo.

□

Vediamo adesso un'importante conseguenza del criterio di razionalità di Castelnuovo.

**Definizione 5.1.1.** *Sia  $X$  una varietà di dimensione  $n$ . Si dice che  $X$  è unirazionale se esiste un'applicazione razionale dominante  $\varphi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow X$ .*

Come sappiamo se  $\varphi$  è birazionale allora  $X$  è razionale.

Quello che ci si chiede è se una varietà unirazionale è razionale. Sappiamo che per le curve è vero infatti si ha il seguente teorema dovuto a Lüroth.

**Teorema 5.1.3.** *Tutte le curve unirazionali sono razionali.*

Il criterio di Castelnuovo ci dice che questo è vero anche per le superfici.

**Corollario 5.1.1.** *Tutte le superfici unirazionali sono razionali.*

*Dimostrazione.* Sia  $S$  una superficie unirazionale. Allora per il teorema sulla risoluzione delle singolarità, sappiamo che esiste un morfismo suriettivo  $\pi : \bar{S} \rightarrow S$  dove  $\bar{S}$  è una superficie razionale. Poiché  $q(\bar{S}) = p_2(\bar{S}) = 0$  si ha che  $q(S) = p_2(S) = 0$ . □

# Bibliografia

- [1] A. Beauville. *Complex Algebraic Surfaces*. London Mathematical Society, Cambridge, 1996.
- [2] F. Conforto. *Le superficie Algebriche*. Zanichelli, Bologna, 1939.
- [3] I.V. Dolgachev. *Topics in Classical Algebraic Geometry*. 2010.
- [4] I.V. Dolgachev, V.A. Iskovskikh. *Finite Subgroups of the Plane Cremona Group*.
- [5] J. Harris. *Algebraic Geometry A First Course* volume 133 di *Graduate texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York, 2000.
- [6] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry* volume 52 di *Graduate texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York 1977.
- [7] D. Mumford. *Lectures on curves on an algebraic surface*. Harvard University [Dept. of Mathematics] 1964.
- [8] J.G. Semple, L. Roth. *Introduction to Algebraic Geometry*. Oxford University Press, USA 1985.
- [9] J.P. Serre. *Critère de Rationalité pour les Surfaces Algébriques* d'après un cours de K.Koidara, Princeton, Novembre 1956. Séminaire Bourbaki, Février 1957.
- [10] I.R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry Varieties in Projective Space*, second edition. Springer-Verlag 1994.
- [11] I.R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry Schemes and Complex Manifold*, second edition. Springer-Verlag 1994.