Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
AL210 - Algebra 2
Esercitazione 7 (11 Novembre 2011)

Esercizio 1. Verificare che l'anello $2\mathbb{Z}_{12}$ non è unitario, ma il suo sottoanello $4\mathbb{Z}_{12}$ lo è.

Soluzione: $2\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$. Verifichiamo che nessuno degli elementi di $2\mathbb{Z}_{12}$ è un'unità. Chiaramente $\overline{0} \cdot \overline{x} = \overline{0}$ per ogni $\overline{x} \in 2\mathbb{Z}_{12}$; per gli altri elementi si ha:

$$\begin{aligned}
&\overline{2} \cdot \overline{4} = \overline{8} \Rightarrow \overline{2},\ \overline{4} \text{ non sono unità;}\\
&\overline{6} \cdot \overline{8} = \overline{0} \Rightarrow \overline{6},\ \overline{8} \text{ non sono unità;}\\
&\overline{10} \cdot \overline{2} = \overline{8} \Rightarrow \overline{10} \text{ non è unità.}
\end{aligned}$$

Sia ora $4\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$. Verifichiamo che $\overline{4}$ è l'unità di $4\mathbb{Z}_{12}$:

$$\begin{aligned}
\overline{4} \cdot \overline{4} &= \overline{4};\\
\overline{4} \cdot \overline{8} &= \overline{8};\\
\overline{4} \cdot \overline{0} &= \overline{0}.
\end{aligned}$$

Dunque $4\mathbb{Z}_{12}$ è unitario e la sua unità è $\overline{4}$.

Esercizio 2. Sia $d \in \mathbb{Z}$. Mostrare che l'insieme:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \left\{ a + b\sqrt{d} \,|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

è un sottoanello di $\mathbb{C}$.

Determinare poi il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[i]$.

Soluzione: Dobbiamo verificare che $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è un sottogruppo (abeliano) di $\mathbb{C}$, chiuso rispetto al prodotto e con unità.
Siano $x := a + \sqrt{d}b$ e $y := a' + \sqrt{d}b'$ due elementi di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Risulta:

$$\begin{aligned}
x - y &= (a + \sqrt{d}b) - (a' + \sqrt{d}b') = (a - a') + \sqrt{d}(b - b') \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]\\
x \cdot y &= (a + \sqrt{d}b) \cdot (a' + \sqrt{d}b') = (aa' - dbb') + \sqrt{d}(ab' + a'b) \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}].
\end{aligned}$$

Inoltre $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$.

Per quanto appena dimostrato sappiamo che $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è un sottoanello del campo $\mathbb{C}$, quindi ogni elemento non nullo di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ha un inverso in $\mathbb{C}$. Gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ saranno tutti e soli gli $x = a + \sqrt{d}b \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ tali che $x^{-1} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ (dove $x^{-1} \in \mathbb{C}$).
Denotiamo con $\overline{x}$ il coniugato di x. Allora:

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{a^2 - db^2}.$$

Sia $d = -1$, si verifica facilmente che $\frac{a}{a^2+b^2}$ e $\frac{b}{a^2+b^2}$ sono interi se e soltanto se $a = \pm 1$ e $b = 0$ oppure $a = 0$ e $b = \pm 1$. Gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[i]$ sono quindi 4:

$$1,\ -1,\ i,\ -i.$$

Esercizio 3. Provare che un anello A è privo di divisori destri dello zero se e solo se è privo di divisori sinistri dello zero.

Esercizio 4. Sia A un anello commutativo e I, J ideali di A. Si definisce l'insieme:

$$IJ := \{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n : n \in \mathbb{N}, x_i \in I, y_i \in J, i = 1, \ldots, n\}.$$

(a) Provare che IJ è un ideale di A contenuto nell'ideale $I \cap J$.

(b) Provare che il sottoinsieme $\{xy : x \in I, y \in J\}$ non è in generale un ideale di A.