Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Sara Lamboglia e Alessandra Albanese

TUTORATO 2

6 OTTOBRE 2011

1. Dimostrare che data q forma quadratica associata a b forma bilineare simmetrica, essa verifica le seguenti condizioni:
   a) $q(k\overline{v}) = k^2 q(\overline{v})$
   b) $2b(\overline{v},\overline{w}) = q(\overline{v}+\overline{w}) - q(\overline{v}) - q(\overline{w})$

2. Diagonalizzare le seguenti forme quadratiche e determinarne la segnatura:
   a) $q(x,y,z) = xz + xy + yz$
   b) $q(x,y,z) = -x^2 - 4xy + 3y^2 + 2z^2$
   c) $q(x,y,z) = x^2 - 2xy + y^2 + 2xz + z^2$

3. Dimostrare che in uno spazio vettoriale euclideo $(V,<,>)$ sussistono le seguenti identitá $\forall v, w \in V$
   a) $||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2$
   b) $||v+w||^2 - ||v-w||^2 = 4 < v, w >$

4. Dato il polinomio:

   $$P = x^2 - 2y^2 + xy - xz \in \mathbb{Z}_3[x,y,z]$$

   Sia $V = (\mathbb{Z}_3)^3$ e si fissi in V la base $\mathbb{E}$=$\{e_1, e_2, e_3\}$
   a) Scrivere la matrice A della forma quadratica q associata al polinomio P e determinarne il rango.
   b) Diagonalizzare q , indicarne l'espressione in una base q-diagonalizzante e determinarne la segnatura.

5. Si determini la forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita dalle seguenti condizioni:
   a) $b(e_1,e_1) = b(e_2,e_2) = b(e_3,e_3) = 1$
   b) I vettori $e_1+e_2,\ e_1+e_3,\ e_2+e_3$ sono isotropi.

   Scrivere la matrice A associata alla forma bilineare b e diagonalizzarla.
   Scrivere la forma quadratica associata e determinarne la segnatura.

6. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Calcolare la matrice $B = {}^tA(A)$

   b) Scrivere la forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ avente come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice B

   c) Si consideri il vettore $v_\lambda = (1-\lambda, 2-\lambda, \lambda)$ e il sottospazio F_λ dei vettori x t.c.$b(v_\lambda, x) = 0$ al variare dei parametri reali λ, si calcoli la dimensione dell'intersezione $F_\lambda \cap W$ dove W é il sottospazio avente come base i vettori $w_1 = (1, -1, 0)$ $w_2 = (0, 0, 1)$

7. Verificare che ponendo
   $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 6x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_4$
   si definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$. Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si ortogonalizzi la base canonica di $\mathbb{R}^4$ rispetto a questo prodotto scalare.

8. Trovare una base ortonormale del sottospazio $V = \{(x, y, z)|x + y - z = 0\}$ di $\mathbb{R}^3$. Completare poi la base trovata a base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.