

Alcuni esercizi sulle equazioni differenziali

(Le soluzioni sono alla fine)

Calcolo dell'integrale generale

Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali calcolare l'insieme di tutte le possibili soluzioni. Fare inoltre la **verifica**, sostituendo la soluzione cercata nella equazione e verificando che l'equazione stessa è soddisfatta.

Ad esempio, per l'equazione

$$y' + 3y = 6$$

le soluzioni sono $y(x) = C e^{-3x} + 2$. La verifica consiste nel sostituire $y = C e^{-3x} + 2$ (da cui $y' = -3 C e^{-3x}$) nella equazione ricavando

$$-3 C e^{-3x} + 3(C e^{-3x} + 2) = 6$$

Equazioni lineari del primo ordine

- E0 $y' - 2y = 8$
- E1 $y' - xy = 0$
- E2 $y' - \frac{1}{x}y = 0$
- E3 $y' + \frac{1}{x}y = 2$
- E4 $y' + \frac{1}{x}y = 3x$
- E5 $y' - xy = 2x$
- E6 $y' + 5y = 26\sin x$
- E7 $y' + 5y = 26\cos x$
- E8 $y' - 7y = -8e^{3x}$
- E9 $y' + 8y = 6e^{-2x}$

Equazioni lineari del secondo ordine omogenee

- F0 $y'' - 2y' - 3y = 0$
- F1 $y'' + 4y = 0$
- F2 $y'' - 2y' = 0$
- F3 $y'' - 2y' + y = 0$

- F4 $y'' + 2y' + y = 0$
- F5 $y'' - 4y' + 5y = 0$
- F6 $y'' + 2y' + 2y = 0$
- F7 $y'' + 9y = 0$
- F8 $y'' - 3y' + 2y = 0$
- F9 $y'' + 3y' + 2y = 0$

Equazioni lineari del secondo ordine non omogenee

- F0N $y'' - 2y' - 3y = 6$
- F1N $y'' + 4y = 4$
- F2N $y'' - 2y' = 2$
- F3N $y'' - 2y' + y = x$
- F4N $y'' + 2y' + y = -3\cos(2x) - 4\sin(2x)$
- F5N $y'' - 4y' + 5y = 10$
- F6N $y'' + 2y' + 2y = 4\cos(2x) - 2\sin(2x)$
- F7N $y'' + 9y = 6\cos(3x)$
- F8N $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$
- F9N $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$

Problemi ai valori iniziali

Per ciascuno dei seguenti problemi calcolare l' **unica soluzione** che soddisfa sia l'equazione sia le condizioni iniziali. Fare la **verifica**, sostituendo la soluzione cercata nella equazione e nelle condizioni iniziali e verificando che entrambe sono soddisfatte.

Ad esempio, per il problema

$$y' + 3y = 6 \quad \text{con} \quad y(0) = 4$$

la soluzione è $y(x) = 2e^{-3x} + 2$. La verifica consiste nel sostituire $y = 2e^{-3x} + 2$ (da cui $y' = -6e^{-3x}$) nella equazione ricavando

$$-6e^{-3x} + 3(2e^{-3x} + 2) = 6$$

e nel sostituire $y = 2e^{-3x} + 2$ nella condizione iniziale ricavando

$$y(0) = 2 + 2 = 4.$$

Fatto questo, eseguire il calcolo finale richiesto (che dovrebbe dare un risultato intero). Nell'esempio sopra riportato, se viene richiesto *Allora $\ln(y(2) - 2) - \ln(2)$ vale:* bisognerà calcolare $\ln(2e^{-6}) - \ln(2) = \ln(e^{-6}) = -6$, che sarà la risposta finale. In alcuni casi, la risposta finale potrebbe essere ottenibile anche **senza** calcolare la soluzione $y(x)$. Vediamo se trovate quali sono questi casi...

Equazioni lineari del primo ordine

- E0P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' - 2y = 8$ con $y(0) = 0$. Allora $\ln\left(\frac{y(2)+4}{4}\right)$ vale:
- E1P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' - xy = 0$ con $y(0) = 1$. Allora $2\ln(y(3))$ vale:
- E2P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' - \frac{1}{x}y = 0$ con $y(1) = 2$. Allora $y(2)$ vale:
- E3P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' + \frac{1}{x}y = 2$ con $y(1) = 3$. Allora $2y(4)$ vale:
- E4P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' + \frac{1}{x}y = 3x$ con $y(1) = 5$. Allora $2y(2)$ vale:
- E5P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' - xy = 2x$ con $y(0) = -1$. Allora $\ln(y(2) + 2)$ vale:
- E6P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' + 5y = 26\sin x$ con $y(0) = -1$. Allora $y(\pi)$ vale:

- E7P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' + 5y = 26\cos x$ con $y(0) = 6$. Allora $y'(0)$ vale:
- E8P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' - 7y = -8e^{3x}$ con $y(0) = 3$. Allora $y'(0) - y(0)$ vale:
- E9P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' + 8y = 6e^{-2x}$ con $y(0) = 3$. Allora $y'(0) + 8y(0)$ vale:

Equazioni lineari del secondo ordine omogenee

- F0P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 2y' - 3y = 0$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$. Allora $\ln(y(3))$ vale:
- F1P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 4y = 0$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 4$. Allora $y(\pi)$ vale:
- F2P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 2y' = 0$ con $y(0) = 3$ e $y'(0) = 2$. Allora $\ln(y'(1)) - \ln(2)$ vale:
- F3P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 2y' + y = 0$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1/e$. Allora $3(y(1))$ vale:
- F4P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 2y' + y = 0$ con $y(0) = 2$ e $y'(0) = -3$. Allora $5\ln(y(1))$ vale:
- F5P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 4y' + 5y = 0$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$. Allora $y(\pi)y(-\pi)$ vale:
- F6P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 2y' + 2y = 0$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Allora $y''(\pi/4)/y(\pi/4)$ vale:
- F7P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 9y = 0$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Allora $2y(2\pi) + y(\pi)$ vale:
- F8P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 3y' + 2y = 0$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$. Allora $y(1) - (y(1/2))^2$ vale:
- F9P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 3y' + 2y = 0$ con $y(0) = 3$ e $y'(0) = -6$. Allora $y(2)y(-2)$ vale:

Equazioni lineari del secondo ordine non omogenee

- F0Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 2y' - 3y = 6$ con $y(0) = -2$ e $y'(0) = 0$. Allora $2y(3)$ vale:
- F1Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 4y = 4$ con $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$. Allora $y(\pi/2)$ vale:
- F2Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 2y' = 2$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$. Allora $y(2)$ vale:
- F3Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 2y' + y = x$ con $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1$. Allora $y(1)$ vale:
- F4Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 2y' + y = -3\cos(2x) - 4\sin(2x)$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Allora $2y(3\pi)$ vale:
- F5Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 4y' + 5y = 10$ con $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$. Allora $2y(7\pi/4)$ vale:
- F6Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 2y' + 2y = 4\cos(2x) - 2\sin(2x)$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$. Allora $2y(5\pi/4)$ vale:
- F7Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 9y = 6\cos(3x)$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = -3$. Allora $y(1)$ vale:
- F8Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$ con $y(0) = 3$ e $y'(0) = 6$. Allora $y''(0)$ vale:
- F9Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Allora $y(3)y(-3)$ vale:

SOLUZIONI (sperando che siano tutte giuste: sono 60...)

Equazioni lineari del primo ordine

- E0 $y(x) = C e^{2x} - 4$
- E1 $y(x) = C e^{x^2/2}$
- E2 $y(x) = C x$
- E3 $y(x) = \frac{C}{x} + x$
- E4 $y(x) = \frac{C}{x} + x^2$
- E5 $y(x) = C e^{x^2/2} - 2$
- E6 $y(x) = C e^{-5x} + 5\sin x - \cos x$
- E7 $y(x) = C e^{-5x} + \sin x + 5\cos x$
- E8 $y(x) = C e^{7x} + 2e^{3x}$
- E9 $y(x) = C e^{-8x} + e^{-2x}$

Equazioni lineari del secondo ordine omogenee

- F0 $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$
- F1 $y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$
- F2 $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2$
- F3 $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$
- F4 $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$
- F5 $y(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
- F6 $y(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
- F7 $y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$
- F8 $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$
- F9 $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

Equazioni lineari del secondo ordine non omogenee

- F0N $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - 2$
- F1N $y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + 1$

- F2N $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 - x$
- F3N $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + x + 2$
- F4N $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \cos(2x)$
- F5N $y(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2$
- F6N $y(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \sin(2x)$
- F7N $y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + x \sin(3x)$
- F8N $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{3x}$
- F9N $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + x e^{-x}$

Problemi ai valori iniziali

Problemi per equazioni lineari del primo ordine

- E0P $y(x) = 4 e^{2x} - 4$. Quindi il risultato è 4.
- E1P $y(x) = e^{x^2/2}$. Quindi il risultato è 9.
- E2P $y(x) = 2x$. Quindi il risultato è 4.
- E3P $y(x) = \frac{2}{x} + x$. Quindi il risultato è 9.
- E4P $y(x) = \frac{4}{x} + x^2$. Quindi il risultato è 12.
- E5P $y(x) = e^{x^2/2} - 2$. Quindi il risultato è 2.
- E6P $y(x) = 5 \sin x - \cos x$. Quindi il risultato è 1.
- E7P $y(x) = e^{-5x} + \sin x + 5 \cos x$. Quindi il risultato è -4. Notare che, senza calcolare esplicitamente la $y(x)$, dalla equazione calcolata in 0 si ha $y'(0) + 5y(0) = 26 \cos(0)$. Sapendo che $y(0)$ vale 6 si ricava $y'(0) = 26 - 30 = -4$ Perché mi sembra di sentire dei mugiti di sorpresa?
- E8P $y(x) = e^{7x} + 2e^{3x}$. Quindi il risultato è 10. Anche qui non era necessario, per arrivare al risultato, calcolare la $y(x)$. Dalla equazione, e dalla condizione $y(0) = 3$ si ricava infatti $y'(0) - 21 = -8$ che fornisce subito $y'(0) = 13$.
- E9P $y(x) = 2e^{-8x} + e^{-2x}$. Quindi il risultato è 6. Questo era quasi un insulto alla intelligenza. Infatti l'equazione mi dice che $y'(x) + 8y(x)$ fa *sempre* $6e^{-2x}$. In particolare, per $x = 0$, fa 6. Muggiti di disappunto...

Problemi per equazioni lineari del secondo ordine omogenee

- F0P $y(x) = e^{-x}$. Quindi il risultato vale -3.
- F1P $y(x) = \cos(2x) + 2\sin(2x)$. Quindi il risultato vale 1.
- F2P $y(x) = e^{2x} + 2$. Quindi il risultato vale 2.
- F3P $y(x) = \frac{x e^x}{e}$. Quindi il risultato vale 3.
- F4P $y(x) = 2e^{-x} - xe^{-x}$. Quindi il risultato vale -5.
- F5P $y(x) = e^{2x} \cos x$. Quindi il risultato vale 1.
- F6P $y(x) = e^{-x} \sin x$. Quindi il risultato vale -2.
- F7P $y(x) = \cos(3x)$. Quindi il risultato vale 1.
- F8P $y(x) = e^{2x}$. Quindi il risultato vale 0.
- F9P $y(x) = 3e^{-2x}$. Quindi il risultato vale 9.

Problemi per equazioni lineari del secondo ordine non omogenee

- F0Q $y(x) = -2$. Quindi il risultato vale -4.
- F1Q $y(x) = 2\cos(2x) + 1$. Quindi il risultato vale -1.
- F2Q $y(x) = 1 - x$. Quindi il risultato vale -1.
- F3Q $y(x) = x + 2$. Quindi il risultato vale 3.
- F4Q $y(x) = \cos(2x)$. Quindi il risultato vale 2.
- F5Q $y(x) = 2$. Quindi il risultato vale 4.
- F6Q $y(x) = \sin(2x)$. Quindi il risultato vale 2.
- F7Q $y(x) = -\sin(3x) + x\sin(3x)$. Quindi il risultato vale 0.
- F8Q $y(x) = e^x + e^{2x} + e^{3x}$. Quindi il risultato vale 14. Si noti che l'equazione calcolata in zero fornisce $y''(0) - 3y'(0) + 2y(0) = 2$. Usando $y(0) = 3$ e $y'(0) = 6$ si ottiene $y''(0) = 2 + 3 \times 6 - 2 \times 3 = 14$.
- F9Q $y(x) = xe^{-x}$. Quindi il risultato vale -9.