Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Geologia, A.A. 2008/2009
Esercitazioni di Matematica II

Equazioni differenziali ordinarie: separazione delle variabili

Consideriamo un'equazione differenziale ordinaria del I^o ordine che, in forma normale, è del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x)g(y)$$

dove $f(x), g(y)$ sono funzioni. Una tale equazione si dice a variabili separabili, ed è risolubile nel seguente modo:

$$\int \frac{dy}{g(y)} \;=\; \int f(x)\,dx.$$

(1) Risolvere le seguenti equazioni a variabili separabili, evidenziando le eventuali condizioni di esistenza della soluzione.

$$\begin{aligned}
&(y+3)y' = x-2, && y' = -xe^y \\
&y(x^2-1)y' = 2x, && y(x-1)y' = x(y+1) \\
&(yx^2+2x^2-y-2)y' = 2xy, && y' = xy+2x+y+2.
\end{aligned}$$

Equazioni differenziali ordinarie: sostituzione di variabile

Consideriamo equazioni omogenee del tipo:

$$y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$$

Tale equazione non è variabili separabili, tuttavia può essere ricondotta a tale nel seguente modo: poniamo:

$$y = kx \qquad\qquad dy = kdx + xdk,$$

allora l'equazione diventa:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{kdx+xdk}{dx} = \frac{x^2+(kx)^2}{2kx^2} = \frac{x^2(1+k^2)}{2kx^2} = \frac{1+k^2}{2k}$$

Allora possiamo riscrivere l'equazione nella forma:

$$\frac{xdk}{dx} + k = \frac{1+k^2}{2k} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{xdk}{dx} = \frac{1+k^2-2k^2}{2k}$$

che risulta essere a variabili separabili. Allora:

$$\frac{2k}{1-k^2}\,dk = \frac{dx}{x}$$

e la soluzione è :

$$cx = \frac{1}{1-k^2} \qquad \Longrightarrow \qquad c(x^2-y^2) = x$$

(2) Risolvere le seguenti equazioni differenziali omogenee:

$$y' = \frac{3y-x}{x+y}, \qquad\qquad y' = -y + y^2 - 2$$

Consideriamo equazioni del tipo:

$$y' = (x-y)^2 + (x-y) + 1.$$

Tale equazione non è omogenea nè a variabili separabili, tuttavia ammette una sostituzione ovvia:

$$x - y = z \qquad\qquad dz = dx - dy.$$

Quindi l'equazione di partenza diventa:

$$\frac{dx-dz}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx} = z^2 + z + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dz}{dx} = -(z^2+z)$$

a variabili separabili.

(3) Risolvere le seguenti equazioni differenziali

$$y' = (x+y)^3 + (x+y) + 1, \qquad y' = (x-2y) - (x-2y)^2 + (x-2y)^3.$$

Equazioni differenziali lineari

Consideriamo equazioni del tipo:

$$y' + A(x)y = B(X)$$

dove $A(x), B(x)$ sono funzioni nella sola x. Tali eqazioni sono dette lineari e

$$\begin{cases} \text{Omogenee, se} & B(x) = 0 \\ \text{Non omogenee, se} & B(x) \neq 0 \end{cases}$$

In entrambi i casi, l'integrazione avviene in modo diretto e la soluzione generale è del tipo:

$$y = \frac{1}{e^{\int A(x)dx}} \left(\int e^{\int A(z)dz} B(x)dx + c \right).$$

(La teoria generale è stata svolta a lezione)

(4) Risolvere le seguenti equazioni differenziali

$$y' - y(x^2 + 3x - 1) = 0, \qquad y' - xe^x y = 0$$

$$y' + 2y = 3x, \qquad y' + \frac{y}{x} = x^2 + 1$$

$$y' = -3xy + 2x, \qquad y' + 3y = e^x$$

$$y' + \frac{y}{x-1} = \frac{(x-2)^2}{x-1}.$$

Problema di Cauchy

(5) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \frac{3}{x(1+y^2)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \frac{ye^{2x}}{1+e^{2x}} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' - \frac{2y}{x} = x^2(x-2)e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$