TUTORATO 8 • 01-12-2008 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1:

$$C = \frac{\mathbb{R}[X]}{I} \quad \text{con} \quad I = (x^2+1)$$

Trovare l'inverso di $X + I$

$$C = \{ f(x) + I \mid f(x) \in \mathbb{R}[x] \} = \{ (aX+b) + I \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

Sia $t = X + I$, si vede subito che $t^2 = -1$

Trovare l'inverso di $X + I$, è come trovare l'inverso di t.

L'inverso di t sarà un certo $\alpha \in C$ t.c. $\alpha t = 1$

e $\alpha = at + b$.

$\Rightarrow \alpha t = t(at+b) = at^2 + bt = -a + bt = 1 \iff a = -1$ e $b = 0$

$\Rightarrow t^{-1} = \alpha = -t$. Infatti $t(-t) = -t^2 = -(-1) = 1$.

ESERCIZIO 2:

La verifica che Φ è un omomorfismo la diamo solo per il punto a, le altre sono analoghe.

a $\Phi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$ t.c. $\Phi(f(x)) = f(0)$

Φ omomorfismo:

- $\Phi(0_{\mathbb{Z}[x]}) = \Phi(0) = 0$ ok
- $\Phi(f(x) \cdot g(x)) = (f(x)g(x))(0) = f(0)\,g(0)$ ok
- $\Phi(f(x) + g(x)) = (f(x) + g(x))(0) = f(0) + g(0) = \Phi(f(x)) + \Phi(g(x))$ ok $\Rightarrow \Phi$ è omomorfismo.

$\mathrm{Ker}\,\Phi = \{ f(x) \in \mathbb{Z}[X] \mid f(0) = 0 \} = \{ a_0 + a_1 X + \dots + a_k X^k \mid a_0 = 0 \} = (X)$

$\mathrm{Im}\,\Phi = \{ a \in \mathbb{Z} \mid f(0) = a \ \exists f(x) \in \mathbb{Z}[X] \} = \mathbb{Z}$

Per ogni $a \in \mathbb{Z}$ basta considerare $f(x) = a$, oppure $f(x) = X + a$ se si vuole un caso non banale.

Questo lo si poteva vedere anche applicando il TFO, infatti:

$$\frac{\mathbb{Z}[X]}{\mathrm{Ker}\,\Phi} \cong \mathrm{Im}\,\Phi$$

$$\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X)} \cong \mathbb{Z}$$