**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di GE210- 29 Settembre 2011

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra**

**Tutori: Sara Lamboglia e Alessandra Albanese**

Tutorato 1
29 Settembre 2011

1. Stabilire quali delle seguenti sono forme bilineari su $\mathbb{R}^n$ :

    a) $< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_3y_3$

    b) $< x, y >= 3x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 - \sqrt{2}x_2y_3 - \sqrt{2}x_3y_2 + x_2y_4 + x_4y_2$

    c) $< x, y >= x_1y_2 + x_2y_1 - \sqrt{2}x_1y_1 - 2x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 + x_2y_3 + x_3y_2$

2. Data la seguente forma su $\mathbb{R}[T]^3$,determinare se é una forma bilineare simmetrica:

$$< p(t), q(t) >= p(2)q(2) - p'(0)q'(0) - p''(1)q(3) - p(3)q''(1)$$

3. Determinare quali delle seguenti sono forme bilineari su $\mathbb{R}^n$ :

    a) $F(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j$

    b) $F(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j)^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{j=1}^{n} y_j^2$

    c) $F(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j + y_{n-j}$

4. Sia $F$ una forma bilineare simmetrica assegnata su uno spazio vettoriale $V$ . Sia $S \subseteq V$ un sottoinsieme di V . Dimostrare che:

$$S^{\perp} =< S >^{\perp}$$

5. Data la forma bilineare $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da :

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_3y_3$$

    $\forall(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^3$ con $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

    a) Stabilire se $F$ é simmetrica.

    b) Scrivere la matrice $A$ che rappresenta $F$ rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$.

    c) Stabilire se $F$ é degenere.

    d) Verificare che i sottospazi $U =< (1, 0, 0, ) >$ e $V < (0, 0, 1) >$ sono ortogonali rispetto alla forma $F$.(Nota: due sottospazi $U$ e $W$ si dicono ortogonali se $U \subseteq V^{\perp}$ e $V \subseteq U^{\perp}$).

    e) Dimostrare che non esistono vettori isotropi del tipo $(0, 0, t), t \neq 0$.

    f) Trova l'equazione del cono isotropo.

6. Data la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Scrivere la forma bilineare $G$ definaita dalla matrice $A$ rispetto alla base canonica.

b) Stabilire se $G$ è degenere e trovare 2 vettori non nulli $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^4$ tali che $G(x_0, y) = 0\ \forall y \in \mathbb{R}^4$ e $G(x, y_0) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^4$.

c) Scrivere la matrice di $G$ rispetto alla base $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

$$b_1 = e_1, \quad b_2 = -e_1 + e_4, \quad b_3 = e_1 + e_2, \quad b_4 = e_3$$

.

7. Diagonalizzare le seguenti matrici:

- $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$