TUTORATO 9 - SOLUZIONI

ESERCIZIO 1:

Ricordiamo che in $\mathbb{Z}_n$ si ha:

I è un ideale $\iff \exists q \in \mathbb{Z}$ t.c. $p \mid q$ e $I = q\mathbb{Z}_n$

$q\mathbb{Z}_n \subset w\mathbb{Z}_n \iff w \mid q$

Sia $n = p_1^{i_1} \cdots p_k^{i_k}$ una decomposizione in primi di n.

Allora $m\mathbb{Z}_n$ è massimale $\iff m = p_J$ per qualche J

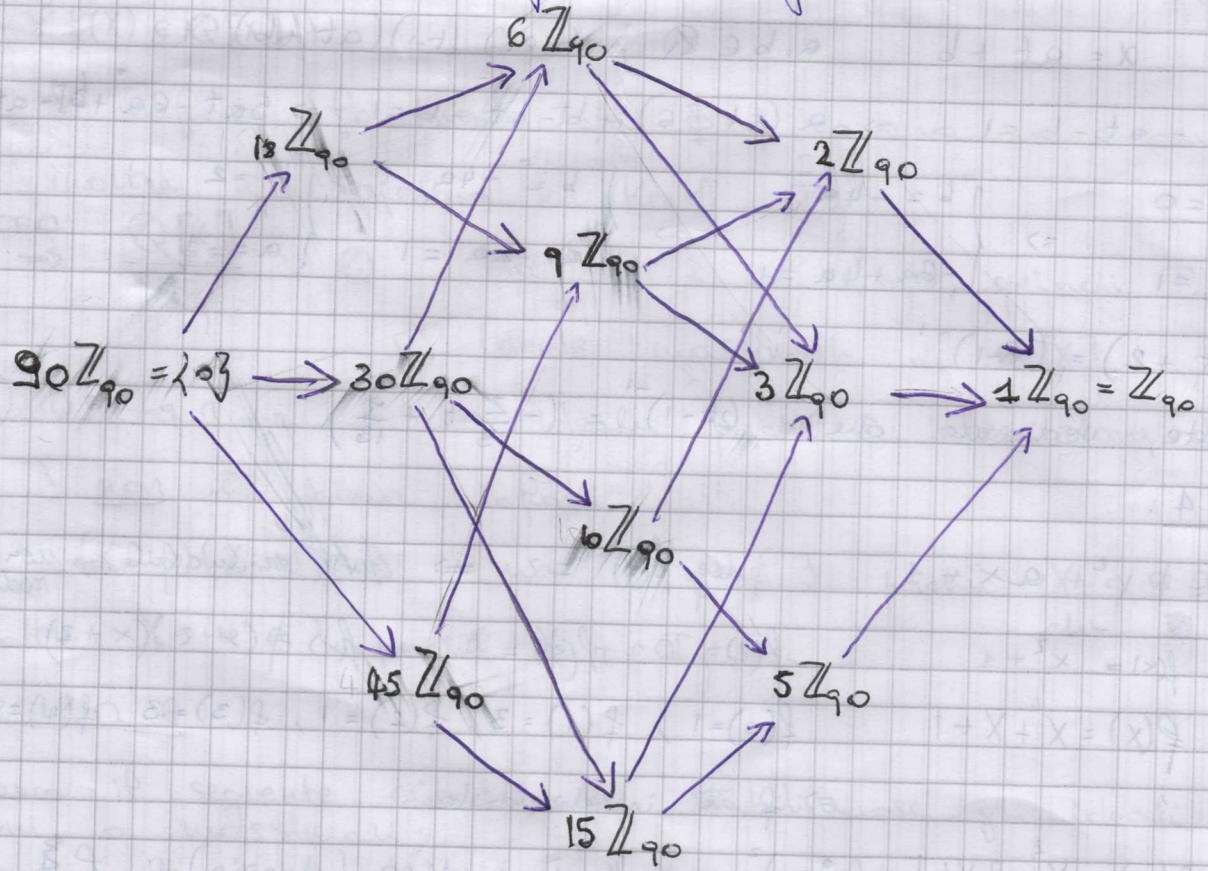
ed è minimale $\iff m = p_1^{i_1} \cdots p_J^{i_J - 1} \cdots p_k^{i_k}$ per qualche J.

Consideriamo $\mathbb{Z}_{101}$, 101 è primo, dunque $\mathbb{Z}_{101}$ non ha ideali non banali.

Consideriamo $\mathbb{Z}_{90}$, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, i suoi ideali massimali sono $2\mathbb{Z}_{90}$, $3\mathbb{Z}_{90}$, e $5\mathbb{Z}_{90}$, mentre i suoi ideali minimali sono $45\mathbb{Z}_{90}$, $18\mathbb{Z}_{90}$ e $30\mathbb{Z}_{90}$.

I quozienti sono nell'ordine $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_{45}$, $\mathbb{Z}_{18}$ e $\mathbb{Z}_{30}$

Infine abbiamo il seguente diagramma delle inclusioni:



Dove le frecce indicano l'inclusione.