

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
AL210 - Algebra 2
Esercitazione 9 (25 Novembre 2011)

Esercizio 1. Sia dato l'anello $A := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Dimostrare che 3 è un elemento irriducibile di A che non è primo. Dedurne che A non è fattoriale.

Esercizio 2. Sia $d \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ è il campo dei quozienti di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Esercizio 3. Sia p un primo. Dimostrare che:

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b \right\}$$

è un sottoanello di \mathbb{Q} . Dimostrare che $\mathbb{Z}_{(p)}$ ha un unico ideale massimale, ovvero $p\mathbb{Z}_{(p)}$.

Esercizio 4. Sia $A := \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

(a) Dato l'ideale $I = (5)$, descrivere A/I .

(b) Sia $M := \{z \in A : 2 \mid N(z)\}$. Stabilire se M è un ideale di A e, in caso affermativo, stabilire se è primo e/o massimale.