Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL2 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Esercitazione 5 (5 dicembre 2008)

Esercizio 1. Sia $v : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ l'omomorfismo di anelli definito nel seguente modo:

$$v(f(X)) := f(2+5i).$$

(a) Determinare nucleo ed immagine di v.

(b) Applicare a v il Teorema Fondamentale di Omomorfismo.

Esercizio 2. Nell'anello degli interi di Gauss, $\mathbb{Z}[i]$ si consideri l'ideale:

$$I := (4-7i, 11+2i).$$

(a) Mostrare che I è principale generato da $2-i$.

(b) Mostrare che $\mathbb{Z}[i]/I$ è un campo; scriverne esplicitamente gli elementi e determinarne la caratteristica.

Esercizio 3. Si consideri il dominio integro $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

(a) Verificare che in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ non esistono elementi di norma 2.

(b) Verificare che $2, 1+\sqrt{-7}$ e $1-\sqrt{-7}$ sono elementi irriducibili, ma non primi, in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

(c) Trovare un elemento di $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ che ammette due fattorizzazioni in elementi irriducibili non associate.

(d) Dimostrare che in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ si ha $\gcd(2, 1+\sqrt{-7}) = 1$ e non sussiste un'identità di Bézout.

Esercizio 4. Siano $f_a(X) := X^3 + X^2 + X + a \in \mathbb{Z}_3[X]$ ed $I_a := (f_a(X))$.

(a) Determinare per quali valori $a \in \mathbb{Z}_3$ l'anello quoziente $R_a := \mathbb{Z}_3[X]/I_a$ è un campo.

(b) Mostrare che $(X^5 - X^4) + I_2$ è invertibile in R_2 e calcolarne l'inverso.

Esercizio 5. Si consideri il dominio integro $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$.

(a) Trovare tutti gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$.

(b) Verificare che nessun elemento di $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ ha norma 2 o 7.

(c) Dimostrare che $2+\sqrt{-1}, 2-\sqrt{-10}, 2, 7$ sono elementi irriducibili di $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ e dire se $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ è un UFD oppure no.

(d) Trovare, a meno di associati, i divisori comuni di $a := 7(2+\sqrt{-10})$ e $b := 14$ e, se esiste, calcolare un $\gcd(a, b)$.