

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Geologia, A.A. 2008/2009
Esercitazioni di Matematica II

Equazioni differenziali lineari del I ordine:

(1) Risolvere le seguenti equazioni differenziali.

$$\begin{array}{ll} \frac{y'}{1+y^2} = (x+1)e^x, & y' = -e^{y+x} \\ y(x^2-7)y' = 2x, & y' = 2y - x^3(2-x)e^x \\ (x+y-1)y' + (x+y-1) = 0, & e^{-x}y' - xy = 0. \end{array}$$

Problema di Cauchy

(2) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} y' + 2xy = 2x^3 \\ y(-1) = e^{-1} \end{cases} & \begin{cases} y' + 10y = e^{-10x} \\ y(0) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y' = (y^2 - 5y + 6)e^{2x} \sin x \\ y(0) = 2 \end{cases} & \begin{cases} y' + \frac{y}{x} = 4e^x \\ y(1) = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y' + y \tan x = \frac{1}{\cos x} \\ y(0) = 4 \end{cases} & \begin{cases} y' = e^{2x-3y} \\ y(0) = 0. \end{cases} \end{array}$$

Caduta dei gravi *

(3) L'equazione della caduta di un corpo di massa m da un'altezza h , supposta la resistenza dell'aria proporzionale alla velocità, è data dall'equazione:

$$v'(t) = g - \frac{h}{m}v(t)$$

dove g è la accelerazione gravitazionale.

- (a) Verificare esiste una soluzione costante del problema;
- (b) scrivere l'integrale generale;

(c) Passare al limite per $t \rightarrow \infty$, e verificare che tale limite tende al valore costante determinato in (i), e trarne le conclusioni.

(4) Un altro modello per lo stesso problema, è dato dalla seguente equazione, supposta la resistenza dell'aria proporzionale al quadrato della velocità:

$$v'(t) = g - \frac{h}{m}v^2(t).$$

Risolvere il problema con la condizione iniziale $v(0) = 0$, e verificare che anche in questo caso la velocità si stabilizza.

Circuiti ed intensità di corrente *

(5) Consideriamo un circuito autoinduttivo, ed indichiamo con i l'intensità di corrente, con V la tensione, R la resistenza del circuito, L l'induttanza. Allora:

$$V = Ri(t) + Li'(t)$$

Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} V = Ri(t) + Li'(t) \\ i(0) = 0. \end{cases}$$

Calcolare la soluzione del problema supponendo:

- (a) $V = cost$;
- (b) $V = A \cos \omega t$.

Velocità di raffreddamento di un corpo *

(6) Assumiamo che la velocità di raffreddamento di un corpo sia proporzionale alla differenza della temperatura del corpo stesso con lo spazio ambiente.

Consideriamo un corpo riscaldato alla temperatura di $110^\circ C$ e posto in un ambiente a $10^\circ C$. Dopo un'ora la sua temperatura è di $60^\circ C$. Calcolare quanto tempo occorre affinché la temperatura raggiunga $35^\circ C$.

*Gli esercizi segnati da * sono presi dal testo "Salsa, Squellati, Esercizi di Matematica, vol II, Zanichelli Editore".*