Programma (previsto) del corso di calcolo.
A.A. 2012-2013

1. **Preliminari**. Principio di induzione. Esempi: $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} q^k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, disuguaglianza di Bernoulli. Proprietà dei coefficienti binomiali. Teorema del binomio di Newton(*). Irrazionalità di $\sqrt{2}$. Assiomi di campo. Assiomi di ordine. Maggiorante, minorante, estremo superiore ed estremo inferiore. Assioma di completezza. I numeri reali come campo ordinato completo.

   Valore assoluto. Disuguaglianza triangolare. Funzioni iniettive, suriettive e biettive. Inversa di una funzione. Composizione di funzioni. Funzioni pari e dispari: prodotto e composizione di funzioni pari e dispari.

2. **Limiti e continuità**. Definizione di limite. Verifica del limite per: $\lim_{x\to c} K = K$, $\lim_{x\to c} x = c$, $\lim_{x\to c} |x| = |c|$ (con dimostrazione della disuguaglianza $||x| - |y|| \leq |x - y|$), $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$. Non esistenza del limite per: funzione segno (10.10), funzione di Dirichlet (10.11). Teoremi sulle operazioni sui limiti(*). Limiti di funzioni polinomiali e razionali. Teorema del confronto. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Limite sinistro e destro. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del limite. Definizione di $\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$ (e simili). Funzione continua in un punto. Continuità della funzione seno. Continuità della somma del prodotto e della composizione(*) di funzioni continue. Teorema della permanenza del segno. Classificazione delle discontinuità. Non esistenza di $\lim_{x\to 0^+} \sin \frac{1}{x}$ (dimostrazione lunga).

   Funzioni limitate. Massimo e minimo di una funzione. Teorema di Weierstrass (*). Teorema di esistenza degli zeri(*). Esistenza della radice quadrata di un numero positivo. Teorema dei valori intermedi (enunciato e dimostrazione fatti in classe).

3. **Calcolo differenziale**. Velocità media ed istantanea. Rapporto incrementale. Funzione derivabili e derivata. Calcolo della derivata di: $f(x) = K$, $f(x) = x$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sin x$. Continuità della funzioni derivabili. Esempio di una funzione continua non derivabile. Derivata della somma, del prodotto e del quoziente. Derivata della funzione composta (*). Derivata dell'inversa (*). Derivata di arcsin, arctan. Derivata di x^n. Derivata della funzione $x^{\frac{p}{q}}$. Interpretazione geometrica della derivata. Equazione della retta tangente. Derivate di ordine superiore. Verifica di alcune formule della derivata n-sima di una funzione utilizzando il principio di induzione.

   I teoremi fondamentali del calcolo differenziale: Fermat, Rolle, Lagrange. Necessita' delle ipotesi nel teorema di Rolle. Caratterizzazione delle funzioni costanti. Relazione fra monotonia e segno della derivata. Convessità. Relazione fra convessità e segno della derivata seconda. Criterio sulla derivata seconda per stabilire la natura di un punto critico (*). Problemi di massimo e minimo: problemi isoperimetrici, II legge di Snell.

Asintoti orizzontali, verticali ed obliqui. Cuspidi e punti angolosi. Grafici di funzioni razionali, con radicali e con il valore assoluto. Definizione della funzione $\log(x)$ e presentazione delle sue proprietà (vedi dopo per la dimostrazione). Funzioni e^x, a^x e $\log_a x$ e loro proprietà. Funzioni iperboliche e loro proprietà. Espressione e derivata di $\sinh^{-1}$ e $\tanh^{-1}$ (in due modi). Regola di de l'Hôpital(*). Grafici di $\log(f(x))$, $\arctan(f(x))$, $\exp(f(x))$ a partire dal grafico di $f(x)$.

4. **Integrali.** Calcolo dell'area del segmento parabolico. Somme integrali di Riemann(-Cauchy). Integrale definito. Proprietà dell'integrale definito: linearità (*) , additività(*) e monotonia(*). Teorema della media. I e II teorema fondamentale del calcolo integrale. Tecniche di integrazione: integrali per parti e per sostituzione. Integrazione di funzioni razionali in cui il grado del denominatore è al più 3. Integrazioni di polinomi trigonometrici. Integrazione delle funzioni $\sqrt{1 \pm x^2}$ attraverso sostituzioni inverse. Il logaritmo naturale definito come una primitiva di $\frac{1}{x}$. Proprietà del logaritmo naturale a partire dalla definizione.

5. **Infiniti ed infinitesimi**. Algebra degli o-piccoli. Caratterizzazione della derivabilità tramite o-piccolo. Polinomio di Taylor. I e II condizione equivalente sul polinomio di Taylor. Sviluppo di $\sin x$, e^x, $\cos x$, $\frac{1}{1-x}$. Polinomio di Taylor della funzione integrale. Deduzione dello sviluppo di $\log(1+x)$ e $\arctan x$. Utilizzo della formula di Taylor nel calcolo di limiti di forme indeterminate. Integrali impropri di I specie. Regolarità delle funzioni di segno costante (*). Criterio del confronto (*). Funzioni test $x^{-\alpha}$. Criterio del confronto asintotico. Integrali impropri di II specie. Studio della funzione integrale.

6. **Serie**. Successioni numeriche. Limite di una successione. Esempi. Serie numeriche. Serie telescopiche e geometriche. Serie convergenti, divergenti ed indeterminate. Regolarità delle serie a termini di segno costante(*). Condizione necessaria per la convergenza di una serie. Criteri di convergenza per serie a termini positivi: criterio del confronto, criterio del confronto asintotico (*),criterio integrale, criterio del rapporto(*),criterio della radice(*). Serie a segno alterno e criterio di Leibniz(*). Formula di Taylor con il resto di Lagrange(*). Serie di Taylor.

7. **Numeri complessi**. Somma e prodotto. Inverso e coniugato. Modulo. Forma polare. Formula di de Moivre. Radici n-esime di un numero complesso.

II modulo

1. **Equazioni differenziali.** Nomenclatura sulle equazioni differenziali. Equazioni del primo ordine: a variabili separabili e lineari. Caduta di un grave in presenza di attrito. Struttura delle soluzioni di un'equazione lineare di ordine n. Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti (dim per II ordine caso $\Delta > 0$ e $\Delta = 0$). Moto armonico. Moto armonico smorzato. Equazioni non omogenee: metodo della variazione dei parametri e dei coefficienti indeterminati.

2. **Funzioni di più variabili.** Topologia elementare di $\mathbb{R}^2$ (definizione di aperto, chiuso, connesso, limitato, compatto, punto interno, punto di frontiera, punto di accumulazione). Il semipiano $\{(x, y) : x > 0\}$ è aperto. Funzioni radiali e cilindriche. Curve di livello. Limiti di funzioni di due variabili. Verifica del limite per $f(x, y) = x$. Criteri per l'esistenza del limite (*). Esempi di funzioni che non ammettono limite. Operazioni sui limiti (*). Derivate parziali e derivate direzionali. Esempio di una funzione che ammette derivate direzionali rispetto a qualunque vettore ma non continua. Derivate di ordine superiore. Funzioni di classe C^k. Teorema di Schwarz (*). Funzioni differenziabili. Differenziabilità implica continuità. Le funzioni di classe C^1 sono differenziabili (*). Esempio di una funzione differenziabile ma non di classe C^1. Regola di derivazione della funzione composta (*). Espressione e proprietà della derivata direzionale per funzioni differenziabili. Equazione di Laplace e delle onde. Equazioni di Cauchy-Riemann. Metodo di d'Alembert per l'equazione delle onde. Polinomio di Taylor del secondo ordine. Teorema di Weierstrass (*). Condizione necessaria per l'esistenza di estremi relativi di una funzione (Teorema di Fermat). Matrici definite positive: condizioni equivalenti(*). Condizioni sufficienti per l'esistenza di estremi relativi. Punto di sella. Condizione sufficiente per l'esistenza di un punto di sella (*). Determinazione del massimo e minimo di una funzione continua su un compatto.

3. **Campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$.** Curve parametriche. Curve regolari. Esempi di curve non regolari che soddisfano due condizioni di regolarità. Versore tangente. Curve in coordinate polari: condizioni di regolarità. Curve equivalenti.

   Campi di direzione. Metodo di Eulero. Esempio di non unicità della soluzione. Teorema di unicità (*). Soluzioni globali. Esempio di non esistenza della soluzione globale. Teorema di esistenza globlale (*). Sistemi di equazioni differenziali. Riduzione di un' equazione differenziale del II ordine ad un sistema. Il caso $x'' = g(x, x')$. Il metodo della conservazione dell'energia: il caso dell'oscillatore armonico.

   Esempi di campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$. Curve integrali. Le curve integrali di $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ e $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Campi conservativi e potenziali scalari. Campi irrotazionali. Condizione necessaria per la conservatività di un campo vettoriale. Unicità a meno di costante del potenziale scalare di un campo vettoriale su un insieme connesso (*). Il campo irrotazionale $\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$: dimostrazione della sua non conservativà. Lunghezza di una curva. Integrale di linea di funzioni scalari. Indipendenza dell'integrale di linea dalla scelta della parametrizzazione. Centroide di una curva e I Teorema di Pappo-Guldino(*). Integrale di linea di campi vettoriali. Teorema fondamentale del calcolo per integrali di linea. Circuitazione di un campo vettoriale. Curve regolari a tratti. Condizioni equivalenti per la conservatività di un campo vettoriale. Domini convessi. Domini stellati. Lemma di Poincaré. Domini semplicemente connessi.

4. **Integrazione in $\mathbb{R}^2$.** Richiami sull'integrale di Riemann per funzioni di una variabile. Domini normali. Integrali doppi su domini normali e teorema di riduzione. Proprietà degli integrali (*). Centroide e II teorema di Pappo-Guldino(*). Integrali di funzioni dispari su domini simmetrici (*). Formula per il cambiamento di variabili. Area di un parallelogramma. Coordinate polari. Domini fortemente regolari. Teorema di Green. Conseguenze del teorema di Green: (a) generalizzazione del Lemma di Poincaré; (b) circuitazione del campo $\mathbf{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ su una generica curva; (c) teorema della divergenza bidimensionale. Dimostrazione della formula del cambiamento di variabile negli integrali doppi utilizzando il teorema di Green. Interpretazione della divergenza e del rotore (bidimensionali).

5. **Calcolo differenziale vettoriale in $\mathbb{R}^3$.** Identità contenenti gradiente, divergenza e rotore. Dalle equazioni di Maxwell all'equazione delle onde. Potenziali scalari e vettoriali: condizioni necessarie per l'esistenza e calcolo esplicito.

Libri di testo:

I modulo:

A. Laforgia, Calcolo differenziale ed integrale;

II modulo: (a scelta fra) R. A. Adams, Calcolo differenziale 2 (quarta edizione) e Bramanti, Pagani, Salsa, Analisi matematica 2.

Legenda:
(*) Solo enunciato

Modalità di esame

È possibile superare l'esame in due modi.

- Due prove di esonero. La prima prova d'esonero è divisa in due parti:

  1a) Prova di sbarramento di teoria: 2 domande di teoria che valgono ciascuna 4 punti; si accede alla seconda parte se si conseguono almeno 4 punti.

  1b) Prova "pratica": 4 esercizi che valgono 6 punti ciascuno. Si è ammessi alla seconda prova d'esonero se la somma dei punteggi della prima e della seconda parte è non inferiore a 18.

  Nella seconda prova di esonero gli esercizi e la domanda di teoria si svolgono insieme. L'esame si ritiene superato se entrambe le prove di esonero sono sufficienti. Per il'assegnazione del voto finale v_f i voti saranno riscalati per garantire ad almeno il top 5% 30 o 30L.

- Una prova pratica consistente in 6 esercizi (4 punti per ciascun esercizio) ed una prova di teoria consistente in tre domande di teoria (3 punti per ciascuna domanda). Per essere ammesso alla prova di teoria lo studente deve ottenere un punteggio $v_p \geq 12$. La prova di teoria si ritiene sufficiente se si ottiene un punteggio $v_t \geq 3$. L'esame si ritiene superato se entrambe le prove sono sufficienti e il voto finale $v_f = v_p + v_t \geq 18$.

Durante le prove scritte non si possono utilizzare libri, appunti, calcolatrici scientifiche, cellulari etc.

Gli studenti che hanno ottenuto un voto finale non inferiore a 24 possono sostenere un esame orale. Per la lode è sempre richiesto l'esame orale.

La maggior parte (ma non la totalità) degli esercizi assegnati rientra in una di queste tipologie:

I modulo

1. Principio di induzione
2. Verifica del limite
3. Calcolo della derivata a partire dalla definizione
4. Grafico di funzione
5. Problema di massimo e minimo
6. Esistenza degli zeri/invertibilità
7. Calcolo di un integrale

8. Studio di una funzione integrale
9. Limite con formula di Taylor/ de l'Hopital
10. Carattere /somma di una serie
11. Numeri complessi

II modulo

1. Equazione differenziale
2. Dominio, curve di livello
3. Derivata funzione composta
4. max e minimo su compatto
5. Integrali di linea
6. integrali doppi
7. Potenziali scalari e vettoriali

Le domande di teoria consistono nella dimostrazione di un teorema o in una serie di definizioni o in un esempio significativo.