Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Sara Lamboglia e Alessandra Albanese

Tutorato 4
20 Ottobre 2011

1. Trovare per quali valori di h la seguente matrice è definità positiva e per quali valori è definita negativa:
$$\begin{pmatrix} h & 2 & h \\ 2 & h & 0 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica la cui matrice associata rispetto alla base canonica $e = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ é
$$\begin{pmatrix} h & -1 & 2 \\ -1 & h & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h \in \mathbb{R}.$$
   a) Si trovino, se esistono, i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui b è non degenere e quelli per cui è un prodotto scalare.
   b) Per $h = -1$ si stabilisca se può esistere una base di $\mathbb{R}^3$, ortogonale rispetto a b, contenente il vettore $4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$.
   c) Per $h = 0$ si stabilisca se può esistere una base $f = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$, ortogonale rispetto a b e tale che
$$b(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}) = 0, \qquad b(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = 1, \qquad b(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = 2.$$

   (Appello A del 18 febbraio 2010)

3. Sia $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica tale che $I_b(\mathbb{R}^n) = \{0\}$. Dimostrare, utilizzando il teorema di Sylvester, che risulta:
$$b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{oppure} \quad b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < 0, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$
   [cioè b è definita positiva o definita negativa].

4. Sia $a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare così definita rispetto alla base canonica $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$:
$$a(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}, \qquad a(\overrightarrow{e_2}) = 2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2}$$
$$a(\overrightarrow{e_3}) = 4\overrightarrow{e_3} + 2\overrightarrow{e_4}, \qquad a(\overrightarrow{e_4}) = 2\overrightarrow{e_3} + 2\overrightarrow{e_4}$$
   Verificare che a è un operatore simmetrico rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$ (*Nota*: dato uno spazio vettoriale euclideo V con prodotto scalare $\langle\, , \rangle$, un operatore $T \in \mathrm{End}V$ si dice *simmetrico* se $\langle T(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, T(\overrightarrow{y}) \rangle$, $\forall\, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V$).

5. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ uno spazio affine con riferimento $Oe_1e_2e_3$. Sia $f = (f, \varphi)$ l'affinità di $\mathbb{A}$ definita dalle seguenti condizioni:

   $f(P) = P'$, con $P = (1, 2, 0)$ e $P' = (2, -1, 1)$
   $f(Q) = Q'$, con $Q = (1, 3, 1)$ e $Q' = (3, -1, 0)$
   $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$; $\qquad \varphi(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$.

a) Determinare le equazioni di f.

b) Determinare i punti fissi di$f$.

6. Sia fissato un riferimento cartesiano Oe_1e_2 di $\mathbb{E}^2$.

   a) Scrivere l'equazione della rotazione $R_{P,\vartheta}$ di $\mathbb{E}^2$ di centro $P = (1, 2)$ ed angolo $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ (in senso antiorario).

   b) Scrivere le equazioni della riflessione ρ_r, con r avente equazione $x - y + 1 = 0$.

   c) Scrivere le equazioni della riflessione ρ_s tale che $\rho_r \circ \rho_s = R_{P,\vartheta}$; individuare la retta s (passante per P).

7. Dire per quali valori di k esistono affinitá tali che l'immagine di $(1, 0)$ sia il punto $(2, 0)$, l'immagine del punto $(0, 1)$ sia $(1, 1)$ e l'immagine dell' origine sia $(2 + k, 1 - k)$. Determinare gli eventuali valori di k per cui si ottengono isometrie.