

Programma del corso di CALCOLO II

1. **Equazioni differenziali.** Nomenclatura sulle equazioni differenziali. Equazioni del primo ordine: a variabili separabili e lineari. Caduta di un grave in presenza di attrito. Struttura delle soluzioni di un'equazione lineare di ordine n . Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti (dim per II ordine caso $\Delta > 0$ e $\Delta = 0$). Moto armonico. Moto armonico smorzato. Equazioni non omogenee: metodo della variazione dei parametri e dei coefficienti indeterminati.
2. **Funzioni di più variabili.** Topologia elementare di \mathbb{R}^2 (definizione di aperto, chiuso, connesso, limitato, compatto, punto interno, punto di frontiera, punto di accumulazione). Il semipiano $\{(x, y) : x > 0\}$ è aperto. Funzioni radiali e cilindriche. Curve di livello. Limiti di funzioni di due variabili. Verifica del limite per $f(x, y) = x$. Criteri per l'esistenza del limite (senza dim.). Esempi di funzioni che non ammettono limite. Operazioni sui limiti (senza dim.). Derivate parziali e derivate direzionali. Esempio di una funzione che ammette derivate direzionali rispetto a qualunque vettore ma non continua. Derivate di ordine superiore. Funzioni di classe C^k . Teorema di Schwarz (senza dim.). Funzioni differenziabili. Differenziabilità implica continuità. Le funzioni di classe C^1 sono differenziabili (senza dim.). Esempio di una funzione differenziabile ma non di classe C^1 . Regola di derivazione della funzione composta (senza dim.). Espressione e proprietà della derivata direzionale per funzioni differenziabili. Equazione di Laplace e delle onde. Equazioni di Cauchy-Riemann. Metodo di d'Alembert per l'equazione delle onde. Polinomio di Taylor del secondo ordine. Teorema di Weierstrass (senza dim.). Condizione necessaria per l'esistenza di estremi relativi di una funzione. Matrici definite positive: condizioni equivalenti (senza dim.). Condizioni sufficienti per l'esistenza di estremi relativi. Punto di sella. Condizione sufficiente per l'esistenza di un punto di sella (senza dim.). Determinazione del massimo e minimo di una funzione continua su un compatto.
3. **Campi vettoriali in \mathbb{R}^2 .** Curve parametriche. Curve regolari. Esempi di curve non regolari che soddisfano due condizioni di regolarità. Versore tangente. Curve in coordinate polari: condizioni di regolarità. Curve equivalenti.

Il teorema di esistenza di Peano (cenno alla dimostrazione attraverso poligoni approssimanti). Esempio di non unicità della soluzione. Teorema di unicità (senza dim.). Soluzioni globali. Esempio di non esistenza della soluzione globale. Teorema di esistenza globale (senza dim.). Sistemi di equazioni differenziali. Riduzione di un'equazione differenziale del II ordine ad un sistema.

Esempi di campi vettoriali in \mathbb{R}^2 . Curve integrali. Le curve integrali di $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ e $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Campi conservativi e potenziali scalari. Campi irrotazionali. Condizione necessaria per la conservatività di un campo vettoriale. Unicità a meno di costante del potenziale scalare di un campo vettoriale su un insieme connesso

(senza dim.). Il campo irrotazionale $\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$: dimostrazione della sua non conservativà. Lunghezza di una curva. Integrale di linea di funzioni scalari. Indipendenza dell'integrale di linea dalla scelta della parametrizzazione. Centroide di una curva. Integrale di linea di campi vettoriali. Teorema fondamentale del calcolo per integrali di linea. Circuitazione di un campo vettoriale. Curve regolari a tratti. Condizioni equivalenti per la conservatività di un campo vettoriale. Domini stellati. Lemma di Poincaré. Domini semplicemente connessi.

4. **Integrazione in \mathbb{R}^2 .** Richiami sull'integrale di Riemann per funzioni di una variabile. Domini normali. Integrali doppi su domini normali e teorema di riduzione. Proprietà degli integrali (senza dim.). Integrali di funzioni dispari su domini simmetrici (senza dim.). Formula per il cambiamento di variabili. Area di un parallelogramma. Coordinate polari. Domini fortemente regolari. Teorema di Green. Conseguenze del teorema di Green: (a) generalizzazione del Lemma di Poincaré; (b) circuitazione del campo $\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ su una generica curva; (c) teorema della divergenza bidimensionale. Dimostrazione della formula del cambiamento di variabile negli integrali doppi utilizzando il teorema di Green.

5. **Calcolo differenziale vettoriale in \mathbb{R}^3 .** Identità contenenti gradiente, divergenza e rotore. Condizioni necessarie per l'esistenza di un potenziale scalare e vettoriale. Superfici: parametrizzazione, regolarità. Superfici cartesiane e loro regolarità. Superfici fortemente regolari. Orientabilità e bordo.

Area di una superficie. Superfici di rotazione e I Teorema di Pappo-Guldino. Integrali superficiali. Flusso di un campo vettoriale. Integrali tripli. Coordinate cilindriche. Solidi di rotazione e II teorema di Pappo-Guldino. Teorema della divergenza (senza dim.) e teorema di Stokes (senza dim.). Interpretazione della divergenza e del rotore. Applicazioni del calcolo differenziale vettoriale alla fisica.

Libro di testo: R. A. Adams, Calcolo differenziale 2 (quarta edizione).

Testi di consultazione: Bramanti, Pagani, Salsa Analisi matematica 2; Canuto, Tabacco, Analisi matematica II; Fusco, Marcellini, Sbordone, Analisi matematica due.

Modalità d'esame

E' possibile superare l'esame in due modi.

- Due prove di esonero ed un'eventuale prova facoltativa; il voto finale è dato dalla media dei due esoneri (approssimata per eccesso se e solamente se il punteggio migliore è stato ottenuto nella seconda prova) aumentata degli eventuali punti della terza prova (max 3 punti).
- Una prova scritta consistente in quattro esercizi. Lo studente è ammesso alla prova teorica se svolge correttamente almeno due esercizi. Se il punteggio conseguito è non inferiore a 18/24 lo studente può verbalizzare il voto oppure scegliere di sostenere la prova teorica per migliorare il proprio voto. Se il punteggio conseguito è inferiore a 18/24 lo studente deve necessariamente sostenere la prova teorica per tentare di raggiungere la sufficienza.

N.B. La verbalizzazione è sempre preceduta da una breve discussione delle prove scritte.

La modalità "esonero" è la più impegnativa, in quanto le domande di teoria sono basate su tutto il programma. Negli anni precedenti (grazie anche alla prova supplementare) la media dei voti ottenuti dagli studenti negli esami superati attraverso gli esoneri è risultata superiore a quella della modalità "esame finale".

Tipologie esercizi

Primo esonero

Risoluzione di un'equazione differenziale
Dominio e grafico di funzione
Derivata di funzioni composte
Max e min su un compatto

Secondo esonero

Integrali di linea
Integrali doppi
Potenziali scalari/potenziali vettoriali

Domande di teoria (solo per la modalità esame finale)

1. Struttura delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare.
2. Esempio di una funzione differenziabile ma non di classe C^1 .
3. Metodo di d'Alembert per l'equazione delle onde.
4. Espressione e proprietà della derivata direzionale di una funzione differenziabile.
5. Esempio di una funzione che ammette derivate direzionali (rispetto ad un qualunque vettore) nell'origine ma non continua in tale punto.
6. Formula di Taylor al secondo ordine.

7. Il ruolo della matrice hessiana nello stabilire la natura dei punti critici.
8. Teoremi di esistenza e unicità per E.D.: enunciati e controesempi.
9. Le curve integrali dei campi $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ed $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.
10. Esempio di un campo vettoriale irrotazionale non conservativo (dimostrazione lunga).
11. Teorema fondamentale del calcolo per integrali di linea di campi vettoriali.
12. Condizioni equivalenti per la conservatività di un campo vettoriale (solo $2 \Rightarrow 3$ e $3 \Rightarrow 1$).
13. Lemma di Poincaré.
14. Teorema di Green.
15. Conseguenze del teorema di Green (solo (a) e (b)).
16. Dimostrazione della formula del cambiamento di variabile negli integrali doppi utilizzando il teorema di Green.
17. Condizione necessaria per l'esistenza di un potenziale scalare/ vettoriale.
18. Il metodo della conservazione dell'energia: il caso dell'oscillatore armonico.
19. Curve in coordinate polari: condizioni sufficienti per la regolarità.
20. Indipendenza dell'integrale di linea dalla scelta della parametrizzazione.

Per gli studenti dell'esame da 7 crediti sono previste le seguenti ulteriori domande

1. Serie geometriche e rappresentazione razionale di numeri periodici.
2. Sviluppo dell'esponenziale e della funzione seno (utilizzando le E. D.)
3. Sviluppo della funzione $\log(1 + x)$ e della funzione $\arctan(x)$

CALCOLO II (Ingegneria Civile)
Prova del 19/09/2011

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome
nell'elenco dei promossi

_____ Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Sia $u(x, y)$ una funzione armonica definita su tutto \mathbb{R}^2 (i.e. $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $u_{xx} + u_{yy} = 0$). Trovare delle costanti a e b tali che la funzione

$$g(s, t) = u(as^2 + bt^2, st)$$

risulti armonica.

2. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D \left(\frac{x^2}{4} + y^2 \right) dx dy$$

dove D è la regione del I quadrante interna all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e compresa fra le rette di equazioni $y = \frac{x}{2}$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

3. Studiare la seguente equazione differenziale (con condizione iniziale) al variare del parametro λ

$$\begin{cases} y'' + \lambda y' = e^x \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4. Calcolare il flusso di $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ verso l'alto attraverso la parte del cilindro di equazione $x^2 + z^2 = 1$, con $0 \leq y \leq 1$, contenuta nel primo ottante. Nota: la superficie totale è composta da 5 "pezzi".)

CALCOLO II (Ingegneria Civile)
Prova del 19/09/2011

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome
nell'elenco dei promossi

_____ Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Sia $u(x, y)$ una funzione armonica definita su tutto \mathbb{R}^2 (i.e. $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $u_{xx} + u_{yy} = 0$). Trovare delle costanti a e b tali che la funzione

$$g(s, t) = u(as^2 - bt^2, st)$$

risulti armonica.

2. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D \left(\frac{x^2}{4} + y^2 \right) dx dy$$

dove D è la regione del I quadrante interna all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e compresa fra le rette di equazioni $y = \frac{x}{2}$ e $y = 0$.

3. Studiare la seguente equazione differenziale (con condizione iniziale) al variare del parametro λ

$$\begin{cases} y'' + \lambda y' = e^{-x} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4. Calcolare il flusso di $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ verso l'alto attraverso la parte del cilindro di equazione $y^2 + z^2 = 1$, con $0 \leq x \leq 1$, contenuta nel primo ottante. Nota: la superficie totale è composta da 5 "pezzi".)

CALCOLO II (Ingegneria Civile)
Prova del 11/07/2011

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi
Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

8 punti Studiare la seguente equazione differenziale (con condizioni iniziali) al variare del parametro λ

$$\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

4punti Trovare un potenziale vettoriale del seguente campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = 3xyz^2\mathbf{i} + (xz + 3yz^2)\mathbf{j} - (z^3 + yz^3)\mathbf{k}$$

6 punti Disegnare il dominio di integrazione del seguente integrale triplo. Iterare poi l'integrale prima rispetto a z poi ad y e poi a x .

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \int_{y^2+z^2}^1 f(x, y, z) dx$$

1. Calcolare la circuitazione del campo vettoriale $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ lungo la circonferenza di raggio 1 centrata in $(0, 1)$ orientata in senso antiorario
 - (a) utilizzando la definizione
 - (b) utilizzando il Teorema di Green

CALCOLO II (Ingegneria Civile)
Esonero del 11/07/2011

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi
Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

8 punti Studiare la seguente equazione differenziale (con condizioni iniziali) al variare del parametro λ

$$\begin{cases} y'' - 2y' - \lambda y = x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

4punti Trovare un potenziale vettoriale del seguente campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = -3xyz^2\mathbf{i} + -(xz + 3yz^2)\mathbf{j} + (z^3 + yz^3)\mathbf{k}$$

6 punti Disegnare il dominio di integrazione del seguente integrale triplo. Iterare poi l'integrale prima rispetto a z poi ad x e poi a y .

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz \int_{x^2+z^2}^1 f(x, y, z) dy$$

1. Calcolare la circuitazione del campo vettoriale $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ lungo la circonferenza di raggio 1 centrata in $(1, 0)$ orientata in senso antiorario
 - (a) utilizzando la definizione
 - (b) utilizzando il Teorema di Green

Calcolo II
Prova scritta - 16 giugno 2011

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi _____ Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2$ sul compatto delimitato dalla parabola di equazione $y = 2x^2$ e dalla retta $y = 2$.
2. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 dx \int_{\arctan x}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos y} dy.$$

3. Risolvere solamente uno dei seguenti problemi
 - (a) Calcolare il flusso (verso l'alto) del campo vettoriale $\mathbf{F} = x\mathbf{i}$ attraverso il triangolo di vertici $P_1 = (0, 0, 1)$, $P_2 = (3, 0, 0)$, $P_3 = (1, 1, 0)$;
 - (b) determinare per quali λ la soluzione del seguente problema di Cauchy risulta limitata

$$\begin{cases} y' &= y \frac{1}{9+x^2} \\ y(0) &= \lambda. \end{cases}$$

4. Determinare la curva regolare chiusa γ orientata in senso antiorario che rende minimo

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{T}} ds$$

dove $\mathbf{F} = -(yx^2 + 2yx)\mathbf{i} + (xy^2 + \sin y)\mathbf{j}$. Giustificare la risposta.

Calcolo II
Prova scritta - 16 giugno 2011

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi
Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = y^3 + 4y^2x + x^2$ sul compatto delimitato dalla parabola di equazione $x = 2y^2$ e dalla retta $x = 2$.
2. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 dx \int_{\arctan x}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 y dy.$$

3. Risolvere solamente uno dei seguenti problemi
 - (a) Calcolare il flusso (verso l'alto) del campo vettoriale $\mathbf{F} = z\mathbf{i}$ attraverso il triangolo di vertici $P_1 = (0, 0, 1)$, $P_2 = (0, 3, 0)$, $P_3 = (1, 1, 0)$;
 - (b) determinare per quali λ la soluzione del seguente problema di Cauchy risulta limitata

$$\begin{cases} y' &= y \frac{1}{16+x^2} \\ y(0) &= \lambda. \end{cases}$$

4. Determinare la curva regolare chiusa γ orientata in senso antiorario che rende minimo

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{T}} ds$$

dove $\mathbf{F} = -(yx^2 - 2yx)\mathbf{i} + (xy^2 + \cos y)\mathbf{j}$. Giustificare la risposta.

CALCOLO II (Ingegneria Civile)
II Prova d'esonero 10 giugno 2011

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Dopo aver verificato che il seguente campo vettoriale irrotazionale, trovarne un potenziale scalare.

$$\mathbf{F} = (2xy^2z \cos(x^2y) + e^{yz})\mathbf{i} + (x^2yz \cos(x^2y) + z \sin(x^2y) + xze^{yz})\mathbf{j} + (y \sin(x^2y) + xye^{yz})\mathbf{k}.$$

2. (a) Trasformare il seguente integrale in coordinate polari

$$\iint_D \frac{xy^2}{1+x^2+y^2} dx dy$$

dove D la regione esterna al disco $B_1(1, 0)$ ed interna al disco $B_2(0, 0)$ contenuta nel primo quadrante

- (b) Trasformare il seguente integrale (espresso in coordinate polari) in coordinate cartesiane:

$$\int_0^{\pi/4} d\theta \int_{1/\cos\theta}^{2/\cos\theta} \frac{e^{\rho(\cos\theta + \sin\theta)}}{\cos\theta} d\rho$$

3. Calcolare il flusso uscente attraverso la superficie laterale del cilindro di equazione $x^2 + z^2 = 1$ compreso fra i piani $y = 1$ e $y = 2$ del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = x^2 e^{y^2} \mathbf{i} + y(x^2 + z^2) \mathbf{j} + zx \mathbf{k}.$$

4. Stabilire se la seguente superficie regolare:

$$\begin{aligned} \Phi : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u + 2v, 3u + v, u^2 - v^2) \end{aligned}$$

A

CALCOLO II (Ingegneria Civile)
II Prova d'esonero 10 giugno 2011

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi
Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Dopo aver verificato che il seguente campo vettoriale irrotazionale, trovarne un potenziale scalare.

$$\mathbf{F} = (y^2xz \cos(y^2x) + z \sin(y^2x) + yze^{xz})\mathbf{i} + (2yx^2z \cos(y^2x) + e^{xz})\mathbf{j} + (x \sin(y^2x) + xye^{xz})\mathbf{k}.$$

2. (a) Trasformare il seguente integrale in coordinate polari

$$\iint_D \frac{xy^2}{1+x^2+y^2} dx dy$$

dove D la regione esterna al disco $B_1(-1, 0)$ ed interna al disco $B_2(0, 0)$ contenuta nel secondo quadrante

- (b) Trasformare il seguente integrale (espresso in coordinate polari) in coordinate cartesiane:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_{1/\sin\theta}^{2/\sin\theta} \frac{e^{\rho(\cos\theta + \sin\theta)}}{\sin\theta} d\rho$$

3. Calcolare il flusso uscente attraverso la superficie laterale del cilindro di equazione $y^2 + z^2 = 1$ compreso fra i piani $x = 1$ e $x = 2$ del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = x(y^2 + z^2)\mathbf{i} + x^2e^{y^2}\mathbf{j} + zy\mathbf{k}.$$

4. Stabilire se la seguente superficie regolare:

$$\Phi : \begin{array}{l} [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto (2u + 2v, u + 2v, u^2 - v^2) \end{array}$$

B

CALCOLO II (Ingegneria Civile)
Esonero del 20/04/2011

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi
Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Studiare la seguente equazione differenziale (con condizione iniziale) al variare del parametro $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} y'' - 4y' + \lambda y = 1 \\ y(0) = \frac{1}{\lambda}. \end{cases}$$

Per quali soluzioni y esiste finito $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$?

2. Determinare il dominio della seguente funzione

$$f(x, y) = \log \left(\frac{(y - |x - 1|)(x^2 + y^2 - 2|x|)}{|y| - x^2} \right)$$

e descriverne le caratteristiche topologiche.

3. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 6xy$$

sulla regione costituita dall'unione del semicerchio di raggio 1 centrato in $(0, 0)$ contenuto nel semipiano $y \geq 0$ con il triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, -1)$.

4. Calcolare la derivata g_{xx} essendo

$$g(x, y) = \int_0^{x^2+y^2} e^{t^2} dt.$$

CALCOLO II (Ingegneria Civile)
Esonero del 20/04/2011

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome
nell'elenco dei promossi

_____ Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Studiare la seguente equazione differenziale (con condizione iniziale) al variare del parametro $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} y'' + 4y' + \lambda y = 2 \\ y(0) = \frac{2}{\lambda}. \end{cases}$$

Per quali soluzioni y esiste finito $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$?

2. Determinare il dominio della seguente funzione

$$f(x, y) = \log \left(\frac{(x - |y - 1|)(x^2 + y^2 - 2|y|)}{|x| - y^2} \right)$$

e descriverne le caratteristiche topologiche.

3. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = y^2 - x^2 + 4xy$$

sulla regione costituita dall'unione del semicerchio di raggio 1 centrato in $(0, 0)$ contenuto nel semipiano $x \geq 0$ con il triangolo di vertici $(0, -1)$, $(0, 1)$ e $(-1, 0)$.

4. Calcolare la derivata g_{yy} essendo

$$g(x, y) = \int_0^{x^2+y^2} e^{t^2} dt.$$

CALCOLO II (Ingegneria Civile)
Prova scritta del 10/02/2011

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome
nell'elenco dei promossi

Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' - 4y' + 4y = (x + 3)e^{2x}.$$

2. Trovare un potenziale vettoriale del campo $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + x^3z\mathbf{j} - 2zy\mathbf{k}$.
3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

(suggerimento: invertire l'ordine di integrazione).

4. Calcolare il flusso uscente dalla superficie ottenuta ruotando intorno all'asse z la curva di equazioni

$$\begin{cases} z = y^3 \\ x = 0 \end{cases} \quad 0 \leq y \leq 2$$

del campo vettoriale $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

CALCOLO II (Ingegneria Civile)
Prova scritta del 17/09/2010

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome
nell'elenco dei promossi

_____ Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' - y' = (x + 1)e^x.$$

2. Calcolare l'area della regione interna all'ellisse di equazione $4x^2 + 9y^2 = 36$ e posta al di sopra della retta $2x + 3y = 6$.
3. Siano \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 due campi vettoriali conservativi con potenziali scalari ϕ_1 e ϕ_2 . Esprimere un potenziale vettoriale di $\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$ in funzione di ϕ_1 e ϕ_2 .
4. Calcolare il flusso uscente dalla superficie laterale del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ compresa fra i piani $z = 0$ e $z = 1$ del campo vettoriale $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$.

CALCOLO II (Ingegneria Civile)
Prova scritta del 19/07/2010

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome
nell'elenco dei promossi

_____ Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' + y = \sin x.$$

2. Determinare il dominio della seguente funzione e descriverne le caratteristiche topologiche:

$$f(x, y) = \sqrt{(y - x^2)(|x| - 2|y|) \log(x^2 + y^2)}.$$

3. Mostrare che il seguente campo vettoriale è solenoidale e calcolare un suo potenziale vettoriale

$$\mathbf{F} = (3x^2)\mathbf{i} + (x^3 + z^3)\mathbf{j} - 6xz\mathbf{k}.$$

4. Calcolare il flusso uscente dal tetraedro di vertici $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ del campo vettoriale $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$.

CALCOLO II (Ingegneria Civile)
Prova scritta del 28/06/2010

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome
nell'elenco dei promossi

Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' = y \arctan x.$$

2. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = \arctan(x^2 - 2xy + xy^2)$$

sul quadrato di vertici $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 3)$ e $(0, 3)$.

3. Mostrare che il seguente campo vettoriale è irrotazionale e calcolare un suo potenziale scalare

$$\mathbf{F} = (2xye^{x^2y} + 2xyz)\mathbf{i} + (x^2e^{x^2y} + zx^2)\mathbf{j} + (3z^2 + x^2y)\mathbf{k}.$$

4. Calcolare il flusso uscente dalla sfera di raggio 1 centrata nel punto $(1, 0, 1)$, del campo vettoriale $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - zy\mathbf{k}$.

CALCOLO II (Ingegneria Civile)
II Prova d'esonero 15 giugno 2010

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Dopo aver mostrato che il campo vettoriale $\mathbf{F} = y^2x\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} - 4zy^2\mathbf{k}$ è solenoidale, trovarne un potenziale vettoriale \mathbf{G} e verificare che $\text{rot}\mathbf{G} = \mathbf{F}$.
2. Sia D la regione interna alla circonferenza di raggio 1 centrata nel punto $(1, 0)$ e posta al di sotto della retta $y = x$. Calcolare

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

3. Calcolare

$$\oint_{+\partial D} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds$$

dove $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i}$ e $+\partial D$ è la frontiera orientata della regione interna al cerchio centrato in $(0, 2)$ di raggio 2 ed esterna al cerchio centrato in $(0, 1)$ di raggio 1 (vedi figura).

4. Calcolare il flusso (verso l'alto) attraverso la superficie del paraboloido di equazione $y = 4 - (x^2 + y^2)$, posta al di sopra del piano $z = 1$ del campo vettoriale $\mathbf{F} = x^2z\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} - z\mathbf{k}$.
5. IL teorema di Green.
6. Il campo vettoriale $\mathbf{F} = \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ è definito sull'aperto D (non semplicemente connesso) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e ivi irrotazionale (verificare). Senza calcolare un potenziale, dimostrare che è conservativo, facendo vedere che la circuitazione di \mathbf{F} lungo una qualunque curva chiusa contenuta in D è nulla (procedere come nella dimostrazione della seconda conseguenza del teorema di Green).

Calcolo II
Prova di esonero del 28 aprile 2010

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi
Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Mostrare graficamente il dominio della seguente funzione e descriverne le caratteristiche topologiche.

$$f(x, y) = \log \left(\frac{(y - x^2 + 4x)(|y| - 2x + 1)}{x + 3} \right).$$

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluto di $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4xy$ sulla corona circolare delimitata dalla circonferenze di raggio $r = 1$ e $r = 2$ centrate nell'origine.
3. Trovare l'espressione della soluzione dell'equazione

$$u_x - 2u_t = 0.$$

Suggerimento: imitare il metodo di d'Alembert per l'equazione delle onde.

4. Determinare tutte le soluzioni limitate del seguente problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

al variare del parametro λ .

Suggerimento: cominciare separando i casi $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$.

Esonero del 22 aprile 2010
Calcolo II

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____

Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Mostrare graficamente il dominio della seguente funzione e descriverne le sue caratteristiche topologiche:

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{[(y - |y|)^2 + (x - |x|)^2 - 4](x + y + 3)}{\log(y - x^2 - 2x)}}.$$

2. Siano $f, u, v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e sia $g(x, y, z) = f(u(x, y), v(y, z))$. Si esprima g_{yy} in funzione delle derivate di f, u, v . Si ponga $f(u, v) = uv \cos(v^2)$, $u(x, y) = e^{xy}$, $v(y, z) = y \sin(yz)$. Si trovi l'espressione esplicita di g e si calcoli g_{yy} in due modi.
3. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2y + y^2x$ sul triangolo delimitato di vertici $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 1)$ e $P_3 = (2, 0)$.
4. Trovare la soluzione della seguente equazione differenziale:

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x.$$

Esonero (prova di teoria) del 14 aprile 2010
Calcolo II

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____

Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Equazioni differenziali lineari del II ordine a coefficienti costanti: il caso $\Delta = 0$.
2. Definizione di punto di accumulazione e punto di frontiera.
3. Enunciare il teorema sulle condizioni equivalenti di una forma quadratica.

Esonero del 14 aprile 2010
Calcolo II

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____

Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Mostrare graficamente il dominio della seguente funzione e descriverne le sue caratteristiche topologiche:

$$f(x, y) = \log \left(\frac{(y^2 - 2|y| + x^2)(y + 4)}{|y| - |x|} \right).$$

2. Siano $f, u \in C^2(\mathbb{R}^3), v, z \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e sia $g(x, y, t, s) = f(u(x, y, t), v(y, t), z(t, s))$. Si esprima g_{yt} in funzione delle derivate di f, u, v, z . Si ponga $f(u, v, z) = u \cos(vz)$, $u(x, y, t) = xe^{ty}$, $v(y, t) = yt^2$ e $z(t, s) = s + t$. Si trovi l'espressione esplicita di g e si calcoli g_{yt} in due modi.
3. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 2xy$ sull'ellisse di equazione $2x^2 + y^2 = 1$.
4. Trovare la soluzione della seguente equazione differenziale:

$$y'' + 2y' = xe^{-2x}.$$

Prova scritta di CALCOLO II
4/2/2010

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Studiare la continuità, le derivate direzionali e la differenziabilità di

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^\alpha} & \text{se } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x, y) = 0 \end{cases}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

2. Dopo aver verificato che il seguente campo vettoriale è irrotazionale, determinarne un potenziale scalare.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + z, z + 2yz^2, y + x + 2zy^2).$$

3. Calcolare il massimo ed il minimo assoluto sulla corona circolare compresa fra le circonferenze con il centro nell'origine e di raggio 1 e 2 rispettivamente, della seguente funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy.$$

4. Calcolare il flusso uscente dalla superficie (laterale) del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ compreso fra i piani $z = 0$ e $z = 1$ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^4 \sin y, y^4 e^{2x}, z^3 + xy^2 z).$$

Calcolo II (Ingegneria Civile)
Prova scritta del 20 novembre 2009

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi
Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Studiare la continuità, le derivate direzionali e la differenziabilità della seguente funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2+y^2)-x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2. Trovare il massimo ed il minimo assoluto di $f(x, y) = e^{xy} - xy$ sul compatto contenuto nel primo quadrante delimitato dalle rette $y = 1$, $y = 2$ e dalle iperboli $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{2}{x}$.

3. Calcolare

$$\iint_E \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy,$$

dove E è il semicerchio definito da $\{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, x \geq 1\}$.

4. Sia

$$\mathbf{F} = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)\mathbf{i} + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)\mathbf{j} + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)\mathbf{k}.$$

Mostrare che esistono un campo irrotazionale \mathbf{F}_1 ed un campo solenoidale \mathbf{F}_2 tali che

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2;$$

trovare un potenziale scalare per \mathbf{F}_1 e un potenziale vettoriale per \mathbf{F}_2 .

Calcolo II (Ingegneria Civile)
Prova scritta del 15 luglio 2009

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi
Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Dopo aver mostrato che il campo vettoriale $\mathbf{F} = \sin(x^2y)\mathbf{i} + (xz + e^z)\mathbf{j} - 2xyz \cos(x^2y)\mathbf{k}$ è solenoidale, trovarne un potenziale vettoriale \mathbf{G} e verificare che $\text{rot}\mathbf{G} = \mathbf{F}$.
2. Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - \log(1 + x + y)$$

sul triangolo di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 2)$.

3. Determinare il dominio di

$$\sqrt{\frac{|y| - x^2}{(x^2 + y^2 + 2x)(x + 3)}}$$

rappresentarlo graficamente e descriverne le proprietà topologiche.

4. Calcolare l'insieme di convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!)}{1 + n^2} (x^2 + 2x)^{2n}.$$

Calcolo II (Ingegneria Civile)
Prova scritta del 15 luglio 2009

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi
Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Dopo aver mostrato che il campo vettoriale $\mathbf{F} = \sin(x^2y)\mathbf{i} + (xz + e^z)\mathbf{j} - 2xyz \cos(x^2y)\mathbf{k}$ è solenoidale, trovarne un potenziale vettoriale \mathbf{G} e verificare che $\text{rot}\mathbf{G} = \mathbf{F}$.
2. Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - \log(1 + x + y)$$

sul triangolo di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 2)$.

3. Determinare il dominio di

$$\sqrt{\frac{|y| - x^2}{(x^2 + y^2 + 2x)(x + 3)}}$$

rappresentarlo graficamente e descriverne le proprietà topologiche.

4. Determinare il volume della regione che si ottiene intersecando il cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con quello di equazione $x^2 + z^2 = 1$.

Calcolo II (Ingegneria Civile)
Prova scritta del 25 giugno 2009

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi
Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Dopo aver mostrato che il campo vettoriale $\mathbf{F} = (2xye^{x^2y+z})\mathbf{i} + (x^2e^{x^2y+z})\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ è irrotazionale, trovarne un potenziale scalare ϕ e verificare che $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

2. Calcolare

$$\iint_T ye^x dx dy,$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

3. Calcolare il flusso uscente dalla semisfera (superiore) di centro $(0,0,0)$ e raggio 1 del campo vettoriale $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} - xyz\mathbf{k}$

4. Studiare la continuità nell'origine delle seguenti funzioni

(a)

$$f(x, y) = \begin{cases} x \log y & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(b)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy) - xy}{(x^2 + y^2)^3} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

CALCOLO II (Ingegneria Civile)
II Prova d'esonero 16 giugno 2009

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi
Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Dopo aver mostrato che il campo vettoriale $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - 3zy\mathbf{k}$ è solenoidale, trovarne un potenziale vettoriale \mathbf{G} e verificare che $\text{rot}\mathbf{G} = \mathbf{F}$.
2. Sia D il compatto compreso fra le parabole di equazioni $y = x^2$ e $y^2 = x$. Calcolare la circuitazione del campo vettoriale $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i}$ lungo la frontiera di D orientata in senso antiorario:
 - (a) calcolando direttamente l'integrale di linea
 - (b) utilizzando il teorema di Green.

3. Calcolare

$$\iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy$$

dove D è la regione interna al cerchio centrato in $(0, 2)$ di raggio 2 ed esterna al cerchio centrato in $(0, 1)$ di raggio 1 (vedi figura).

4. Calcolare il flusso uscente dalla superficie laterale del cono retto avente come base il cerchio centrato nell'origine di raggio 1 e vertice nel punto $(0, 0, 1)$ del campo vettoriale $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\mathbf{k}$.
5. La dimostrazione del teorema sul cambiamento di variabile negli integrali doppi utilizzando il Teorema di Green.
6. Il campo vettoriale $\mathbf{F} = \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ è definito sull'aperto D (non semplicemente connesso) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e ivi irrotazionale (verificare). Senza calcolare un potenziale, dimostrare che è conservativo, facendo vedere che la circuitazione di \mathbf{F} lungo una qualunque curva chiusa contenuta in D è nulla (procedere come nella dimostrazione della seconda conseguenza del teorema di Green).

Prova di esonero del 23 aprile 2009
Calcolo II

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi
Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + y$ sul triangolo di vertici $(-1, -1)$, $(1, -1)$ e $(0, 2)$.
2. Sia f una funzione in $C^2(\mathbb{R}^2)$ e u, v funzioni in $C^2(\mathbb{R}^2)$. Si consideri la funzione $g(r, s, t) = f(u(r, s), v(r, t))$. Si esprima g_{sr} in funzione delle derivate di f e di u, v . Si ponga $f(u, v) = u \sin v$, $u(r, s) = \exp(rs)$, $v(r, t) = t \sin r$. Si trovi l'espressione esplicita di g e si calcoli g_{sr} in due modi.
3. Determinare il dominio di

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{y(x^2 + 2x + y^2)}{y + |x - 3|}}$$

rappresentarlo graficamente e descriverne le sue caratteristiche topologiche.

4. (a) Studiare la continuità e le derivate direzionali nell'origine della funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{\exp(x^2 y) - 1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \text{ e } f(0, 0) = 0.$$

- (b) Studiare la differenziabilità nei punti $(0, 0)$ e $(0, \frac{\pi}{2})$ della seguente funzione

$$f(x, y) = |x| \sin(y).$$

5. (a) La riparametrizzazione tramite ascissa curvilinea di $\gamma(t) = (t, \cosh t)$.
- (b) La differenziabilità implica la continuità.

A

Prova di esonero del 23 aprile 2009
Calcolo II

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi
Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy + x$ sul triangolo di vertici $(-1, 1)$, $(1, 1)$ e $(0, -2)$.
2. Sia f una funzione in $C^2(\mathbb{R}^2)$ e u, v funzioni in $C^2(\mathbb{R}^2)$. Si consideri la funzione $g(r, s, t) = f(u(r, s), v(r, t))$. Si esprima g_{rr} in funzione delle derivate di f e di u, v . Si ponga $f(u, v) = u \cos v$, $u(r, s) = \cos(rs)$, $v(r, t) = \exp(tr)$. Si trovi l'espressione esplicita di g e si calcoli g_{rr} in due modi.
3. Determinare il dominio di

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x(y - 2x - x^2)}{x + |y - 2|}}$$

rappresentarlo graficamente e descriverne le sue caratteristiche topologiche.

4. (a) Studiare la continuità e le derivate direzionali nell'origine della funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{(x^2 + y^2)} \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \text{ e } f(0, 0) = 0.$$

- (b) Studiare la differenziabilità nei punti $(0, 0)$ e $(0, 1)$ della seguente funzione

$$f(x, y) = |x| \log(1 + y^2).$$

5. (a) La derivata del prodotto scalare di due funzioni vettoriali.
(b) La soluzione dell'equazione $mx'' = -kx$ con il metodo di conservazione dell'energia.

B

Prova di esonero del 23 aprile 2009
Calcolo II

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi
Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + y$ sul triangolo di vertici $(-1, -1)$, $(1, -1)$ e $(1, 2)$.
2. Sia f una funzione in $C^2(\mathbb{R}^2)$ e u, v funzioni in $C^2(\mathbb{R}^2)$. Si consideri la funzione $g(r, s, t) = f(u(r, s), v(r, t))$. Si esprima g_{rt} in funzione delle derivate di f e di u, v . Si ponga $f(u, v) = u \cos v$, $u(r, s) = \exp(rs)$, $v(r, t) = t \exp(r)$. Si trovi l'espressione esplicita di g e si calcoli g_{rt} in due modi.
3. Determinare il dominio di

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x(y^2 + 2y + x^2)}{y + |x - 3|}}$$

rappresentarlo graficamente e descriverne le sue caratteristiche topologiche.

4. (a) Studiare la continuità e le derivate direzionali nell'origine della funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{\exp(xy^2) - 1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \text{ e } f(0, 0) = 0.$$

- (b) Studiare la differenziabilità nei punti $(0, \frac{\pi}{2})$ e $(0, \pi)$ della seguente funzione

$$f(x, y) = |x| \cos(y).$$

5. (a) Definire la curvatura e darne la sua interpretazione geometrica.
(b) Matrici definite positive: condizioni equivalenti.

C

Prova scritta del 20 aprile 2009
Calcolo II

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome _____
nell'elenco dei promossi
Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Determinare l'insieme di convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)(x^2 - 2x)^n.$$

2. Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x, y) = x^3 + y + x^2y$ sul compatto delimitato dalle parabole di equazioni $y = x^2$ ed $y = -x^2 + 10$.
3. Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

dove D e' il compatto interno al cerchio di raggio 1 e centro $(1,0)$ delimitato dalle rette di equazioni $y = x$ e $y = -x$ (vedi figura).

4. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale $\mathbf{F} = (\sin(2xy)y + y)\mathbf{i} + (\sin(2xy)x)\mathbf{j}$ lungo la curva cartesiana $\gamma(t) = (t, e^t)$ con $t \in [0, 1]$.
5. Matrici definite positive: condizioni equivalenti.

Calcolo II (Ingegneria Civile)
Prova scritta - 2 febbraio 2009

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome nell'elenco dei promossi _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Stabilire l'insieme di convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x+1}{x^2-4} \right)^n .$$

2. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = \exp(x^2 + 2x - y^2)$ sul triangolo di vertici $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 0)$.
3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D (y + x^2y + 2x) dx dy$$

dove D denota il cerchio di centro $(0, 1)$ e raggio 1.

4. Calcolare un potenziale scalare del seguente campo vettoriale:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = [zy^2 \cos(xy^2) + yz]\mathbf{i} + [2xyz \cos(xy^2) + xz]\mathbf{j} + [\sin(xy^2) + xy]\mathbf{k}.$$

5. Serie geometriche e rappresentazione razionale di numeri periodici.

Calcolo II (Ingegneria Civile)
Prova scritta - 28 Novembre 2008

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome nell'elenco dei promossi _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Stabilire l'insieme di convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n+2} (\cos x \sin x)^n.$$

2. Si consideri la funzione $g = g(x, y, s, t) = f(u(x, y), v(y, s, t))$, dove $f = f(u, v)$ ed $u = u(x, y)$ sono funzioni in $C^2(\mathbb{R}^2)$ e $v = v(y, s, t)$ è una funzione in $C^2(\mathbb{R}^3)$. Si esprima g_{ys} in funzione delle derivate di f, u, v .

Si ponga $f(u, v) = uv$, $u(x, y) = xy + y^2$, $v(y, s, t) = yts$. Si trovi l'espressione esplicita di $g(x, y, s, t)$ e si calcoli g_{ys} in due modi.

3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D y dx dy$$

dove D denota il compatto, contenuto nel primo quadrante, compreso fra le rette di equazione $y = x$, $y = 2x$ e l'iperbole $y = \frac{1}{x}$.

4. Dimostrare che il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ non è conservativo trovando due opportune curve γ_1 e γ_2 aventi gli stessi estremi per le quali

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{T}} ds \neq \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{T}} ds.$$

5. Metodo di d'Alembert per l'equazione delle onde.

Calcolo II (Ingegneria Civile)
Prova scritta -9 settembre 2008

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento del mio nome nell'elenco dei promossi _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Determinare l'insieme di convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^2 n} (x^2 - x)^n$$

2. Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D |x - y^2| dx dy$$

dove D è il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

3. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = 2x \sin(y)\mathbf{i} + (3y^2 + x^2 \cos y)\mathbf{j}$$

lungo l'arco di parabola di equazione $y = x^2$ dal punto $(0,0)$ al punto $(2,4)$.

4. Determinare il dominio della seguente funzione:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - \log(x^2 - y)}}{\sqrt{x - |y - 2|}}.$$

5. I teoremi di Pappo -Guldino.

Calcolo II (Ingegneria Civile)
19 giugno 2008

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento
del mio nome nell'elenco dei promossi

firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Determinare il dominio della seguente funzione e stabilire se è aperto/chiuso/limitato/connesso.

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x(x^2 + y^2 - 1)}{\log(y^2 - x^2)}}.$$

2. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2 + e^{x+y}$ sul triangolo di vertici (0,0), (1,0) e (0,1).
3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$$

dove $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\}$.

4. Studiare la convergenza della seguente serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!(n+3)!}{(2n)!} (x^2 + 3x)^n$
5. Le curve integrali del campo $-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

II prova di esonero di Calcolo II 17 Giugno 2008

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____

1. Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie e' convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (x^3 - x)^n}{n + 1}$$

2. Trovare un potenziale vettoriale del seguente campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x + 2y^2)\mathbf{i} + (2y^2 - 2yz)\mathbf{j} + (-3z - 4yz + z^2)\mathbf{k}$$

3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_{\mathcal{E}} (x^2 + xy + y^3) dx dy$$

dove \mathcal{E} è il compatto delimitato dall'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$.

4. Calcolare il flusso attraverso la superficie (laterale) del cilindro $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, 1 \leq z \leq 2\}$ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^4 y)\mathbf{i} + (z^3 + y^2 x)\mathbf{j} + (z(x^2 + y^2))\mathbf{k}$$

5. Dimostrare la formula

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{F}) = \nabla(\text{div}\mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F}.$$

6. Mostrare, utilizzando la somma di una serie geometrica, la formula per esprimere un numero periodico come una frazione.

Calcolo II (Ingegneria Civile)
I Prova di esonero - 8 aprile 2008

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento
del mio nome nell'elenco dei promossi

firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Determinare il dominio della seguente funzione e stabilire se è aperto/chiuso/limitato/connesso.

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{\log(x^2 - y^2)}{y^2 - x}}.$$

2. Sia f una funzione in $C^3(\mathbb{R}^2)$ ed u, v funzioni rispettivamente in $C^3(\mathbb{R}^4)$ e $C^3(\mathbb{R}^2)$. Si consideri la funzione $g = g(x, y, z, t) = f(u(x, y, z, t), v(y, t))$ e si calcoli g_{xtz} in funzione delle derivate di f, u, v .

Si ponga $f(u, v) = u + v + uv$, $u(x, y, z, t) = xyt + yzt$, $v(y, t) = y^4 t^2$. Si trovi l'espressione esplicita di $g(x, y, z, t)$ e si calcoli g_{xtz} in due modi.

3. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2 + xy$ sul compatto delimitato dall'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 1$.
4. Dimostrare che il seguente campo è conservativo e trovarne un potenziale scalare.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xye^{x^2y} + yz)\mathbf{i} + (x^2e^{x^2y} + xz)\mathbf{j} + (xy + 2z)\mathbf{k}.$$

5. Esempio di una funzione che ha tutte le derivate direzionali nell'origine ma non continua in tale punto.
6. La soluzione dell'equazione $mx'' = kx$ con il metodo di conservazione dell'energia.

Calcolo II (Ingegneria Civile)
I Prova di esonero - 8 aprile 2008

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento
del mio nome nell'elenco dei promossi

firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Determinare il dominio della seguente funzione e stabilire se è aperto/chiuso/limitato/connesso.

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{\log(y^2 - x^2)}{y^2 + x}}.$$

2. Sia f una funzione in $C^3(\mathbb{R}^2)$ ed u, v funzioni rispettivamente in $C^3(\mathbb{R}^4)$ e $C^3(\mathbb{R}^2)$.
Si consideri la funzione $g = g(x, y, z, t) = f(u(x, y, z, t), v(y, t))$ e si calcoli g_{ztz} in
funzione delle derivate di f, u, v .

Si ponga $f(u, v) = u + v + uv$, $u(x, y, z, t) = xyt + yzt$, $v(y, t) = y^4 t^2$. Si trovi
l'espressione esplicita di $g(x, y, z, t)$ e si calcoli g_{ztz} in due modi.

3. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = y^2 - xy$ sul com-
patto delimitato dall'ellisse di equazione $2x^2 + y^2 = 1$.
4. Dimostrare che il seguente campo è conservativo e trovarne un potenziale scalare.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 \cos(y^2 x) + yz)\mathbf{i} + (2xy \cos(xy^2 + xz))\mathbf{j} + (xy + 3z^2)\mathbf{k}.$$

5. Condizioni equivalenti per la conservatività
6. Esempio di una funzione che ha un punto di sella nell'origine ma ristretta ad una
qualunque retta passante per l'origine presenta in tale punto un minimo.

Calcolo II (Ingegneria Civile)
Prova scritta - 8 aprile 2008

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento
del mio nome nell'elenco dei promossi

firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Calcolare il seguente integrale

$$\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$$

dove D è la regione del primo quadrante delimitata da $y = 0$, $y = x$, $xy = 1$ e $x^2 - y^2 = 1$.

2. Studiare la convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2 + n + 1} (x^2 + 4x + 3)^n.$$

3. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = y^2 - xy$ sul compatto delimitato dall'ellisse di equazione $2x^2 + y^2 = 1$.
4. Dimostrare che il seguente campo è conservativo e trovarne un potenziale scalare.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 \cos(y^2 x) + yz)\mathbf{i} + (2xy \cos(xy^2) + xz)\mathbf{j} + (xy + 3z^2)\mathbf{k}.$$

5. Condizioni equivalenti per la conservatività

Prova di esame del 12 febbraio 2008
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Scrivere i primi 3 termini non nulli dello sviluppo di Taylor di $\log(3+3x^2)$ e dedurne le costanti a, b, c che rendono continua la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(3+3x^2) - (ax^2 + bx^4)}{x^6} & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ precisando in quale intervallo è valido e calcolare $f^{(20)}(0)$.

2. Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + y$ sul triangolo di vertici $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$.
3. Stabilire se il seguente campo vettoriale è conservativo ed eventualmente calcolarne un potenziale.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x \sin y, x^2 \cos y + z, y).$$

4. Calcolare il seguente integrale

$$\int \int_D \log x dx dy$$

dove D è la regione del primo quadrante delimitata dalla retta $x + y = 4$ e dall'iperbole $xy = 3$.

5. Metodo di D'Alembert per l'equazione delle onde.

Prova di esame del 29 novembre 2007
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Calcolare la somma delle seguenti serie di potenze:

(a)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{6n+3}}{2n+1}$$

(b)

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}$$

2. Sia $f = f(u, v, z)$ una funzione in $C^2(\mathbb{R}^3)$ ed $u = u(x, y)$, $v = v(y, t)$ e $z = z(x, t)$ funzioni in $C^2(\mathbb{R}^2)$. Si consideri la funzione $g = g(x, y, t) = f(u(x, y), v(y, t), z(x, t))$ e si calcoli g_{ty} in funzione delle derivate di f, u, v, z .

Si ponga $f(u, v, z) = uvz$, $u(x, y) = x^2y$, $v(y, t) = yt^3$, $z(x, t) = x + t$. Si trovi l'espressione esplicita di $g(x, y, t)$ e si calcoli g_{ty} in due modi.

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\int \int_D (3xy + x^3y) dx dy$$

dove D è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(2, 2)$ e $(1, 2)$.

4. Studiare la continuità e le derivate direzionali della seguente funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

5. Il ruolo della matrice Hessiana nello stabilire la natura dei punti critici.

Prova di esame del 13 settembre 2007
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Scrivere i primi 3 termini non nulli dello sviluppo di Taylor di $\sin(2x^3)$ e trovare le costanti a, b, c che rendono continua la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x^3) - (ax^3 + bx^9)}{x^{15}} & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ precisando in quale intervallo è valido e calcolare $f^{(21)}(0)$.

2. Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x, y) = x^2 - yx$ sul cerchio centrato in $(0,0)$ e raggio 2.
3. Calcolare il seguente integrale

$$\int \int_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$$

dove D è il compatto delimitato dalle curve $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ ed $x = 2$.

4. Trovare un potenziale vettoriale per il seguente campo vettoriale

$$F = (3xy, -y^2 + zx, -zy + xy^2)$$

5. Mostrare l'esempio di una campo vettoriale irrotazionale e non conservativo.

Prova di esame del 25 luglio 2007
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Calcolare la somma delle seguenti serie di potenze:

(a)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n x^{2n}}{n!}$$

(b)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

2. Si ricorda (formula di Erone) che l'area di un triangolo con lati di lunghezza x, y, z è data da

$$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)},$$

ove $p = \frac{x+y+z}{2}$ è il semiperimetro. Utilizzando tale formula dimostrare che fra tutti i triangoli di uguale perimetro quello di area massima è equilatero (potete fissare $p = 1$).

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\int \int_D (3xy^2 + 2x^3y) dx dy$$

dove D è il dominio limitato dalle curve $y = 0, x = 1$ e $y = x^2$.

4. Determinare il dominio e l'espressione del piano tangente al grafico nel punto $(0, 1, \sqrt{2})$ della seguente funzione.

$$\sqrt{\frac{x+2}{(y-x^2)(y+x)}}$$

5. Enunciare e dimostrare il Teorema di Green.

Prova di esame del 3 luglio 2007
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Scrivere i primi 3 termini non nulli dello sviluppo di Taylor di $\ln(1 + 2x^2)$ e trovare le costanti a, b, c che rendono continua la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + 2x^2) - (ax^2 + bx^4)}{x^6} & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ precisando in quale intervallo è valido e calcolare $f^{(18)}(0)$.

2. Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x, y) = x^2y^2 - x^3$ sul triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,2)$.
3. Calcolare il seguente integrale

$$\int \int_D ye^{x^2} dx dy$$

dove $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^{3/2}\}$

4. Determinare il dominio e l'espressione del piano tangente al grafico nel punto $(2, 1, \log 2)$ della seguente funzione.

$$\log \left(\frac{\sqrt{(x+2)}(y-x)}{x-3} \right)$$

5. Trovare, utilizzando la somma di una serie geometrica, l'espressione come frazione del numero periodico $0,1234\overline{5} = 0,1234545454545 \dots$.

Calcolo II (Ingegneria Civile)
I Prova di esonero - 11 aprile 2007

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' eventuale inserimento
del mio nome nell'elenco dei promossi

firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Determinare il dominio e il piano tangente al grafico nel punto $(4, e/4, 1)$ della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{\log(xy)}{x-3}}.$$

2. Sia $f = f(u, v)$ una funzione in $C^2(\mathbb{R}^2)$ ed $u = u(x, y, t)$, $v = v(y, t)$ funzioni rispettivamente in $C^2(\mathbb{R}^3)$ e $C^2(\mathbb{R}^2)$. Si consideri la funzione $g = g(x, y, t) = f(u(x, y, t), v(y, t))$ e si calcoli g_{xt} in funzione delle derivate di f, u, v .

Si ponga $f(u, v) = u^2v$, $u(x, y, t) = xy^2t$, $v(y, t) = y^3t^2$. Si trovi l'espressione esplicita di $g(x, y, t)$ e si calcoli g_{xt} in due modi.

3. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2 + y - xy$ sul compatto contenuto nel primo quadrante delimitato dalle curve di equazione $y = x$ e $y = x^3$.

4. Sia $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x)$. Senza utilizzare le formule di Green calcolare

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \hat{T} ds$$

dove γ è la frontiera del quadrato di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ orientata in senso antiorario.

5. Metodo di D'Alembert per l'equazione delle onde.

Prova di esame del 23 novembre 2006
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

- 1.
2. Scrivere i primi 3 termini non nulli dello sviluppo di Taylor di $\exp(2x^2)$ e dedurne la costante c che rende continua la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\exp(2x^2) - (1 + 2x^2 + 2x^4)}{x^6} & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ precisando in quale intervallo è valido e calcolare $f^{(20)}(0)$.

3. Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x, y) = x^2 + y^2 + y$ sul compatto contenuto nel primo quadrante delimitato dagli assi coordinati e dalla circonferenza centrata nell'origine e di raggio 1.
4. Stabilire se il seguente campo vettoriale è conservativo ed eventualmente calcolarne un potenziale.
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xye^{x^2} + z, e^{x^2} + z^2, x + 2yz).$$
5. Calcolare il flusso uscente dal cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ compreso fra i piani $z = 1$ e $z = 2$ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2z, y^2z, x + z)$.
6. Esempio di un campo vettoriale irrotazionale ma non conservativo.

Prova di esame del 28 settembre 2006
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Stabilire l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{n^2+2} (x^2+x+1)^n.$$

2. Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x, y) = x^2 + y^3 - x^2 y^2$ sul compatto delimitato dalle rette di equazione $y = x$, $y = 2x$ e $x = 1$.
3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_0^1 dx \int_x^{x^{1/3}} \sqrt{1-y^4} dy.$$

4. Calcolare il flusso uscente dalla sfera di centro $(1, 2, 0)$ e raggio 1 del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy + xz^3, z + y, z^2xy)$.
5. Esempio di una funzione che ammette derivate direzionali (rispetto ad un qualunque vettore) nell'origine ma non continua in tale punto.

Prova scritta di CALCOLO II
19/7/2006

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Scrivere i primi 3 termini non nulli dello sviluppo di Taylor di $\log(2+4x^2)$ e dedurne la costante c che rende continua la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(2+4x^2) - (2x^2 - 2x^4) - \log 2}{x^6} & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ precisando in quale intervallo è valido e calcolare $f^{(12)}(0)$.

2. Sia f una funzione in $C^2(\mathbb{R}^4)$ e u, v, w, z funzioni in $C^2(\mathbb{R}^2)$. Si consideri la funzione $g(r, s, t) = f(u(r, s), v(r, t), w(r, t), z(s, t))$. Si esprima g_{st} in funzione delle derivate di f e di u, v, w, z .

Si ponga $f(u, v, w, z) = uv + wz$, $u(r, s) = rs$, $v(r, t) = r + t$, $w(r, t) = rt^2$ e $z(s, t) = s^2t^2$. Si trovi l'espressione esplicita di g e si calcoli g_{st} in due modi.

3. Calcolare

$$\int_{\gamma} F \cdot T ds,$$

dove γ è la frontiera del triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ percorsa in senso antiorario ed $F(x, y) = (xy^2, xy)$.

4. Calcolare

$$\int \int \int_T y dx dy dz,$$

dove T è la piramide di vertici $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 2)$.

5. La trasformazione in coordinate polari negli integrali doppi.

A

Prova di esame del 28 giugno 2006
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Stabilire l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3n+2} (x^2 - 2)^n.$$

2. Si consideri la funzione $g = g(x, y, t) = f(u(x, y, t), v(x, y, t))$, dove $f = f(u, v)$ è una funzione in $C^2(\mathbb{R}^2)$ ed $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, funzioni in $C^2(\mathbb{R}^3)$. Si calcoli g_{xt} in funzione delle derivate di f, u, v .

Si ponga $f(u, v) = u + v^2$, $u(x, y, t) = xyt + ty$, $v(x, y, t) = txy$. Si trovi l'espressione esplicita di $g(x, y, t)$ e si calcoli g_{xt} in due modi.

3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int \int_D x dx dy$$

dove D denota il compatto, contenuto nel primo quadrante, compreso fra le rette di equazione $y = x$, $y = 2x$ e $y = 2 - x$.

4. Calcolare il flusso uscente dalla sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 2 del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, zy^2)$.
5. Mostrare l'esempio di un campo vettoriale irrotazionale che non è conservativo.

Prova di esame del 28 giugno 2006
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Stabilire l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3n+2} (x^2 + x)^n.$$

2. Si consideri la funzione $g = g(x, y, z, r, s, t) = f(u(x, y, z), v(r, s, t))$, dove $f = f(u, v)$ è una funzione in $C^2(\mathbb{R}^2)$ ed $u = u(x, y, z)$, $v = v(r, s, t)$, funzioni in $C^2(\mathbb{R}^3)$. Si calcoli g_{xs} in funzione delle derivate di f, u, v .

Si ponga $f(u, v) = uv$, $u(x, y, z) = xyz + zy$, $v(r, s, t) = trs$. Si trovi l'espressione esplicita di $g(x, y, z, r, s, t)$ e si calcoli g_{xs} in due modi.

3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int \int_D y dx dy$$

dove D denota il compatto, contenuto nel primo quadrante, compreso fra le rette di equazione $y = x$, $y = 3x$ e $y = 3 - x$.

4. Calcolare il flusso uscente dalla sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1 del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y, yx, zy^2)$.
5. Mostrare l'esempio di un campo vettoriale irrotazionale che non è conservativo.

II prova di esonero di CALCOLO II
14/6/2006

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Determinare l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 + 1} (x^2 - 1)^n.$$

2. Calcolare un potenziale vettoriale del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$.
3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dx \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(y^2) dy.$$

4. Calcolare il flusso uscente dalla superficie laterale del cono di equazione $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ posta sopra al piano $z = 0$ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, z^2, z^2 + xy^4).$$

5. Condizioni equivalenti per la conservatività di un campo vettoriale.

CIV1

II prova di esonero di CALCOLO II
14/6/2006

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Scrivere i primi 3 termini non nulli dello sviluppo di Taylor di $\sin(3x^2)$ e dedurne la costante c che rende continua la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x^2) - 3x^2 + \frac{9}{2}x^6}{x^{10}} & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ precisando in quale intervallo è valido e calcolare $f^{(18)}(0)$.

2. Calcolare un potenziale vettoriale del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x, y)$.
3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int \int_E x^2 dx dy.$$

dove E è l'ellisse $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. Calcolare il flusso verso l'alto attraverso la superficie del paraboloide di equazione $z = 2 - (x^2 + y^2)$ posta al di sopra del piano $z = 0$ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2, y^2, z^2 + xy^4).$$

5. Conseguenze del teorema di Green.

CIV2

Prova di esonero del 12 aprile 2006
CALCOLO II

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____

Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Determinare il dominio e il piano tangente al grafico nel punto $(1, 0, \log 2)$ della funzione

$$f(x, y) = \log [(x^2 - 2y)(x + y + 1)].$$

2. Sia $f = f(u, v, z)$ una funzione in $C^2(\mathbb{R}^3)$ ed $u = u(x, t)$, $v = v(s, t)$, $z = z(x, y)$ funzioni in $C^2(\mathbb{R}^2)$. Si consideri la funzione $g = g(x, y, s, t) = f(u(x, t), v(s, t), z(x, y))$ e si calcoli g_{xs} in funzione delle derivate di f, u, v, z .

Si ponga $f(u, v, z) = u^2 + vz$, $u(x, t) = x^2 + t$, $v(s, t) = st$, $z(x, y) = x^2 + y^2$. Si trovi l'espressione esplicita di $g(x, y, s, t)$ e si calcoli g_{xs} in due modi.

3. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2 + 3xy + x + y^2$ sul trapezio di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.
4. Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy^2 + ye^{y^3}, xe^{y^3} + 2yx^2 + \sin(z^2) + 3xy^3e^{y^3}, 2yz \cos(z^2))$. Verificare che \mathbf{F} soddisfa la condizione necessaria per la conservatività e trovarne un potenziale scalare.
5. Mostrare l'esempio di una funzione che ha tutte le derivate direzionali nell'origine, ma non continua in tale punto.

A

Prova di esonero del 12 aprile 2006
CALCOLO II

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____

Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Determinare il dominio e il piano tangente al grafico nel punto $(1, 0, \sqrt{3})$ della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(y - x^2)}.$$

2. Sia $f = f(u, v, w, z)$ una funzione in $C^2(\mathbb{R}^4)$ ed $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$, $z = z(x)$ funzioni in $C^2(\mathbb{R})$. Si consideri la funzione $g = g(x) = f(u(x), v(x), w(x), z(x))$ e si calcoli g'' in funzione delle derivate di f, u, v, w, z .

Si ponga $f(u, v, w, z) = uvvz$, $u(x) = x$, $v(x) = x^2$, $w(x) = x^3$, $z(x) = \sin x$. Si trovi l'espressione esplicita di $g(x)$ e si calcoli g'' in due modi.

3. Studiare la continuità, le derivate direzionali e la differenziabilità della seguente funzione nell'origine.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

4. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 y + xy, xy^3)$ lungo la curva di equazione $y = x^3$ con punto iniziale $(0, 0)$ e punto finale $(2, 8)$.
5. Risoluzione della equazione differenziale associata alla legge di Hooke con il metodo della conservazione dell'energia.

B

Prova di esonero del 12 aprile 2006
CALCOLO II

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____

Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Determinare il dominio e il piano tangente al grafico nel punto $(0, 0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = \arcsin(x^2 - y^2).$$

2. Sia $f = f(u, v)$ una funzione in $C^2(\mathbb{R}^2)$ ed $u = u(x, y, s)$, $v = v(x, y, t)$, funzioni in $C^2(\mathbb{R}^3)$. Si consideri la funzione $g = g(x, y, s, t) = f(u(x, y, s), v(x, y, t))$ e si calcoli g_{xt} in funzione delle derivate di f, u, v .

Si ponga $f(u, v) = uv + v^2$, $u(x, y, s) = xy^2 + sy$, $v(x, y, t) = t^2xy$. Si trovi l'espressione esplicita di $g(x, y, s, t)$ e si calcoli g_{xt} in due modi.

3. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2 + 2y + x + y^2$ sul disco di raggio 4 e centro $(0, 0)$.
4. Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2y + \sin(y^2)y^2 + yz, 2xy \sin(y^2) + e^{z^2} + 2xy^3 \cos(y^2) + xz + x^3, 2zye^{z^2} + xy)$. Verificare se \mathbf{F} soddisfa la condizione necessaria per la conservatività ed eventualmente trovarne un potenziale scalare.
5. Il metodo di separazione delle variabili.

C

Prova scritta del 12 aprile 2006
CALCOLO II

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____

Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Determinare l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n(n+2)}{n+5} (2x)^n.$$

2. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - x^4$ sul disco di raggio 5 e centro $(0, 0)$.
3. Determinare il flusso uscente dalla superficie laterale del cubo $Q = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (xye^{y^2}, x + z, y^3 + 3 \sin y)$.
4. Determinare un potenziale vettoriale del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy^2z, \sin x - y^3z^2, -z^2y^2 + y^2z^3)$.
5. Il Teorema di Green nel piano.

D

Prova scritta di CALCOLO II
15/2/2006

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____
firmare in caso si acconsenta,
scrivere la matricola altrimenti.

1. Determinare l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2 + 1} x^n.$$

2. Dopo aver verificato che il seguente campo vettoriale è irrotazionale, determinarne un potenziale scalare.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + z, z + 2yz^2, y + x + 2zy^2).$$

3. Calcolare il massimo ed il minimo assoluto sulla corona circolare compresa fra le circonferenze con il centro nell'origine e di raggio 1 e 2 rispettivamente, della seguente funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x.$$

4. Calcolare il flusso uscente dal cilindro (compresa la base e il tappo) di equazione $x^2 + y^2 = 1$ compreso fra i piani $z = 0$ e $z = 1$ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 \cos y, y^4 e^{2x}, z^3 + xy^2).$$

5. Dimostrare che la funzione esponenziale è la somma della sua serie di Taylor.

Prova di esame del 22 settembre 2005
Calcolo II

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____

Firma in caso si acconsenta,
n. di matricola altrimenti.

1. Trovare l'insieme di convergenza semplice ed assoluta della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{n^2 + 3n + 5} (2x)^{2n}.$$

2. Calcolare il flusso (verso l'alto) attraverso la superficie di equazione $z = xy$ con $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y, -10xy^2, 0)$.
3. Studiare la continuita', la differenziabilita' e le derivate direzionali della seguente funzione nell'origine

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^4 + y^6}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

4. Determinare il massimo ed il minimo assoluto di

$$f(x, y) = x + y - y^2x$$

sul quadrato di vertici $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$ e $(-2, -2)$.

5. Mostrare l'esempio di un campo vettoriale irrotazionale non conservativo (spiegare in dettaglio le ragioni della non conservatività del campo trovato).

Prova di esame del 20 giugno 2005
Calcolo II

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____

1. Dopo aver determinato la costante c che rende continua la seguente funzione, scriverne il suo sviluppo di Taylor, precisando in quale intervallo e' valido.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(6x)-6x+72x^3}{x^5} & \text{se } x \neq 0. \\ c & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Calcolare inoltre $f^{(12)}(0)$.

2. Calcolare il flusso uscente dalle superficie laterale del cono retto di equazione $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ posta sopra al piano $z = 0$ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y + x, -z + zx + xy^3)$.
3. Studiare la continuita', la differenziabilita' e le derivate direzionali della seguente funzione nell'origine

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3+y^6}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

4. Determinare il massimo ed il minimo assoluto di

$$f(x, y) = xy^2 - 4x + y$$

sul triangolo compreso di vertici $(4, 0)$, $(0, -4)$ $(0, 0)$.

5. Enunciare e dimostrare il Teorema di Green. Mostrare inoltre come da tale teorema si possa dedurre una condizione sufficiente per l'esistenza di un potenziale scalare.

Prova di esonero del 20 giugno 2005
Calcolo II

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____

1. Dopo aver determinato la costante c che rende continua la seguente funzione, scriverne il suo sviluppo di Taylor, precisando in quale intervallo e' valido.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(3x^2)-3x^2+9x^6}{x^{10}} & \text{se } x \neq 0. \\ c & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Calcolare inoltre $f^{(12)}(0)$.

2. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (xe^y, x^4 + xy^2)$ lungo la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1 percorsa in senso antiorario.
3. Trovare un potenziale vettoriale del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy + yz, y^2 - x^3, -3zy + x^2)$.
4. Calcolare il flusso uscente dalle superficie laterale del cono retto di equazione $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ posta sopra al piano $z = 0$ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, y^2, z + xy^3)$.
5. Mostrare come si ottiene lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale.

A

Prova di esonero del 20 giugno 2005
Calcolo II

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____

1. Dopo aver determinato la costante c che rende continua la seguente funzione, scriverne il suo sviluppo di Taylor, precisando in quale intervallo e' valido.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+3x^2)-3x^2+\frac{9}{2}x^4}{x^6} & \text{se } x \neq 0. \\ c & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Calcolare inoltre $f^{(12)}(0)$.

2. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (x + y^3, y^2 + x^2y^2)$ lungo la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 2 percorsa in senso antiorario.
3. Trovare un potenziale vettoriale del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2x + z^3y, y^3 - x^2z, -4zy^2 + x^3)$.
4. Calcolare il flusso uscente dalle superficie laterale del cono retto di equazione $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ posta sopra al piano $z = 0$ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y, yx, z + x^2y^3)$.
5. Mostrare come si ottiene lo sviluppo di Taylor della funzione arctan.

B

Prova di esame del 13 aprile 2005
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Data di nascita _____

1. Dopo aver determinato la costante c che rende continua la seguente funzione, scriverne la sua serie di Taylor, precisando in quale intervallo lo sviluppo e' valido.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(2x) - 2x + \frac{8}{3}x^3}{x^5} & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e si considerino le funzioni composte $G(t) = f(t^3, t^2)$ ed $g(x, y) = f(y + x, x^2)$. Si esprimano, in funzione delle derivate di f ,

$G''(t)$ e $g_{xy}(x, y)$.

3. Verificare la condizione necessaria per la conservatività del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^3 + 2xz^2, 3y^2x + z^4, 4z^3y + 2zx^2)$$

e determinarne un potenziale scalare.

4. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = y^2 + x^2 + x$ sul triangolo di vertici $(0, 1)$, $(0, -1)$ e $(1, 0)$.
5. Calcolare il flusso uscente dalle superficie del paraboloide di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$ posta al di sopra del piano di equazione $z = 2x - 2y$ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x + z, z^2)$.
6. Mostrare l'esempio di una funzione che ha un punto di sella nell'origine ma le cui restrizioni a rette passanti per l'origine hanno in tale punto un minimo relativo.

Prova di esonero del 13 aprile 2005
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____

1. Determinare il dominio (mostrandolo graficamente) e l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(0, 1, 0)$ della seguente funzione

$$f(x, y) = \ln(y - x^2)\sqrt{x + 3}.$$

2. Verificare la condizione necessaria per la conservatività del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z, x^2 + 3y^2z^2, x + 2zy^3)$$

e determinarne un potenziale scalare.

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e si considerino le funzioni composte $G(t) = f(t^2, t^3)$ ed $g(x, y) = f(x^2, y + x)$. Si esprimano, in funzione delle derivate di f ,

$$G''(t) \text{ e } g_{xy}(x, y).$$

4. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2 + xy + y$ sul triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.
5. Mostrare l'esempio di una funzione che ammette derivate direzionali (rispetto ad un qualunque vettore) nell'origine ma non continua in tale punto.

A

Prova di esonero del 13 aprile 2005
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____

1. Determinare il dominio (mostrandolo graficamente) e l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(2, -2, 0)$ della seguente funzione

$$f(x, y) = \sqrt{y + x^2} \ln(y + 3).$$

2. Verificare la condizione necessaria per la conservatività del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz + 2xz^2, xz + 2y, xy + 2zx^2)$$

e determinarne un potenziale scalare.

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e si considerino le funzioni composte $G(t) = f(\sin t, \cos t)$ ed $g(x, y) = f(y^2, x - y)$. Si esprimano, in funzione delle derivate di f ,

$$G''(t) \text{ e } g_{xy}(x, y).$$

4. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = y^2 + 2xy + y$ sul triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, -1)$.
5. Mostrare l'esempio di una funzione che è differenziabile nell'origine ma non di classe C^1 in un intorno dell'origine.

B

Prova di esonero del 13 aprile 2005
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Anno di immatricolazione _____

Acconsento all' affissione del voto con il mio cognome _____

1. Determinare il dominio (mostrandolo graficamente) e l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1/2, 1, 0)$ della seguente funzione

$$f(x, y) = \sqrt{y - 2x^2} \ln(2x).$$

2. Verificare la condizione necessaria per la conservatività del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^3 + 2xz^2, 3y^2x + z^4, 4z^3y + 2zx^2)$$

e determinarne un potenziale scalare.

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e si considerino le funzioni composte $G(t) = f(t^3, t^2)$ ed $g(x, y) = f(y + x, x^2)$. Si esprimano, in funzione delle derivate di f ,

$$G''(t) \text{ e } g_{xy}(x, y).$$

4. Trovare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = y^2 + x^2 + x$ sul triangolo di vertici $(0, 1)$, $(0, -1)$ e $(1, 0)$.
5. Mostrare l'esempio di una funzione che ha un punto di sella nell'origine ma le cui restrizioni a rette passanti per l'origine hanno in tale punto un minimo relativo.

C

Prova di esame del 23 febbraio 2005
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Data di nascita _____

1. Stabilire l'insieme di convergenza semplice ed assoluta della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 3n}{n^3 + 1} (2x)^n.$$

2. Determinare il dominio e l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1, 1, \sqrt{2} \ln 2)$ della seguente funzione

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \ln(y + x).$$

3. Calcolare un potenziale scalare del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x y, z + e^x, y).$$

4. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int \int_D (x^2 y + x) dx dy$$

dove D denota il compatto compreso fra la parabola di equazione $y^2 = x$ e la retta di equazione $y = 1$ ed $x = 0$.

5. Calcolare il flusso uscente dalla superficie laterale del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ compreso fra i piani $z = 0$ e $z = 1$. del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, xy^2, z(z - 1))$.
6. Il ruolo della matrice hessiana nello stabilire la natura dei punti critici.

Prova di esame del 19 novembre 2004
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Data di nascita _____

1. Dopo aver determinato la costante c che rende continua la seguente funzione, scriverne la sua serie di Taylor, precisando in quale intervallo e' valido.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+4x^3)-4x^3}{x^6} & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

2. Studiare la continuita', la differenziabilita' e le derivate direzionali della seguente funzione nell'origine

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases} .$$

3. Calcolare un potenziale scalare del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 - y \sin(xy), -x \sin(xy) + 3y^2, 2zx).$$

4. Determinare il massimo ed il minimo assoluto di

$$f(x, y) = x^3 + y^2$$

sul compatto compreso fra la parabola di equazione $y = x^2 - 1$ e la retta di equazione $y = 1$.

5. Calcolare il flusso uscente dalle superficie del paraboloido di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, z + 1)$.
6. Spiegare perche' il teorema di Stokes e' una generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo.

Prova di esame del 23 settembre 2004
Calcolo II (Ingegneria Civile)

Nome e cognome _____ Data di nascita _____

1. Stabilire l'insieme di convergenza semplice ed assoluta della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!(3n)!}{(5n)!} (2x+1)^{2n}.$$

2. Studiare la continuita', la differenziabilita' e le derivate direzionali della seguente funzione nell'origine

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^2y^3+x^2y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}.$$

3. Calcolare un potenziale vettoriale del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y \sin(x), z, -zy \cos(x)).$$

4. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int \int_D x^2 dx dy$$

dove D denota il compatto compreso fra la parabola di equazione $y^2 = x$ e la retta di equazione $2y = x - 3$

5. Calcolare il flusso uscente dalle parte di superficie della sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 2 esterna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 0, -z)$.
6. Mostrare come si ottiene la somma di una serie geometrica.