Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Geologia, A.A. 2008/2009
Esercitazioni di Matematica II

Equazioni differenziali lineari omogenee del II ordine a coefficienti costanti

Consideriamo la generale equazioni differenziale omogenea del II ordine a coefficienti costanti:

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

L'equazione ammette soluzioni del tipo $y = e^{px}$, con p costante. L'equazione caratteristica è :

$$ap^2 + bp + c = 0$$

ed in base al segno del $\Delta = b^2 - 4ac$ ammette soluzioni reali o complesse che corrispondono a soluzioni dell'equazione differenziali dei seguenti tipi:

$$\begin{cases} y(x) = c_1 e^{p_1 x} + c_2 e^{p_2 x} & \Delta > 0 \\ y(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}(c_1 x + c_2) & \Delta = 0 \\ y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x + \phi) & \Delta < 0, \quad p_1 = \alpha + i\beta \end{cases}$$

(1) Risolvere le seguenti:

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \qquad y'' - 5y' + 14y = 0$$
$$y'' + y' + y = 0, \qquad y'' + 4y' + 2y = 0$$
$$2y'' - 3y' - 2 = 0, \qquad y'' + 2y' + 2 = 0.$$

(2) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - 3y' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Oscillatore armonico

L'oscillatore armonico è la modellizzazione di un corpo, immerso nel vuoto, a cui è applicata una forza elastica del tipo:

$$mx''(t) \;=\; -kx(t)$$

dove m è la massa del corpo e k la costante di elasticità della molla.
Quindi, posto $\omega^2 = \frac{k}{m}$, otteniamo l'equazione omogenea:

$$x'' \;+\; \omega x \;=\; 0.$$

Il delta dell'equazione caratteristica associa è negativo, quindi la soluzione è del tipo:

$$x(t) \;=\; A\cos(\omega t + \phi) \;=\; B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)$$

dove A, ϕ, B, C sono costanti che dipendono dai dati iniziali.
Se il corpo e' immerso nell'aria (cioè in un mezzo viscoso), e quindi soggetto ad una forza esterna (proporzionale alle velocità), l'equazione diventa:

$$x''(t) \;+\; \frac{\beta}{m}x'(t) \;+\; \frac{k}{m}x(t) \;=\; x''(t) \;+\; Bx'(t) \;+\; \omega^2 x(t) \;=\; 0.$$

la cui soluzione dipende dai dati iniziali B, ω.

Equazioni differenziali lineari non omogenee del II ordine a coefficienti costanti

Un'equazione differenziale lineare non omogenea del II ordine è del tipo

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

le cui soluzioni si trovano calcolando prima la soluzione omogenea ed aggiungendo una soluzione particolare. Prima di affrontare il metodo "della variazione dell costanti" (che verrà affrontato la prossima lezione) per determinare la soluzione particolare, studiamo alcuni casi semplici.

(3) Determinare le soluzione delle seguenti:

$$\begin{aligned}
y'' - 5y' + 5y = e^x, &\qquad y'' - 5y' + 6y = 2e^{2x}\\
y'' + y = x^2 + x, &\qquad y'' + y = e^x\\
y'' + 2y' = x - 1, &\qquad y'' + 2y' = e^{2x}\\
y'' + 2y' = x - 1 &\qquad y'' + 2y' - 3y = e^x\\
y'' + 2y' - 3y = x^2 + x + 1 &\qquad y'' - 2y = x^2
\end{aligned}$$