

Università degli Studi Roma Tre – Corso di Laurea in Matematica
AL210: Tutorato 5

A.A. 2011-2012 – Docente: Prof.ssa F. Tartarone

Mirko Moscatelli – Giorgio Scattareggia

28.10.2011

1. Sia (G, \cdot) un gruppo finito. Se H è un sottogruppo di indice 2, dimostrare che tutti gli elementi di ordine dispari stanno in H [†].
2. Siano date in S_{11} le seguenti permutazioni:
$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 7 & 2 & 6 & 4 & 1 & 11 & 8 & 9 & 10 & 3 \end{pmatrix};$$
$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 3 & 7 & 6 & 10 & 5 & 9 & 8 & 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$
 - Verificare che σ e τ sono coniugate in S_{11} e in A_{11} .
 - Trovare una permutazione pari ed una dispari che coniughino σ in τ [‡].
3. Sia (G, \cdot) un gruppo. Dimostrare che se $\frac{G}{Z(G)}$ è ciclico, allora G è abeliano [‡].
4. Sia dato il gruppo additivo $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$. Dimostrare che:
 - ogni elemento di \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ha ordine finito;
 - per ogni $n > 1$ esiste un sottogruppo di \mathbb{Q}/\mathbb{Z} di ordine n , e descrivere un tale sottogruppo;
 - $\langle \frac{3}{5} + \mathbb{Z}, \frac{5}{8} + \mathbb{Z} \rangle = \langle \frac{1}{40} + \mathbb{Z} \rangle$ [†].
5. Trovare tutti gli omomorfismi da \mathbb{Z}_{27} a \mathbb{Z}_{12} e dire quanti sono gli omomorfismi suriettivi [†].
6. Dimostrare che il numero di trasposizioni in S_n è $\binom{n}{2}$ e che il numero di k -cicli è $(k-1)! \binom{n}{k}$ [‡].
7. Calcolare il numero di elementi di ordine 10 di $D_4 \times \mathbb{Z}_5$ e dire quale è il massimo degli ordini di tutti gli elementi [‡].
8. Dimostrare che \mathbb{Z}_{n^2} e $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ non sono isomorfi [‡].
9. Sia V il gruppo di Klein. Mostrare che $\text{Aut}(V) \cong S_3$ [§].

[†]Esercizio tratto dal I esonero di AL2, anno accademico 2008/2009.

[‡]Esercizio tratto dal I esonero di AL2, anno accademico 2009/2010. Per questo gruppo di esercizi sono disponibili testi e soluzioni, a cura di Lorenzo Di Biagio, presso i link
http://www.mat.uniroma3.it/users/pappa/CORSI/AL2_09_10/AL2_09_10_1.pdf
http://www.mat.uniroma3.it/users/pappa/CORSI/AL2_09_10/svolgimentoesonero1.pdf.

[§]Soluzione a pag. 38 del libro “Gruppi” di *Antonio Machì* (libro disponibile in biblioteca).