1. Mostrate che le operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{Q}$ sono ben definite, ovvero che se $(a, b) \sim (a', b')$ e $(c, d) \sim (c', d')$ allora

$$(a, b) \oplus (c, d) \sim (a', b') \oplus (c', d')$$

e

$$(a, b) \otimes (c, d) \sim (a', b') \otimes (c', d').$$

2. Si definisca su $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ la somma

$$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{s}$$

ed il prodotto

$$\overline{a} \otimes \overline{b} = \overline{p}$$

dove s e p sono rispettivamente il resto nella divisione per 5 di $a + b$ e $a \cdot b$ (in $\mathbb{N}$). Mostrare che $(\mathbb{Z}_5, \oplus, \otimes)$ è un campo non ordinato.

(difficile) Sia $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. Mostrare che

$$[\sup(A)]^2 = 2.$$

Dedurne che $\mathbb{Q}$ non verifica l'assioma di completezza.