Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Sara Lamboglia e Alessandra Albanese

Tutorato 3
13 Ottobre 2011

1. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado 3 a coefficienti in $\mathbb{R}$, dotato del prodotto scalare standard:

$$\left\langle a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \right\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

   a) Dopo aver verificato che i seguenti polinomi costituiscono una base di V, applicare ad essi il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:

$$t+1,\, t+t^2,\, 2-t-t^3,\, t^3$$

   b) Dato il sottospazio $U = \langle t^3 - 1, t+2 \rangle$ di V calcolare le equazioni cartesiane e parametriche di $U^\perp$. Scrivere poi una base ortonormale di U e di $U^\perp$.

2. Sia $\langle\, , \rangle$ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ che ha, come matrice associata, rispetto alla base canonica, la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ costruire una base ortogonale per $\langle\, , \rangle$.
   (Prova di esonero del 10-11-2008)

3. Si determini una base ortonormale f di $\mathbb{R}^3$, rispetto al prodotto scalare standard, applicando il procedimento di Gram-Schidt alla base v formata dai vettori $\overline{v_1} = (1,0,1), \overline{v_2} = (0,1,1), \overline{v_3} = (0,1,-1)$.
   Si verifichi che la matrice del cambiamento di base dalla base f alla base canonica e é una matrice ortogonale.
   (Prova di esonero del 5-11-2007)

4. Dimostrare che se $charK \neq 2$ ogni forma bilineare simmetrica $F : V \times V \to K$ che sia non nulla ha un vettore non isotropo.

5. Stabilire se le seguenti forme quadratiche sono definite positive, negative o semidefinite positive, negative:

   a) $x^2 - y^2 - 2z^2 + \frac{1}{2}xy$

   b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + yz$

   c) $x^2 + 5y^2 + 4z^2 + xy + \frac{1}{2}yz$

6. Sia Q la forma quadratica rappresentata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ da $Q(x) = 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_2^2$.

   a) Scrivere la matrice A della forma bilineare simmetrica b associata a q.

   b) Verificare che il vettore $x = (-1,3,2)$ non é b-isotropo

c) Determinare 2 vettori $y' e y'' \in \mathbb{R}^3$ tali che $y' + y'' = e_2$ con $y' || x$ e $y'' \perp x$.

7. Sia f un'affinità di $\mathbb{A}$. Verificare che se f fissa due punti P e $Q \in \mathbb{A}$ allora f fissa tutti i punti della retta r passante per P e Q

8. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ un piano affine con riferimento Oe_1e_2.

   a) Determinare l'equazione di ogni affinitá f di $\mathbb{A}$ che fissa i punti della retta r di equazione $x + y = 1$.

   b) Considerati i punti $P = (1, 2)$, $Q = (2, 1) \in \mathbb{A}$, tra le affinitá considerate in (a) determinare quelle (eventuali) che trasformano P in Q.

   c) Tra le affinitá considerate in (a) determinare eventuali traslazioni.