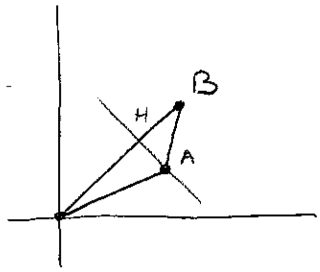
ESERCIZIO 1. [PUNTI 6]
Siano $A = (3, 2)$ e $B = (4, 6)$.

(1) Calcolare la retta r passante per l'origine ed avente come direzione il vettore $\overrightarrow{OB}$.
(2) Calcolare l'area del triangolo OAB
(3) Calcolare la retta perpendicolare a r e passante per il punto $C(11, 13)$.

$r: \underline{x} = t\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} \rightarrow r: 3x - 2y = 0$



retta $\perp r$ e passante per A

$2x + 3y + d = 0 \longrightarrow 6 + 6 = -d$

$2x + 3y - 12 = 0$

$H: \begin{cases} 2x+3y-12=0 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+\frac{9}{2}x-12=0 \\ y=\frac{3}{2}x \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+9x-24=0 \\ / \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{24}{13} \\ y=\frac{36}{13} \end{cases}$

altezza: $|AH| = \sqrt{\left(\frac{24}{13}-3\right)^2 + \left(\frac{36}{13}-2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{13}\right)^2 + \left(\frac{10}{13}\right)^2} =$

$= \frac{\sqrt{325}}{13} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$

$|OB| = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

<u>Area:</u> $\frac{|AH| \cdot |OB|}{2} = \cancel{2}\sqrt{13} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 5.$

retta $\perp r$ e passante per C: $2x+3y+d=0$

$22 + 39 = -d \qquad \boxed{2x+3y-61=0}$

ESERCIZIO 3. [PUNTI 6]

Consideriamo i vettori $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{w} = (-1, 2, -3)$ e $\mathbf{z} = (0, 0, 1)$. Calcolare:

(1) $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \bullet \mathbf{z}$

(2) l'equazione del piano che che contiene i vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ e passante per l'origine O

(3) esiste un piano che contiene tutti e tre i vettori?

1

$v \wedge w = (-12, 0, 4)$

$(v \wedge w) \bullet z = 4$

2

$x = t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t - s \\ y = 2(t+s) \\ z = 3(t-s) \end{cases} \rightarrow 3x - z = 0.$

3 NO perchè sono linearmente indipendenti

ESERCIZIO 4. [PUNTI 6]

Calcolare i seguenti limiti:

(1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1000} + 2 \cdot 6^n}{2^n \cdot 3^n + 1}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{(n+1)/3}$$

$$\lim \frac{6^n \left(2 + \frac{n^{1000}}{6^n}\right)}{6^n \left(1 + 1/6^n\right)} \to 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\left(\frac{n-1}{n-1} + \frac{2}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{n-1}{n-1} + \frac{2}{n-1}\right)^2} = \sqrt[3]{e^2}.$$

ESERCIZIO 5. [PUNTI 6]

Stabilire il carattere delle seguenti serie e, se possibile, calcolarne la somma:

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{2^n + 3^n}$$ diverge

(4) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 16n + 15} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right) = 1/3 .$$

ESERCIZIO 2. [PUNTI 6]
Sia π il piano $x - y = 0$, $P = (2, 1, 0)$ e $Q = (2, 2, 1)$. Determinare:

(1) La retta r perpendicolare a π e passante per P
(2) Il piano σ parallelo a π e passante per P
(3) Il piano (se esiste) perpendicolare a π e passante per P e Q.

$\pi: \; x-y=0 \quad \rightarrow \quad v_\perp = (1,-1,0)$

$r \perp \pi$ e passante per $P(2,1,0) \quad \rightarrow \quad \boxed{\underline{x} = t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}} \qquad \begin{cases} x = t+2 \\ y = -t+1 \\ z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t = x-2 \\ y = -x+2+1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x+y-3=0 \\ z=0 \end{cases}}$

2) $\sigma // \pi$ e passante per P: $\quad x-y+d=0 \quad \rightarrow$

$2-1+d=0 \quad \rightarrow \quad d=-1 \qquad \boxed{x-y-1=0}$

3) $\underline{x} = t\vec{v_\perp} + s\overrightarrow{PQ} + P = t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

$\boxed{x+y-z-3=0}$