

# AL210 Algebra 210: Gruppi e Anelli

A.A. 2011/2012

Prof. Francesca Tartarone

## 1. Gruppi

Definizione di gruppo. Notazione additiva e moltiplicativa. Unicità dell'elemento neutro e dell'inverso. Gruppi numerici e di matrici. Ordine di un elemento. Sottogruppi. Sottogruppi generati da un insieme  $X$ . Gruppi ciclici. Ordine degli elementi di un gruppo ciclico. Sottogruppi di un gruppo ciclico. Sottogruppi di  $(\mathbb{Z}, +)$ . Gruppi di permutazioni. Gruppi diedrali. Classi laterali destre e sinistre rispetto ad un sottogruppo  $H$ . Teorema di Lagrange. Esponente di un gruppo. Isomorfismi di gruppi. Teorema di Cayley. Omomorfismi di gruppi: prime proprietà. Classi laterali rispetto a nucleo di un omomorfismo. Immagini omomorfe di gruppi ciclici. Relazioni di equivalenza compatibili con l'operazione di un gruppo. Sottogruppi normali di un gruppo dato: intersezione, sottogruppi generati, struttura reticolare. Quoziente di un gruppo su un suo sottogruppo normale. Relazione di coniugio fra gli elementi di un gruppo. Sottogruppi coniugati e loro relazioni con i sottogruppi normali. Automorfismi e automorfismi interni di gruppi. Gruppi ciclici infiniti e di ordine  $n$ : loro generatori. Teorema di omomorfismo e teoremi di isomorfismo per i gruppi. Teorema di corrispondenza dei sottogruppi (e dei sottogruppi normali) tramite un omomorfismo. Caso particolare del quoziente di un gruppo. Azione di un gruppo su un insieme. Orbita di un elemento. Esempi:  $S_n$ , coniugio, laterali di un sottogruppo. Stabilizzatore di un elemento. Centralizzante di un elemento. Equazione delle classi. Calcolo del numero di orbite in un  $G$ -insieme  $X$ . Il centro di un  $p$ -gruppo non è banale. Un gruppo di ordine  $p^2$  è sempre abeliano. Il teorema di Cauchy (esistenza di un elemento di ordine  $p$  in un gruppo  $G$  tale che  $p \mid |G|$ ). Classi coniugate in  $S_n$ . Numero di  $r$ -cicli distinti in  $S_n$ . Prodotto diretto esterno ed interno di gruppi.

## 2. Anelli

Anelli: definizioni ed esempi. Principali tipi di anelli (unitari, commutativi, interi, corpi e campi). Sottoanelli. Ideali destri, sinistri e bilateri. Esempi. Un anello commutativo, integro e finito è un campo. Un campo non ha ideali propri. Sottoanelli e ideali generati da un insieme  $X$ . Ideali principali. Relazioni di equivalenza compatibili in un anello e ideali bilateri. Corrispondenza biunivoca fra questi due insiemi. Anello quoziente. Ideali primi e massimali e loro caratterizzazioni tramite il quoziente dell'anello. Omomorfismi di anelli. Teorema di omomorfismo e teoremi di isomorfismo per gli anelli. Corrispondenza di ideali e sottoanelli fra anelli omomorfi. Campo dei quozienti di un anello integro e commutativo. Relazione di divisibilità fra due elementi

di un dominio. Elementi associati, irriducibili e primi in un dominio. Massimo Comun Divisore e Identità di Bezout: loro descrizione attraverso gli ideali. Relazione fra MCD-domini e domini di Bezout. Lemma di Euclide. Elementi irriducibili che sono anche primi. Domini a fattorizzazione unica (UFD). Esistenza del MCD in un UFD. Relazione fra UFD, domini di Bezout e MCD-domini. Domini a Ideali Principali (PID). Domini Euclidei: valutazione euclidea. Esempi: campi,  $Z$ ,  $Z[i]$ ,  $K[X]$ . Elementi invertibili in un Dominio Euclideo. Polinomi irriducibili. Teorema di Gauss. Anelli di polinomi a coefficienti in un UFD. Quozienti di anelli di polinomi a coefficienti in un campo:  $K[X]/I$ . Elementi invertibili in  $K[X]/I$ . Ampliamenti di campi. Descrizione di un campo come spazio vettoriale su un suo sottocampo. Campi finiti: caratteristica e numero di elementi. Costruzione di campi finiti come quozienti di  $Z_p[X]$ .

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] G.M. PIACENTINI CATTANEO, *Algebra, un approccio algoritmico*. Decibel – Zanichelli, (1996).  
[2] D. DIKRANJAN - M.S. LUCIDO, *Aritmetica e algebra*. Liguori, (2007).

## BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [3] I. N. HERSTEIN, *Algebra*. Editori Riuniti, (2003). .  
[4] M. ARTIN, *Algebra*. Bollati Boringhieri, (1997).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO