Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Sara Lamboglia e Alessandra Albanese

SOLUZIONI TUTORATO 1
29 SETTEMBRE 2011

1. Stabilire quali delle seguenti sono forme bilineari su $\mathbb{R}^n$:

   (a) $< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_3y_3$

   (b) $< x, y >= 3x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 - \sqrt{2}x_2y_3 - \sqrt{2}x_3y_2 + x_2y_4 + x_4y_2$

   (c) $< x, y >= x_1y_2 + x_2y_1 - \sqrt{2}x_1y_1 - 2x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 + x_2y_3 + x_3y_2$

   <u>*Soluzione* :</u>
   Verifichiamo le tre proprietá delle forme bilineari:
   Siano $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ e $z = (z_1, z_2, z_3)$ vettori di $\mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

   (a) $< x + z, y >= (x_1 + z_1)y_1 + 2(x_2 + z_2)y_2 + 2(x_1 + z_1)y_2 + 2(x_2 + z_2)y_1 + 3(x_3 + z_3)y_3 = \underline{x_1y_1} + z_1y_1 + \underline{2x_2y_2} + 2z_2y_2 + \underline{2x_1y_2} + 2z_1y_2 + \underline{2x_2y_1} + 2z_1y_1 + \underline{3x_3y_3} + 3z_3y_3 =$
   $< x, y > + < z, y >$

   $< x, y + z >= x_1(y_1 + z_1) + 2x_2(y_2 + z_2) + 2x_1(y_2 + z_2) + 2x_2(y_1 + z_1) + 3x_3(z_3 + y_3) = \underline{x_1y_1} + x_1z_1 + \underline{2x_2y_2} + 2x_2z_2 + \underline{2x_1y_2} + 2x_1z_2 + \underline{2x_2y_1} + 2x_2z_1 + \underline{3x_3y_3} + 3x_3z_3 =< x, y > + < x, z >$

   $\lambda < x, y >= \lambda(x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_3y_3) = (\lambda x_1)y_1 + 2(\lambda x_2)y_2 + 2(\lambda x_1)y_2 + 2(\lambda x_2)y_1 + 3(\lambda x_3)y_3 =< \lambda x, y >$

   $\lambda < x, y >= \lambda(x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_3y_3) = x_1(\lambda y_1) + 2x_2(\lambda y_2) + x_12(\lambda y_2) + 2x_2(\lambda y_1) + 3x_3(\lambda y_3) =< x, \lambda y >$

   (b) Si procede allo stesso modo di (a)

   (c) Si procede allo stesso modo di (a)

2. Data la seguente forma su $\mathbb{R}[T]^{\leq 3}$,determinare se é una forma bilineare simmetrica:

$$< p(t), q(t) >= p(2)q(2) - p'(0)q'(0) - p''(1)q(3) - p(3)q''(1)$$

$\underline{Soluzione:}$
Siano $p(t), q(t), s(t) \in \mathbb{R}[T]^{\leq 3}$:
$< p(t) + s(t), q(t) >= [p(2) + s(2)]q(2) - [p'(0) + s'(0)]q'(0) - [p''(1) + s''(1)]q(3) - [p(3)q(3)]q''(1) = \underline{p(2)q(2)} + s(2)q(2) - \underline{p'(0)q'(0)} - s'(0)q'(0) - \underline{p''(1)q(3)} - s''(1)q(3) - \underline{p(3)q''(1)} - s(3)q''(1) =$
$=< p(t), q(t) > + < s(t), q(t) >$

$< p(t), q(t) + s(t) >= p(2)[q(2) + s(2)] - p'(0)[q'(0) + s'(0)] - p''(1)[q(3) + s(3)] - p(3)[q''(1) + s''(1)] = p(2)q(2) + p(2)s(2) - p'(0)q'(0) + p'(0)s'(0) - p''(1)q(3) + p''(1) + s(3) - p(3)q''(1) - p(3)s''(1)$
$=< p(t), q(t) > + < p(t), s(t) >$

$\lambda < p(t), q(t) >= \lambda(p(2)q(2) - p'(0)q'(0) - p''(1)q(3) - p(3)q''(1)) = \underline{\lambda p(2)}q(2) - \underline{\lambda p'(0)}q'(0) - \underline{\lambda p''(1)}q(3) - \underline{\lambda p(3)}q''(1) =< \lambda p(t), q(t) >$

$\lambda < p(t), q(t) >= \lambda(p(2)q(2) - p'(0)q'(0) - p''(1)q(3) - p(3)q''(1)) = \lambda p(2)q(2) - \lambda p'(0)q'(0) - \lambda p''(1)q(3) - \lambda p(3)q''(1) = p(2)(\lambda q(2)) - p'(0)(\lambda q'(0)) - p''(1)(\lambda q(3)) - p(3)(\lambda q''(1)) =< p(t), \lambda q(t) >$

Verifichiamo che é simmetrica:
$< p(t), q(t) >= p(2)q(2) - p'(0)q'(0) - p''(1)q(3) - p(3)q''(1) = q(2)p(2) - q'(0)p'(0) - q(3)p''(1) - q''(1)p(3) =< q(t), p(t) >$

3. Determinare quali delle seguenti sono forme bilineari su $\mathbb{R}^n$:

   (a) $F(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=1}^n x_j$
   (b) $F(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2 - \sum_{j=1}^n y_j^2$
   (c) $F(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=1}^n x_j + y_{n-j}$

   $\underline{Soluzione:}$
   Si procede come nell'esercizio 1, verificando anche se sono o meno simmetriche:

   (a) Non é una forma bilineare simmetrica
   Infatti $F(\overline{x}, \overline{y} + \overline{z}) = \sum_{i=1}^n x_j$
   Mentre $F(\underline{x}, \underline{y}) + F(\underline{x}, \underline{z}) = \sum_{i=1}^n x_j + \sum_{i=1}^n x_j$
   Quindi $F(\overline{x}, \overline{y} + \overline{z}) \neq F(\underline{x}, \underline{y}) + F(\underline{x}, \underline{z})$
   (b) Non é una forma bilineare simmetrica: si procede come nell'esercizio precedente e si verifica che non sono rispettate le proprietà delle forme bilineari.
   (c) Non é una forma bilineare simmetrica.Infatti valgono tutte le proprietà tranne quella della moltiplicazione per uno scalare.

4. Sia F una forma bilineare simmetrica assegnata su uno spazio vettoriale V . Sia $S \subseteq V$ un sottoinsieme di V . Dimostrare che:

$$S^{\perp} =< S >^{\perp}$$

<u>*Soluzione :*</u>
<u>Def</u>:$< S >= \{v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, ai \in K, s_i \in S\}$
<u>Def</u>:$S^{\perp} = \{v \in V t.c. F(v, s) = 0 \; s \in S\}$
<u>Def</u>:$< S >^{\perp} = \{v \in V \; t.c. \; F(\sum_{i=1}^{n} a_i s_i, v) = 0 \; \forall s_i \in S \; a_i \in K\}$

Verifichiamo ora l'uguaglianza $S^{\perp} =< S >^{\perp}$ procedendo per doppia inclusione:

$< S >^{\perp} \subseteq S^{\perp}$: Sia $x \in < S >^{\perp}$ allora $F(\sum_{i=1}^{n} a_i s_i, x) = 0$ con $s_i \in S$ e $a_i \in K$, allora basta scegliere $a_1 = 1 \; e \; a_i = 0 \; \forall i = 2, \cdots, n \; e \; s = s_1 \forall s \in S$ e dunque $0 = F(\sum_{i=1}^{n} a_i s_i, x) = F(s+0+\cdots+0, x) = F(s, x)$ quindi $x \in S^{\perp}$

$< S >^{\perp} \supseteq S^{\perp}$: Sia $x \in S^{\perp}$ allora $F(x, s) = 0 \; \forall s \in S$. Sia $s' = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i \; con \; a_i \in K \; s_i \in S$ allora $F(x, s') = F(x, \sum_{i=1}^{n} a_i s_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i F(x, s_i) = 0$.Dunque $x \in < S >^{\perp}$

5. Data la forma bilineare $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da :

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 3x_3 y_3$$

$\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^3$ con $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

(a) Stabilire se F é simmetrica.
(b) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$.
(c) Stabilire se F é degenere.
(d) Verificare che i sottospazi $U =< (1, 0, 0,) >$ e $V < (0, 0, 1) >$ sono ortogonali rispetto alla forma F.(Nota: due sottospazi U e W si dicono ortogonali se $U \subseteq V^{\perp}$ e $V \subseteq U^{\perp}$).
(e) Dimostrare che non esistono vettori isotropi del tipo $(0, 0, t), t \neq 0$.
(f) Trova l'equazione del cono isotropo.

<u>*Soluzione :*</u>

(a) $F(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 3x_3 y_3 = F(\bar{y}, \bar{x})$.
(b) $A = (a_{i,j})_{i,j=1,2,3}$
dove:
$a_{1,1} = F(e_1, e_1) = 1$
$a_{1,2} = F(e_1, e_2) = 2$

$a_{1,3} = F(e_1, e_3) = 0$
$a_{2,1} = F(e_2, e_1) = 2$
$a_{2,2} = F(e_2, e_2) = 2$
$a_{2,3} = f(e_2, e_3) = 0$
$a_{3,1} = F(e_3, e_1) = 0$
$a_{3,2} = F(e_3, e_2) = 0$
$a_{3,3} = F(e_3, e_3) = 3$
Quindi la matrice é: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(c) F é non degenere in quanto il rango della matrice A é 3.

(d) Troviamo $U^{\perp}$:
Nota bene: la definizione di ortogonalitá riguarda solo le forme bilineari simmetriche
$(1,0,0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e cioé $x + 2y = 0$
Si ha che $U^{\perp}$ é generato dai vettori $(-2, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ e quindi $V \subseteq U^{\perp}$.
Troviamo $V^{\perp}$:
$(0,0,1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e cioé $3z = 0$
Si ha che $V^{\perp}$ é generato dai vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ e quindi $U \subseteq V^{\perp}$.

(e) Supponiamo per assurdo che $F((0, 0, t), (0, 0, t)) = 0, t \neq 0$ allora si avrebbe $3t = 0$ che é impossibile se $t \neq 0$.

(f) L'equazione del cono isotropo é: $(x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
e cioé $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy = 0$.

6. Data la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Scrivere la forma bilineare G definaita dalla matrice A rispetto alla base canonica.

   (b) Stabilire se G è degenere e trovare 2 vettori non nulli $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^4$ tali che $G(x_0, y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^4$ e $G(x, y_0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^4$.

(c) Scrivere la matrice di G rispetto alla base $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

$$b_1 = e_1, \quad b_2 = -e_1 + e_4, \quad b_3 = e_1 + e_2, \quad b_4 = e_3$$

.

<u>*Soluzione :*</u>

(a) $G(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} =$
$x_1y_2 + x_3y_3 - 2x_2y_4$.

(b) Si ha $det(A) = 0$ da cui deduciamo che A non ha rango massimo, e quindi che G é degenere. Per trovare $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^4$ che verificano le richieste dell'esercizio procediamo in questo modo:
$G(x_0, y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^4 \ \rightarrow {}^t x_0 A y = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^4 \rightarrow \ {}^t x_0 A y y^{-1} = 0 y^{-1} \rightarrow \ {}^t x_0 A = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x, y, z, t) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ z \\ -2t \end{pmatrix}$$

Quindi dobbiamo prendere come vettore x_0 un vettore che soddisfi il seguente sistema:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ -2t = 0 \end{cases}$$

Quindi sono soluzione tutti i vettori del tipo $(0, k, 0, 0)$ scegliamo ad esempio $x_0 = (0, 1, 0, 0)$ Per trovare y_0 procediamo analogamente:
$G(x, y_0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^4 \ \rightarrow {}^t x A y_0 = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^4 \rightarrow \ (x_0^{-1})^t x_0 A y = 0 x^{-1} \rightarrow \ A y_0 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -2t \\ z \end{pmatrix}$$

Quindi dobbiamo prendere come vettore y_0 un vettore che soddisfi il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ -2t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi sono soluzione tutti i vettori del tipo $(k, 0, 0, 0)$ scegliamo ad esempio y_0= $(1, 0, 0, 0)$

(c) Per scrivere la matrice di G rispetto alla nuova base devo calcolare $F(b_i, b_j)\,\forall i, j = 1, ..., n$.
$F(b_1, b_1) = F(e_1, e_1) = 0$
$F(b_1, b_2) = F(e_1, -e_1 + e_4) = -F(e_1, e_1) + F(e_1, e_4) = 0$
$\ldots$
La matrice che otteniamo è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$