

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012**  
**AL210 - Algebra 2**  
**Esercitazione 12 (16 Dicembre 2011)**

**Esercizio 1.** Costruire un campo con 25 elementi.

**Esercizio 2.** Sia dato il polinomio  $f(X) = X^3 + X^2 + 3X + 1 \in \mathbb{Z}_7[X]$ .

(a) Discutere la riducibilità di  $f(X)$  in  $\mathbb{Z}_7[X]$ .

(b) Costruire  $\mathbb{F}_{343} \cong \mathbb{Z}_7(\alpha)$ .

(c) Determinare l'inverso di  $2\alpha + 5 \in \mathbb{F}_{343}$ .

**Esercizio 3.** Sia dato il polinomio  $f(X) = 5X^3 + X^2 + X + 7 \in \mathbb{Z}_{11}[X]$ .

(a) Descrivere  $A := \mathbb{Z}_{11}[X]/(f(X))$  e stabilire se è un campo.

(b) Determinare tutti gli elementi invertibili e i divisori dello zero di  $A$ .

**Esercizio 4.** Siano dati i polinomi  $f(X) = X^2 + 1$  e  $g(X) = X^2 + 2X + 2$  in  $\mathbb{Z}_3[X]$ .

(a) Dimostrare che  $f(X)$  e  $g(X)$  sono irriducibili in  $\mathbb{Z}_3[X]$ .

(b) Determinare una radice di  $g(X)$  in  $\mathbb{Z}_3(\alpha) \cong \mathbb{Z}_3[X]/(f(X))$  e una radice di  $f(X)$  in  $\mathbb{Z}_3(\beta) \cong \mathbb{Z}_3[X]/(g(X))$ .

(c) Costruire gli isomorfismi  $\varphi : \mathbb{Z}_3(\alpha) \rightarrow \mathbb{Z}_3(\beta)$  e  $\psi : \mathbb{Z}_3(\beta) \rightarrow \mathbb{Z}_3(\alpha)$ .