Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra
Tutori: Sara Lamboglia e Alessandra Albanese

Soluzioni Tutorato 5
27 Ottobre 2011

1. Si consideri l'operatore $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$
e sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$$b(x, y) = x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_2$$
e sia $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$$h(x, y) = b(f(x), f(y))$$
   a) verificare che h é una forma bilineare simmetrica.
   b) trovare il rango di h e costruire una base diagonalizzante.
   c) determinare la segnatura della forma quadratica associata.

2. In $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard si considerino
$$v_1 = e_3,\ v_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4,\ v_3 = 2e_1 + e_2 + e_4,\ v_4 = te_1 + te_3,\ t \in \mathbb{R}$$
Si determini il valore di t per il quale il procedimento di Grahm-Shimdt applicato a v_1, v_2, v_3, v_4 produce un vettore nullo, e si utilizzi tale procedimento per trovare vettori ortonormalizzati.

3. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ definito, rispetto a una base $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^2$, dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Verificare se esiste un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ rispetto a cui:
   a) T è autoaggiunto.
   b) T è unitario.

4. Siano date l'iperbole C di equazione:
$$x^2 - y^2 = 1$$
e la rotazione f di angolo $\frac{\pi}{4}$ e di centro $P = (1, 1)$.
Si determini l'equazione di $f(C)$.

5. Sia fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{O}_{e_1,e_2}$ di $\mathbb{E}^2$. Sia f la rotazione di centro $C = (1, 0)$ e angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$ (in senso antiorario). Sia g la riflessione di asse la retta $x = 0$.
   a) scrivere le equazioni dell'isometria $g \circ f$.
   b) dire se tale isometria é una traslazione, una rotazione, una glissoriflessione o una riflessione.

6. (*Simmetria rispetto a un punto*)
Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V ($\dim V = n$). Fissiamo in $\mathbb{A}$ un punto C.
Determinare le equazioni dell'affinità $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ che associa ad ogni punto $P \in \mathbb{A}$ il punto simmetrico di P rispetto a C, cioè il punto $f(P)$ che soddisfa l'identità vettoriale:
$$\overrightarrow{Cf(P)} = -\overrightarrow{CP}$$